2021.8.19

筆記試験（物理）

受験番号:　　　　　　　　　　　　　氏名:

総合研究大学院大学　物理科学研究科　宇宙科学専攻
入学選抜試験　問題
（物理）

問1．図 1 のように，質量がMで質量中心 G_A まわりの慣性モーメントがIである均質な剛体 A に、バネ定数がkで長さがℓである質量の無視できるバネと質量mの質点からなる足 B および C が左右対称に付いた物体がある。ただし、足 B と C との距離は$2a$である。いま、この物体が着地し，その瞬間，剛体 A の速度は下向きにV_oとなり、2 つの質点は地面上に静止した。また、この瞬間、2 つのバネは伸び縮みしていなかった。下向きの重力加速度をgとして、以下の(1)～(5)の問いに答えよ。

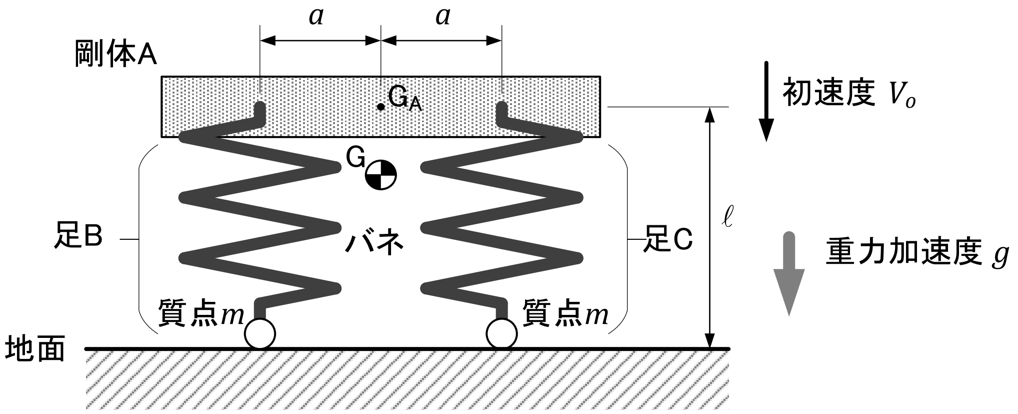


図 1　地面に着地する物体

(1) 図 2 の通り、ばねの縮み量、すなわち、着地の瞬間からの剛体 A の質量中心の下向きの移動量をyとする。着地後、ばねが最も縮んで剛体 A が最下点に達した後、剛体 A は上向きに動きはじめ、質点が地面から受ける上向きの垂直抗力が 0 になった瞬間、足 B と C が地面から離れた。このときのyの値y_eを求めなさい．ただし、足 B および C の質点と地面との間には、いわゆる粘着力のような引張力は作用しないものとする。

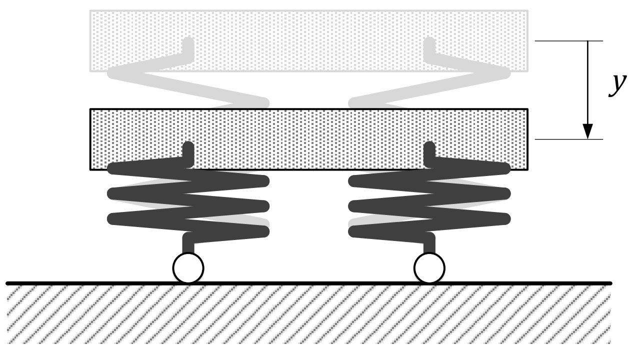


図 2　剛体 A の下向きの移動量

(2) 問題(1)の瞬間の剛体 A の上向きの速度V_eを求めよ。

（※この用紙は回収します。）

受験番号：　　　　　　　　　　　　　　　　氏名：

(3) 設問(1)の状態になった後、物体全体の質量中心 G は地面から離れていくが、G が地面から最も離れたときの、地面と G との距離 $h_{\max}$ を求めよ。

