

総合研究大学院大学 先端学術院先端学術専攻 宇宙科学コース

入学者選抜試験 出題意図と解答例 (数学)

問1.

出題意図 代数幾何の基本的な計算ができる。

解答例

問 1-1

問 1-1-1.

$$(1) i^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{※ } -I \text{ と一致する}$$

$$(2) j \cdot i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{※ } -k \text{ と一致する}$$

$$(3) k \cdot i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{※ } j \text{ と一致する}$$

$$(4) k \cdot j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{※ } -i \text{ と一致する}$$

問 1-1-2.

$$Q = \begin{pmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & -z & y \\ y & z & w & -x \\ z & -y & x & w \end{pmatrix}, Q^* = \begin{pmatrix} w & x & y & z \\ -x & w & z & -y \\ -y & -z & w & x \\ -z & y & -x & w \end{pmatrix},$$

問 1-1-3.

問 1-1-1. より (1) $i^2 = -I$ (2) $j \cdot i = -k$ (3) $k \cdot i = j$ (4) $k \cdot j = -i$ と書ける。

よって

$$Q \cdot i \cdot Q^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j) \right\} \cdot i \cdot \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}(i + j) \right\} = j$$

これから (ア) 0 (イ) 0 (ウ) 1 (エ) 0 となる。

問 1-2.

問 1-2-1.

Aの固有値を λ , 固有値ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると定義より $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 。 $\det(\lambda I - A) = 0$ より

$\lambda = 1, 3, 5$ である。 固有値ベクトルの第1成分および第3成分は、0もしくは1の値

という制約より、対応する固有値ベクトルはそれぞれ

$$\lambda = 1 \text{ のとき } \text{固有値ベクトル } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3 \text{ のとき } \text{固有値ベクトル } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 5 \text{ のとき } \text{固有値ベクトル } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問 1-2-2.

固有値を小さい順に並べた行列 P は $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

掃き出し法を用いると

$$(P | I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ から } (I | P^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1/2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\text{よって } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 2 \\ -1 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

問 1-2-3.

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

問 1-2-4.

$$B^n = P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^nP$$

よって

$$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 \cdot 3^n + 4 \cdot 5^n - 2 & -3^n + 2 \cdot 5^n & -4 \cdot 3^n + 4 \cdot 5^n \\ 3^n - 5^n & (3^n - 5^n)/2 & 2 \cdot 3^n - 5^n \end{pmatrix}$$

問2.**問2-1.**

出題意図 微分積分の基礎的な知識と計算力を問う(定積分の計算)。

解答例

(1) $\pi - 2$

(2) $\frac{\pi a^4}{16}$

問2-2.

出題意図 微分積分の基礎的な知識と計算力を問う(常微分方程式の一般解を求める)。

解答例

(1) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^x/6$

(2) $y = \frac{1}{2} \left(Cx - \frac{1}{Cx} \right)$

問2-3.

出題意図 微分積分の基礎的な知識と計算力を問う(n 階の微分を求める)。

解答例

(1) $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$

ただし、 α が自然数の時は $n > \alpha$ につき $f^{(n)}(x) = 0$

(2) $f^{(n)}(x) = \log x + 1 \quad (n = 1)$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-2)! x^{-n+1} \quad (n \geq 2)$$

$$(3) \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{b-a} \{(x+a)^{-n-1} - (x+b)^{-n-1}\}$$

問2-4.

出題意図 微分積分の基礎的な知識と計算力を問う。

解答例 陰関数の微分を求め、等式を証明すればよい。