受験番号:　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名:

総合研究大学院大学　物理科学研究科　宇宙科学専攻
入学選抜試験　問題
（物理）

問1．下記の問いに解答せよ。物体は質点とし、それに作用する力は重力のみとする。要すれば、$\sqrt{2}$を 1.41 、$\sqrt{3}$を 1.73 として計算せよ。

(1)-①　地面を水平な無限平面とし、高さ h の位置から、質量mの物体を水平方向速度 V で射出したとき、物体が地面に到達した時点で、この物体が水平方向に移動した距離をもとめよ（図 1-1 を参照）。重力は常に地面に鉛直方向下向きにかかるとし、重力加速度は g とする。

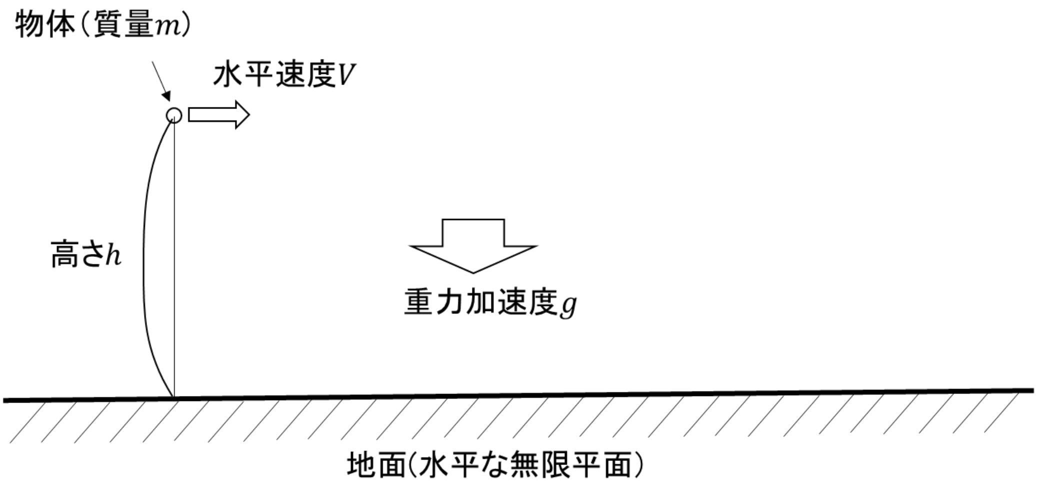

図 1-1 水平方向に射出された質量 m の物体の運動

(1)-②　設問(1)-①において、重力が 1/6 倍となった場合、物体を同じ位置まで到達させるために必要な速度は何倍になるかを、有効数字を 2 桁として求めよ。

以下の設問(2)、(3)、(4)においては、図 1-2 で示す様に、質量 M 、半径 R とする天体まわりの質量m の物体の運動を考える。万有引力定数を G として、物体の質量mは、天体の質量M に対して十分に小さいものと考えてよい。

（※この用紙は回収します。）

受験番号:　　　　　　　　　　　　　　　　氏名:

