

受験番号:

氏名:

総合研究大学院大学 先端学術院先端学術専攻 宇宙科学コース
入学選抜試験 問題
(数学)

問1 次の行列 A, B, C について、以下の設問に回答せよ。尚、最終回答のみでなく導出過程も示すこと。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

問1-1. 行列 A, B, C のそれぞれの階数(ランク)と、正則の場合はそれらの逆行列を求めよ。

問1-2. 行列 A, B, C のそれぞれの固有値と固有ベクトルを求めよ。尚、固有ベクトルは正規化すること。

問1-3. 平面上の任意のベクトル r は、その平面上の2つの線形独立なベクトル e_1, e_2 と定数 c_1, c_2 を用いて、

$$r = c_1 e_1 + c_2 e_2$$

と表せる。線形独立なベクトル e_1, e_2 を、問1-2で求めた行列 A の正規化した固有ベクトルとする。この場合、 r と Ar を図示しなさい。

問1-4. 次の2次式が表す図形を x, y 座標系に図示せよ。

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$$

ただし、以下を用いること(下記文中の tA は A の転置行列を表す)。

- ・ $F(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ 、 $x = {}^t(x \ y)$ とした場合、 $F = {}^t x B x$ (ただし B は設問の最初で定義した行列 B) となること。
- ・ $y = {}^t(X \ Y) = P^{-1}x$ となるような座標変換を用いること。ただし、 P は行列 B を対角化するための直交行列とする。

受験番号:

氏名:

問2

問2-1. x を実数として以下の関数の導関数を求めよ。(3)、(4)、(5)に関しては最終解答のみでなく、導出の過程も記述すること。

(1) $f(x) = (x^2 + 1)^3$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

(3) $f(x) = \tan x$

(4) $f(x) = \cos^{-1} x \ (-1 < x < 1, 0 < \cos^{-1} x < \pi)$

(5) $f(x) = x^x$

問2-2. x を実数として以下の不定積分 $F(x)$ を求めよ。(2)、(3)に関しては最終解答のみでなく、導出の過程も記述すること。

(1) $F(x) = \int (x - 3)^3 dx$

(2) $F(x) = \int \cos^2 x dx$

(3) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx$

問2-3. x を実数として次の不等式を証明せよ。

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{36} \quad (x \neq 0)$$

問2-4. x, y, p を実数として以下の微分方程式の一般解を求めよ。最終解答のみでなく、導出の過程も記述すること。

(1) $x(x - y) \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$

(2) $p^2 + 2xp - 3x^2 = 0, p = y'$

(※この用紙は回収します。)

受験番号:

氏名:

問2-5. x を実数とし、 $f(x)$ が連続で微分可能な関数である場合、以下(1),(2)の演算子の変形を証明せよ。(n は自然数)

$$(1) \quad e^{f(x)} \frac{d}{dx} e^{-f(x)} = \frac{d}{dx} - f'(x)$$

$$(2) \quad e^{f(x)} \frac{d^n}{dx^n} e^{-f(x)} = \left(\frac{d}{dx} - f'(x) \right)^n$$

変数 x の関数

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

を Hermite の多項式という。これについて、以下の(3),(4),(5)を証明せよ。

$$(3) \quad (n+1)H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_{n-1}(x)$$

$$(4) \quad H'_n(x) = H_{n-1}(x)$$

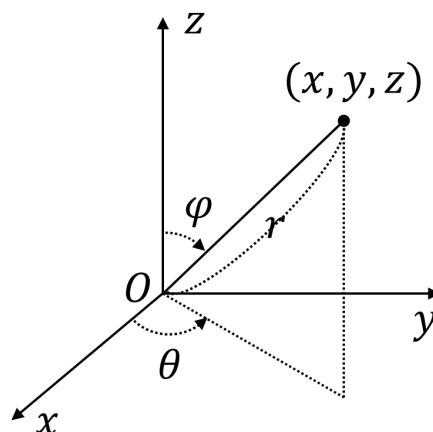
$$(5) \quad H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0$$

問2-6. 3次元空間において、右図で示す直交座標 (x, y, z) から極座標 (r, θ, φ) への変換を考える。

(1) この座標変換の関数行列式(Jacobian)

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$$

を求めよ。



(2) 上記で求めた関数行列式を用いて次の積分を求めよ。ただし、 $a > 0$ とする。

$$\iiint_D x^2 dx dy dz \quad D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$$

(※この用紙は回収します。)