受験番号：　　　　　　　　　　　　　　　　氏名：

総合研究大学院大学　物理科学研究科　宇宙科学専攻
入学選抜試験　問題
（数学）

問 1 次のA、Bの実対称行列について、以下の質問に回答せよ。最終回答のみでなく、導出の過程も記述すること。

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

問 1-1. AとBのそれぞれについて、固有値を求めよ。また、求められた固有値のそれぞれに対応する固有ベクトルを求めよ。固有ベクトルは、単位ベクトルとせよ。

（1）　行列Aについて
（2）　行列Bについて

問 1-2. 次の式を満たす行列P、Q、D_2、D_3、を求めよ。ここで、PとD_2は２×２の行列、QとD_3は３×３の行列である。D_2とD_3は対角行列である。ただし、PとQは、その行列式の値が1となるものとする。ここで、−1 の記号は逆行列を示す。

（1）　$\mathrm{AP} = \mathrm{PD}_2$（$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}_2$）
（2）　$\mathrm{BQ} = \mathrm{QD}_3$（$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BQ} = \mathrm{D}_3$）

問 1-3. 求められた行列PとQについて、次の関係を示せ。ここで、t の記号は転置行列、−1 の記号は逆行列を示す。

（1）　${}^t\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}$
（2）　${}^t\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{-1}$

（※この用紙は回収します。）

受験番号:　　　　　　　　　　　　　　　氏名:

問 1-4. 実数x、yについての 2 次式

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 4x + 2y + c = 0 \qquad c\text{は定数（実数）}$$

を考える。この式を満たす座標(x, y)は、xy座標平面上でどのような図形となるか。図形となる場合について実数cの値の条件と図形の名称を回答せよ。

なお、

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと、上式は

$$ {}^t\boldsymbol{x}\mathrm{A}\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + c = 0 \qquad (\,{}^t\text{は転置を示す}) $$

のように行列 A を使って表記できることを考慮し、問 1-2 のPを用いて、$\boldsymbol{x} = \mathrm{P}\boldsymbol{x}'$という変換を考えるとよい。

問 1-5. 実数x、y、zについての 2 次式

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 2 = 0$$

を考える。この式を満たす座標(x, y, z)の集合体は、どのような立体図形になるか。立体図形の名称を回答せよ。行列Bを用いて、問 1-4 と同様なやり方で解くとよい。

（※この用紙は回収します。）

受験番号：　　　　　　　　　　　　　　　氏名：

問 2

問 2-1.　次の不定積分 $F(x)$ を求めよ。なお、最終回答だけでなく、回答を導出する過程も記述すること。

（1）

$$F(x) = \int (5 - x)^5 dx$$

（2）

$$F(x) = \int x^3 \log x \, dx$$

（3）

$$F(x) = \int \frac{e^{4x}}{e^{2x} + 5} dx$$

問 2-2.　次の微分方程式を解き、y を x の関数で表せ。なお、最終回答だけでなく、回答を導出する過程も記述すること。

（1）

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2(y^2 + y)$$

（2）

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 8y = 0$$

問 2-3.　xy 面内において原点を中心とする半径 1 の円内の $x \geq 0$ および $y \geq 0$ の部分で示される領域 D における次の二重積分の値を求めよ。なお、最終回答だけでなく、回答を導出する過程も記述すること。

$$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dxdy$$

（※この用紙は回収します。）

受験番号:　　　　　　　　　　　　　　　　氏名:

問 2-4.　以下の各問いに答えよ。なお、最終回答だけでなく、回答を導出する過程も記述すること。

（1）　$\frac{d}{dp}(\cos^{-1} p) = -\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$ であることを示せ。

次に、図 2-1 のような内径 $2a$ の半球状の容器に一定の供給量率 Q で水を入れることを考える。今、水の最深部の深さが h であった。以下の量を a および h の関数で表せ。

（2）　xz 面内において、最深部から水面までの容器内面に沿った距離 L

（3）　$\frac{dL}{dh}$

（4）　水によって覆われた容器表面の面積

（5）　水の体積

次に、以下の量を a、h、および Q の関数で表せ。

（6）　水面の上昇速度

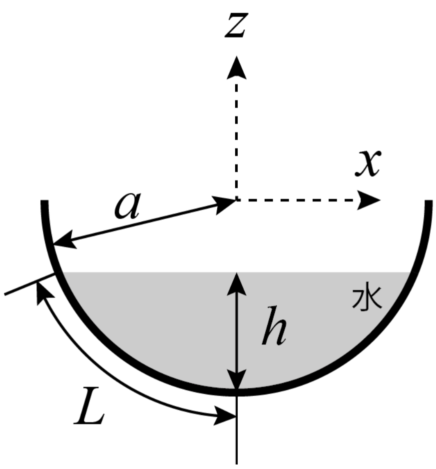

図 2-1 半球状容器

（※この用紙は回収します。）