

受験番号:

氏名:

総合研究大学院大学 先端学術院先端学術専攻 宇宙科学コース
入学者選抜試験 問題
(物理)

問1. (合計 50 点)

問1では, 時刻を表す記号は t を用いること. また, 変数 X の時間による微分は, $\frac{dX}{dt}$, または $\dot{X}$, のいずれかのように表記すること.

(1)

角度 α の斜面上における, 密度が一様で厚さの無視できる薄い円板の運動を考える. 円板の質量を M , 円板の半径を R , 重力加速度を g , とする. 初期状態(時刻 $t = 0$)において円板と斜面の接点を原点 O とし, 斜面下向きに x 軸をとる. 円板の中心(重心)の x 座標を x とし, x の時間微分, すなわち x 方向の速度を v とする.

まず, 図 1-1 のように, 円板と斜面の間に摩擦がなく, 円板が斜面を滑り, 全く回転せずに運動する場合を考える. ここで, 円板が斜面から受ける垂直抗力を N とする.

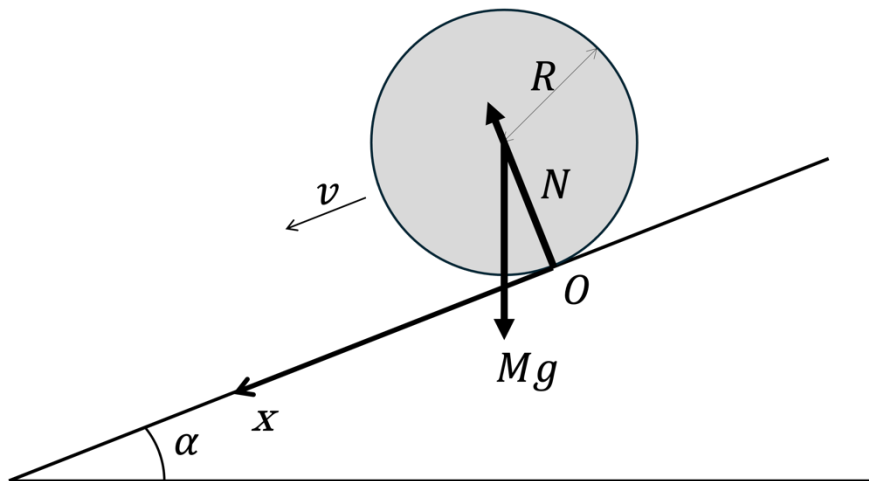


図 1-1

(1)-① 斜面接線方向と斜面法線方向の運動方程式をそれぞれ示せ. (4 点)

(1)-② 時刻 $t (\geq 0)$ における円板の運動エネルギーおよび位置エネルギーを, x , v を用いて示せ. なお, 初期状態($t = 0$)における位置エネルギーを基準(ゼロ)とする. (4 点)

(1)-③ (1)-①の運動方程式を解き, 時刻 t における x を示せ. なお, 初期状態($t = 0$)

(※この用紙は回収します。)

受験番号: _____ 氏名: _____
における速度 v は0(ゼロ)とする。(4点)

次に, 図 1-2 のように, 円板が斜面に対して滑らずに, 転がって運動する場合を考える. ここで, 円板と斜面の間の摩擦力を F , 円板の角速度を ω , とする.