(4) もし、足 B および C に何等かの減衰機能をもたせることで、着地してから剛体 A が最下点にいたるまでの間に力学的エネルギーが散逸されるようにしておくと、設問(1)のような状態にはならず、物体は地面から離れないまま、運動を続けることになる。この散逸エネルギーを E とするとき、E がいくらよりも大きくなければならないか。

(5) 足 C のバネのバネ定数の値が k よりも大きな値 $\tilde{k}$ であったとする。このとき、物体の着地後、剛体 A は上下方向に移動しつつ、回転しはじめる。いま、図 3 のように、剛体 A の反時計回りの回転角を θ とするとき、k および $\tilde{k}$ が十分に大きければ、θ は微小であると近似できる。ここで、θ の 2 次以上の高次の項を無視すると、図 3 の通り、足 B のバネは回転していないときと比べて $a\theta$ だけさらに縮み、足 C のバネは $a\theta$ だけ伸びることになるが、この場合における剛体 A の運動方程式を導け。ただし、剛体 A の左右方向の運動は無視してよい。また、静的平衡状態における y および θ のそれぞれの値 y_p および θ_p を求めよ。

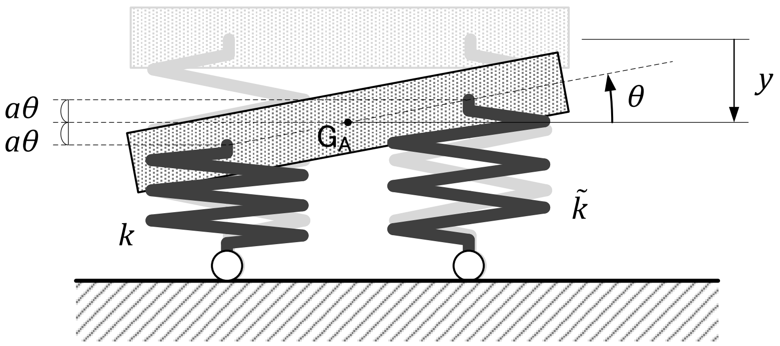


図 3 剛体 A の反時計回りの回転

（※この用紙は回収します。）

受験番号：　　　　　　　　　　氏名：

問 2. 以下では、表皮効果は考えなくて良く、取り扱う物質については次の線形性が成立するとして良い。

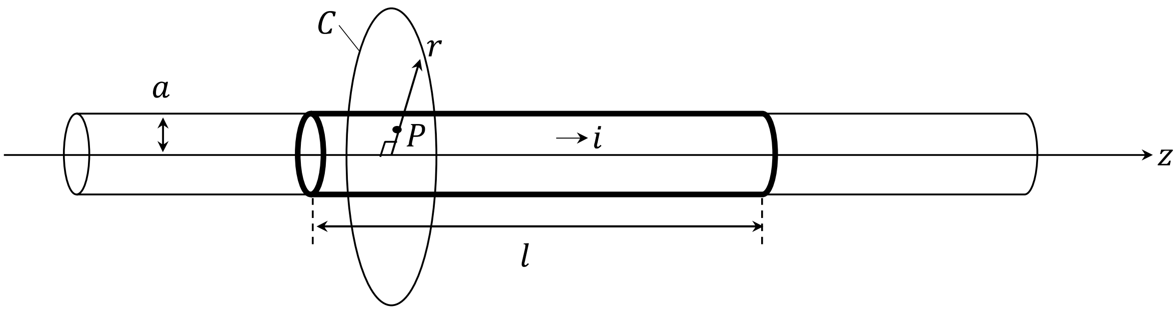
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$は、それぞれ電束密度、磁束密度、電流密度、電場、磁場を表す。また、ε、μ、σは誘電率、透磁率、導電率である。

今、図のように半径aの十分長い円柱が真空中にある。この円柱の誘電率、透磁率、導電率はε、μ、σで空間的に一様であり、時間によらないものとする。図のように円柱の中心軸にz座標を取り、半径方向をr軸とする。