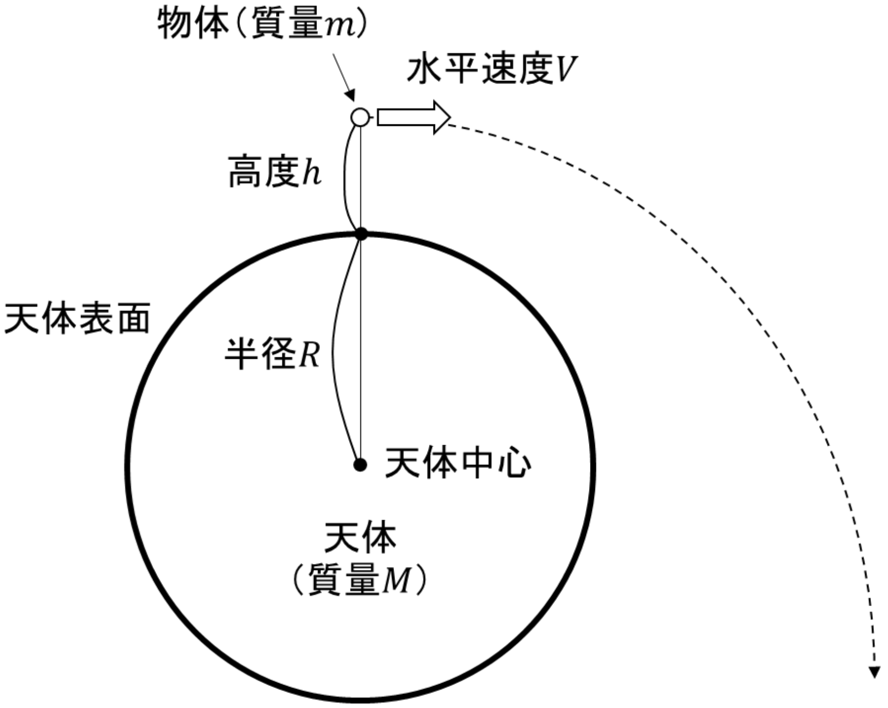

図 1-2 天体まわりの質量 m の物体の運動

(2)-① 物体が天体の表面から鉛直方向上向きにh離れた位置（以後、高度hとする）で、水平方向に速度が与えられた時に、その後、物体が高度一定で運動するための速度 V_c を求めよ。また、その物体が、最初に速度を与えられた位置まで戻ってくるまでの時間 T_c を求めよ。

(2)-② 物体が高度 h の地点から水平方向に速度が与えられた時に、物体が無限遠方まで離れていき、もとの位置に戻ってこないために必要な最小の速度 V_p を求めよ。また、その速度は、設問（2）-①で求めた速度 V_c の何倍になるかを、有効数字を 2 桁として求めよ。

(3) 図 1-2 で示す天体のまわりで、高度 h の円軌道上を、速度 V_c で運動している質量 m の物体がある。その物体を進行方向にむけて瞬間的に加速（もしくは減速）することで、加速（もしくは減速）した地点に戻ってくるまでの時間を T_c に対して K 倍（Kは１以上）にすることを考える。そのためには、物体の速度を、円軌道上の速度 V_c の何倍にすればよいか求めよ。

なお、質量 M の天体周りを周回する質量 m の物体のエネルギーは、軌道の長軸半径aを用いて、下記の式で与えられることを利用してよい。

$$E = -\frac{GmM}{2a}$$

（※この用紙は回収します。）

受験番号:　　　　　　　　　　　　　　　　氏名:

また、その物体の公転周期 T と軌道の長軸半径 a の間に下記の関係が成り立つことを利用してもよい。

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

(4)−① 図 1−2 で示す天体のまわりで、高度h の円軌道上を、速度 V_c で運動している質量 m の物体がある。この物体に瞬間的に速度を与えることで、天体表面に到達させることを考える。物体に対して、天体の中心方向に向かう速度を与えたとき、また、進行方向に対して減速させた時のそれぞれの場合で、天体表面にたどり着くために必要な最小の速度変化量を V_c 、R 、h で表せ。

(4)−② 物体がいかなる高度の円軌道にあっても、天体表面に到達するために必要となる速度変化量は、進行方向に対して減速したときのほうが、天体の中心方向に加速したときより小さいことを示せ。

(4)−③ 速度 V_c を $800\ m/s$ とし、円軌道の高度と天体の直径の比 ${}^{h}/_{R}$ が、${}^{1}/_{12}$ のときに、進行方向に減速して、天体表面に到達するために必要な減速度 $\Delta V\ (m/s)$ を、有効数字 2 桁として求めよ。

(※この用紙は回収します。)

受験番号:　　　　　　　　　　　　氏名:

問2. 図 2-1 のように z 軸上で z 軸方向を向き、強度がゆるやかに変化する磁場がある。そして、z 軸上に旋回中心をもってサイクロトロン運動を行う荷電粒子について考える。なお、荷電粒子のサイクロトロン運動の空間スケール程度では、磁場強度 B_z および $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ は一定であるとする。