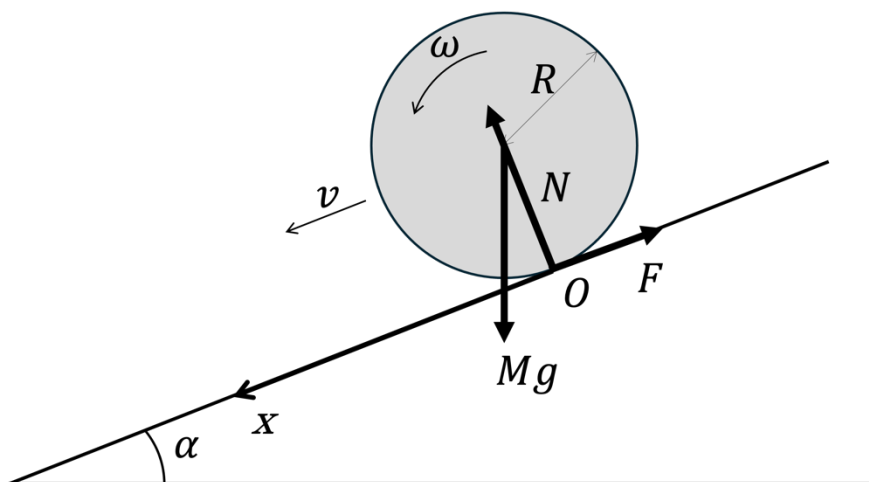


図 1-2

(1)-④ 図 1-3 の左側の図に示すように, 二次元平面上の(厚さが無視できるほど薄い)剛体の, 原点 O_c を通り紙面に垂直な軸まわりの慣性モーメント I は,

$$I = \int_M |\vec{r}|^2 dm = \rho \int_S |\vec{r}|^2 dS$$

と定義される. ここで, dm は微小質量要素, $\vec{r}$ は原点 O_c から微小質量要素に向かう位置ベクトル, $|\vec{r}|$ は $\vec{r}$ の大きさ, M は剛体の質量, S は剛体の面積, dS は微小質量要素の面積, $\rho = \frac{M}{S}$ は剛体の面密度である.

この定義式に則り, 質量が M , 半径が R で, 密度が一様な, 厚さの無視できる円板の中心軸(原点 O_c を通り紙面に垂直な軸)まわりの慣性モーメントを求めよ. 図 1-3 の右側の図を参考にせよ.(4点)