(1) マクスウェル方程式の 1 つである次の式について検討してみよう。

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \left(\boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{4}$$

ここで、左辺は任意の閉曲線Cに沿った周回積分を、右辺は閉曲線Cに囲まれた面Sにおける表面積分を意味する。また、tは時刻を表す。

① 式(4)の右辺の括弧内第一項は伝導電流を示し、第二項は変位電流を示す。この式と式(1)及び式(3)から、問題の円柱に交流電場$\boldsymbol{E}$を与えると二種類の電流、すなわち、伝導電流と変位電流が流れることを読み取れる。ここで、円柱を導体と見なすには、変位電流が伝導電流に比べて十分小さいこと、すなわち

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{5}$$

が成立する必要がある。この条件を求める次の文章について、(a)~(c)を回答欄に記せ。
円柱に、z軸に平行な交流電場$\boldsymbol{E} = E_0 \sin \omega t$ が与えられたとき流れる伝導電流・変位電流はそれぞれ

$$\boldsymbol{i} = \boxed{\quad (a) \quad}$$

$$\partial \boldsymbol{D}/\partial t = \boxed{\quad (b) \quad}$$

（※この用紙は回収します。）

受験番号:　　　　　　　　　　　　　　　氏名:

と書ける。それぞれの振幅の大きさの比を取れば、円柱を導体と見なせる条件として

$$\boxed{\quad(c)\quad} \ll 1$$

を得る。

② 円柱内を一様な面密度iで定常電流がz軸に平行に流れているとき、図のようにCを z 軸に直交する面上にある半径r $(r \geq 0)$ の円として磁場の大きさHを半径rの関数として求め、図示せよ。

(2) 円柱内を一様な面密度iで定常電流がz軸に平行に流れているとき、式(3)のオームの法則について検討してみよう。

① 次の文章について、(d)、(e)を回答欄に記せ。なお、以下の設問では、問 2-(1)で考えた電流が作る磁場が電荷の動きに与える影響は考えなくて良い。

円柱内の電場 $\boldsymbol{E}$が大きさ Eで z 軸に平行で一様であるとする。伝導電流は電子が流れることで生じているが、ここでは考えやすいように質量などは同じまま電荷の符号だけ逆にした正の電荷が流れていると考えよう。以降、この正の電荷を電荷と記す。電場 E は電荷を加速するため、このままだと電流密度の定義$i = env$から、電流密度が増え続けてしまい定常電流という条件に反する。ここでe、n、vはそれぞれ素電荷、電荷の単位体積中あたりの数、及び電荷の速度である。この矛盾を解消するために、時刻tから非常に短い時間Δtだけ経った時、電荷の運動量は、電場 E によって増加した分から$(\Delta t/\tau)$ $mv(t)$だけ減少するものと考える。すなわち、

$$mv(t + \Delta t) - mv(t) = \boxed{\quad(d)\quad}$$

ここで、mは電荷の質量であり、τは運動量減少の頻度を説明するために導入した定数である。更に式変形すれば、電荷は運動方程式$\boxed{\quad(e)\quad}$に従う。

② 運動方程式（e）を定常状態について解き、電荷の速度vを求めよ。また、その結果を電流密度の定義に代入して、オームの法則（式（３））と比較することでσを求めよ。

③ ①で考察した運動量減少は、円柱が抗力を及ぼしていることを意味し、円柱で発生するジュール熱となる。単位時間あたり１つの電荷になされる仕事は$(1/\tau)mv \cdot v$と書けることに注意して、単位時間・単位体積当たりになされる仕事wがi^2/σと書けることを示せ。

④ 図のように円柱の長さlの部分に着目したとき、その表面の点 P $(r = a)$におけるポインティングベクトル$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$を、$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{H}$と合わせて向きがわかるように図示せよ。また、着目した部分の表面を貫く$\boldsymbol{S}$の総量を求めよ。求めた総量が着目した部分で発生するジュール熱に等しいことを示せ。

（※この用紙は回収します。）