受験番号：　　　　　　　　　　　　　　　　氏名：

総合研究大学院大学　先端学術院先端学術専攻　宇宙科学コース
入学者選抜試験　問題
（数学）

問 1.（合計 50 点）

問 1-1.（合計 20 点）

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の 4 つの行列について、次の問いに答えよ。

問 1-1-1.　(1) $\boldsymbol{i}^2$　(2) $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}$　(3) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}$　(4) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}$ をそれぞれ求めよ。（8 点）

問 1-1-2.　$Q = wI + x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k},\ Q^* = wI - x\,\boldsymbol{i} - y\,\boldsymbol{j} - z\,\boldsymbol{k}$のとき、$Q$および$Q^*$をそれぞれ w, x, y, z を用いて表せ。（4 点）

問 1-1-3.　前問のQ, Q^*において、$w = \cos\frac{\theta}{2},\ x = A_1\sin\frac{\theta}{2}, y = A_2\sin\frac{\theta}{2}, z = A_3\sin\frac{\theta}{2}$とする。ベクトル$(A_1, A_2, A_3)$が単位ベクトルの場合、$Q$は回転クォータニオンと呼ばれ、軸$(A_1, A_2, A_3)$に対して点$(p, q, r)$を$\theta$回転した点を$(p', q', r')$とすると、$Q\cdot P\cdot Q^* = P'$という関係がある。ここで、$P = p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}$、$P' = p'\boldsymbol{i} + q'\boldsymbol{j} + r'\boldsymbol{k}$である。

$\theta = \pi,\ A_1 = A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ A_3 = 0$ のとき

$Q\cdot\boldsymbol{i}\cdot Q^* = \boxed{\text{（ア）}}\,I + \boxed{\text{（イ）}}\,\boldsymbol{i} + \boxed{\text{（ウ）}}\,\boldsymbol{j} + \boxed{\text{（エ）}}\,\boldsymbol{k}$ となる。

(ア)~(エ)に当てはまる値を答えよ。最終回答のみでなく導出過程も示すこと。（8 点）

（※この用紙は回収します。）

受験番号:　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名:

問 1-2.（合計 30 点）

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 8 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ をn乗した行列A^nを求めたい。以下の設問に回答せよ。尚、最終回答のみでなく導出過程も示すこと。

問 1-2-1.　行列Aの固有値と固有値ベクトルを求めよ。簡単化のために、固有値ベクトルの第 1 成分および第 3 成分は、0 もしくは 1 の値とする。（15 点）

問 1-2-2.　固有値ベクトルを固有値の小さい順に並べた行列Pを定義し、その逆行列P^{-1}を求めよ。（5 点）

問 1-2-3.　対角行列$B = P^{-1}AP$ を求めよ。（5 点）

問 1-2-4.　対角行列Bを利用して行列 A^n を求めよ。（5 点）

（※この用紙は回収します。）

受験番号:　　　　　　　　　　　　　　　氏名:

問 2.（合計 50 点）

問 2-1.　aを実定数として、次の定積分を計算せよ。最終解答のみでなく、計算の過程も記述すること。（16 点）

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$

(2)　$\displaystyle\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx \qquad (a > 0)$

問 2-2.　x, yを実数として、次の微分方程式を解け。最終解答のみでなく、導出の過程も記述すること。（16 点）

(1)　$\displaystyle\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

(2)　$\displaystyle\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{dy}{dx} = 0$

問 2-3.　α, a, bを実定数、nを自然数として、次の関数のn次導関数を求めよ。（12 点）

(1)　$f(x) = x^\alpha$

(2)　$f(x) = x \log x$

(3)　$f(x) = \dfrac{1}{(x+a)(x+b)}$

問 2-4.　a, b, cを実定数として

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1$$

で定まるx, y, zの関数uについて、次の関係式が成り立つことを証明せよ。（6 点）

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 2\left(xu_x + yu_y + zu_z\right)$$

なお、$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_z = \frac{\partial u}{\partial z}$ と定義する。

（※この用紙は回収します。）