受験番号: _____ 氏名: _____

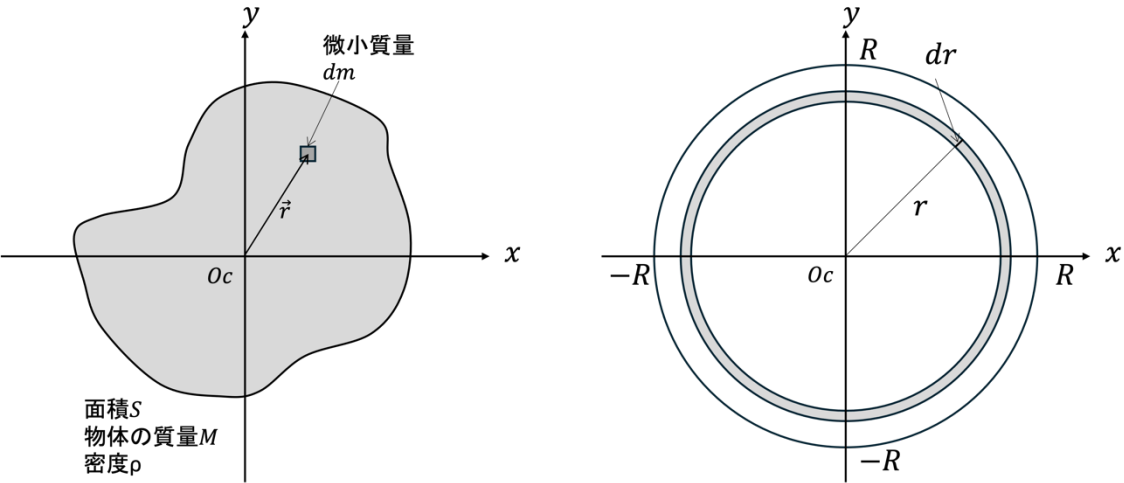


図 1-3

- (1)-⑤ 斜面接線方向と斜面法線方向の並進の運動方程式，および円板の回転の運動方程式を示せ．（慣性モーメントは，(1)-④で導出したものを用いること）（4 点）
- (1)-⑥ 時刻 t (≥ 0) における円板の並進および回転の運動エネルギーと，円板の位置エネルギーを， x , v , ω を用いて示せ．なお，初期状態($t = 0$)における位置エネルギーを基準(ゼロ)とする．（4 点）
- (1)-⑦ 円板が斜面を滑らずに転がる場合，重心の並進速度と斜面と円板の接点での回転による速度は一致するから， $v = R\omega$ の関係がある．この関係を用いて，(1)-⑤の運動方程式を解き，時刻 t における x を示せ．なお，初期状態における速度 v および角速度 ω は0(ゼロ)とする．（5 点）

受験番号: _____ 氏名: _____

(2)

図 1-4 に示すように、慣性系に固定された半径 R の円筒の内側を、半径 r の円板が滑らずに転がり、円筒内面を振動する運動を考える。円板は厚さが無視できるほど薄く、密度が一樣であり、その質量を M とする。円板と円筒内面の摩擦力を F 、円板が円筒から受ける法線方向の力を N とする。円筒の中心を点 P 、円筒の最下点を点 O 、円板の中心(重心)を点 G とする。ある時刻 t において、円筒内面と円板が接する点を点 A とする。円板が円筒の最下点にあるとき、円筒と接する円板上の点を点 B とする。 PO と PA がなす角を θ 、 GA と GB がなす角を ϕ とする。重力加速度を g とし、図 1-4 の下向き(P から O への向き)に働くとする。

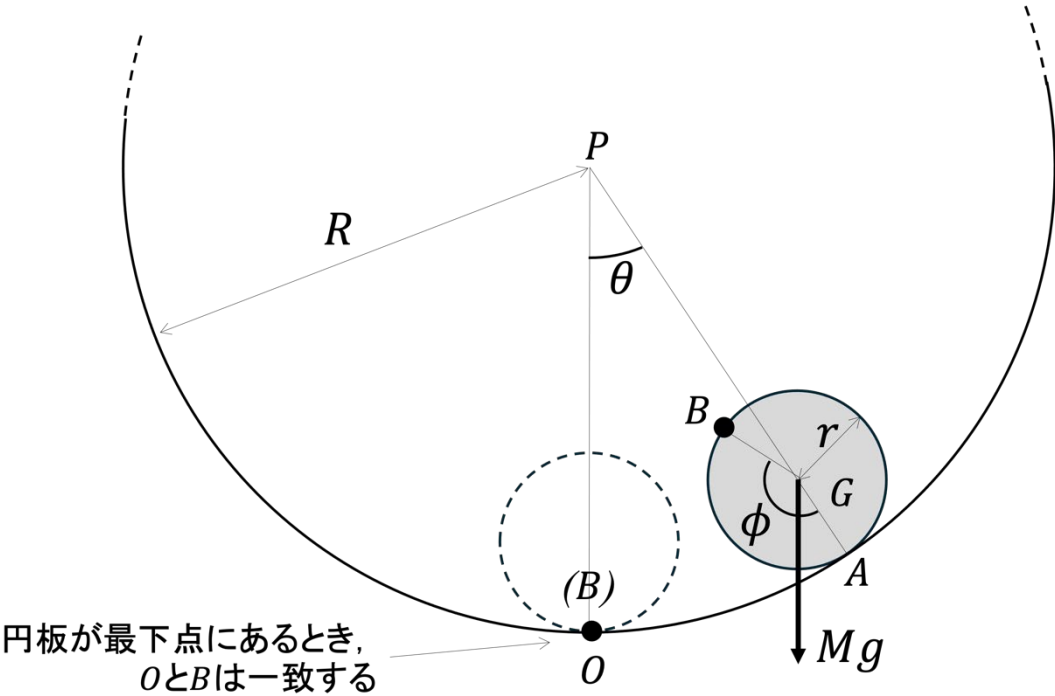


図 1-4

(2)-① 円板の重心の、円筒接線方向および法線方向の運動方程式、さらに慣性系から見たときの円板の回転の運動方程式を示せ。慣性系から見たときの円板の回転角は、慣性系に固定された座標軸(例えば、重力方向の鉛直軸)に対する円板の回転角を意味することに注意せよ。なお、法線方向の運動方程式は、円板重心が点 P を中心とする円運動していることを考慮すること。円板の慣性モーメントは I とおくこと。(4 点)

(2)-② 円板の並進運動と回転運動のエネルギーと、円板の位置エネルギーを、 ϕ 、 θ を用いてそれぞれ示せ。なお、円板が最下点にあるとき($\theta = 0$)の位置エネルギーを基準(ゼロ)とする。(4 点)

(※この用紙は回収します。)

受験番号:

氏名:

(2)-③ 円板が円筒内面を滑らずに転がる場合の, θ と ϕ の関係を示せ. (4 点)

(2)-④ 変数が θ のみ含まれる微分方程式を導け. また, θ が微小であると想定して, $\sin \theta \cong \theta$ と近似できるとき, その振動の周期を示せ. なお, 円板の慣性モーメントは,

(1)-④で導出したものを用いること. (9 点)

受験番号: _____ 氏名: _____

問2. (合計 50 点)

図 2-1 のように、鉛直上向きに磁束密度の大きさ B の一様な磁場(磁界)が貫く中に、2 本の長い導体のレールが間隔 L で平行に置かれ、抵抗 R およびスイッチで接続されている。レールの上に導体棒をレールと垂直になるように乗せ、スイッチを入れた状態で導体棒を右向きに一定の速さ v_0 で引く。このとき、導体棒はレールと垂直を保ったままとし、レールと導体棒の間に摩擦は生じないものとする。また、回路に電流が流れることで生じる二次的な磁場等の効果は無視する。解答用紙には、解答導出の経緯も簡潔に記すこと。

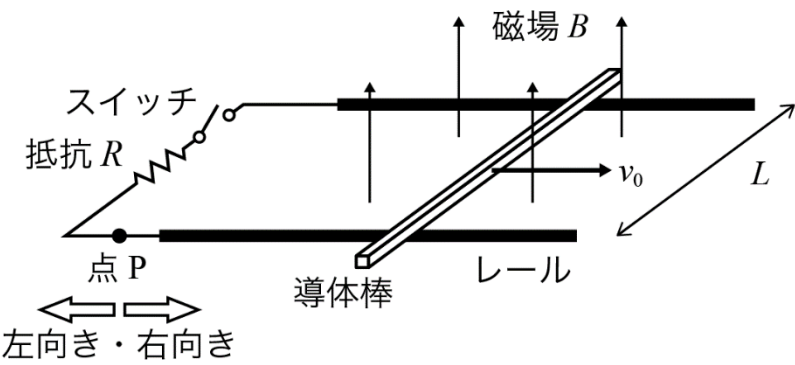


図 2-1. 2 本の平行なレール上で導体棒を動かす

(1) 導体棒が動くことにより生じる誘導起電力 V の大きさ(絶対値)は 、回路に流れる電流 I の大きさ(絶対値)は 、電流の向きは である。ただし、 は図 2-1 の点 P における電流の向きを「右向き・左向き」から選択して答えよ。(各 4 点)

受験番号: _____ 氏名: _____

次に、図 2-2 のように、回路に電圧 V_0 の直流電源を追加し、導体棒は動かさずに静置する。

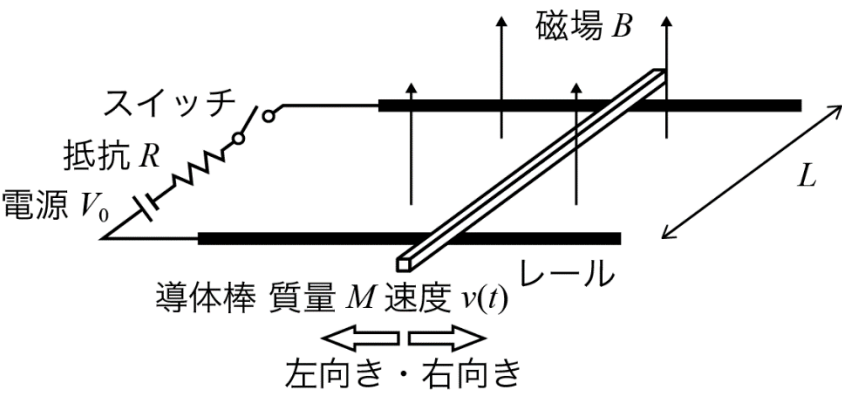


図 2-2. 電源 V_0 を追加し、導体棒を静置する

(2) スイッチを入れた直後に導体棒の動く向きは である。ただし、 は図 2-2 の「右向き・左向き」から選択して答えよ。また、スイッチを入れた後の導体棒のレール方向の動きについて、運動方程式を立式せよ。ただし、時間 t 、導体棒の質量 M 、レール方向の速度 $v(t)$ とし、電流 $I(t)$ を使って表して良いものとする。(各 4 点)

$$M \frac{dv(t)}{dt} = \text{ }$$

(3) スイッチを入れて十分時間が経つと、電流 $I(t)$ はある一定の値 I_∞ に、導体棒の速度 $v(t)$ はある一定の値 v_∞ に近づくことが予想される。 $I(t)$ および $v(t)$ をそれぞれ t の関数として示せ。また、それらの終端値 I_∞ および v_∞ を求めよ。(カ・キ: 各 7 点、ク・ケ: 各 3 点)

$$I(t) = \text{ } , v(t) = \text{ } \\ I_\infty = \text{ } , v_\infty = \text{ }$$

(※この用紙は回収します。)

受験番号: _____ 氏名: _____

今度は、図 2-3 のように、回路からスイッチ、抵抗 R 、電源 V_0 を取り去り、導体棒を 2 本に増やす。導体棒②からは軽い糸が張られ、滑車を経て質量 m のおもりに結ばれている。導体棒②は大きさ r の抵抗を有する。導体棒①、②のいずれについても導体棒はレールと垂直を保ったままとし、レールと導体棒の間に摩擦は生じないものとする。また、滑車は滑らかに動くものとする。

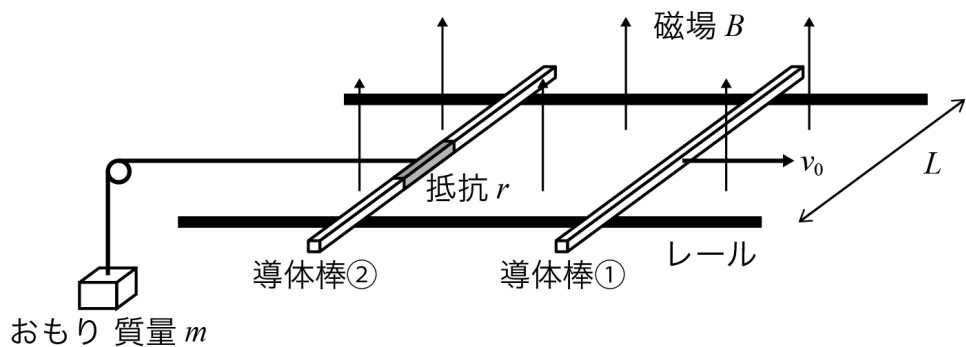


図 2-3. 導体棒を 2 本とし、導体棒①を動かす

(4) 導体棒①を右向きに一定の速さ v_0 で引いたところ、導体棒②も同じく右向きに一定の速さ u で動いた。重力加速度の大きさを g として、導体棒②の速さ u を求めよ。(10 点)

$u =$ コ