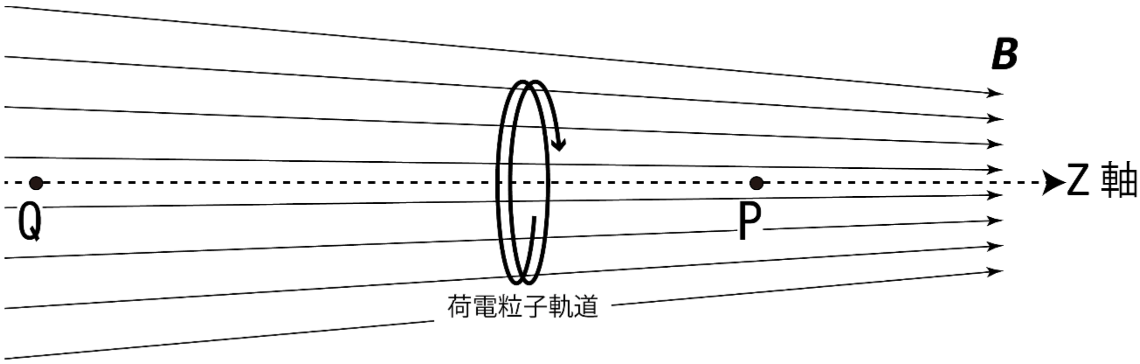

図 2-1 磁場の中でサイクロトロン運動を行う荷電粒子

(1) 荷電粒子の持っている電荷を q、質量を m、磁場垂直方向の速度を v_ϕ としたとき、荷電粒子のラーマー半径（旋回半径）R_L が

$$R_L = \frac{mv_\phi}{qB_z}$$

となることを示せ。なお、一般的に荷電粒子が静磁場 $\boldsymbol{B}$ 中を運動すると、

$$F = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

で表されるローレンツ力 F を受ける。ここで、$\boldsymbol{v}$ は荷電粒子の速度ベクトルである。

(2) 磁場の発散はゼロ ($\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$) である。図 2-2 のような z 軸を軸中心とした ΔZ が十分小さい円筒形状において、その表面全体における法線方向磁場強度の積分を考えることで、z 軸から距離 R_L だけ離れた円筒表面における z 軸に垂直方向の磁場強度 B_R が

$$B_R = -\frac{1}{2} R_L \frac{\Delta B_z}{\Delta Z}$$

となることを示せ。なお、図 2-2 において、$Z = Z_0$におけるz 軸方向の磁場強度を B_z としたとき、$Z = Z_0 + \Delta Z$ における z 軸方向の磁場強度を $B_z +$

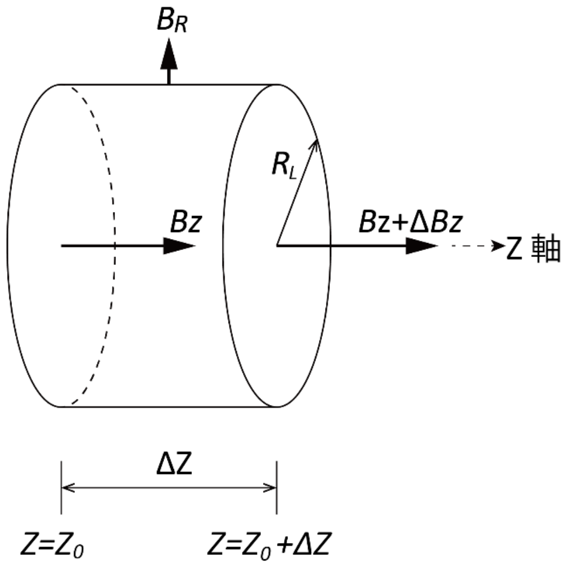

図 2-2 円筒表面における磁場

（※この用紙は回収します。）

受験番号:　　　　　　　　　　　　　　氏名:

ΔB_zとしている。また、この円筒表面においては B_R を一定値とみなすことができ、さらに B_z は Z に対し線形に変化するとみなせるものとする。

(3) 荷電粒子の旋回軌道上では 0 でない B_R が存在するため、ローレンツ力により荷電粒子に磁力線方向の力 F_z が働く。力 F_z が以下の式で表されることを示せ。

$$F_z = -\frac{mv_\phi^2}{2B_z}\frac{\Delta B_z}{\Delta Z}$$

(4) 磁場は荷電粒子に対して仕事をしないため、エネルギー保存則

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\phi^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_z^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\phi^2\right) + m\frac{dz}{dt}\frac{dv_z}{dt} = 0$$

が成立する。ここで、t は時刻、v_z は荷電粒子の z 軸方向の速度である。このため、z 軸方向の加速/減速によって旋回速度が減速/加速されることとなる。このことから、

$$\frac{mv_\phi^2}{2B_z} = \mathrm{const}$$

となることを示せ。

(5) 今 z 軸上の点 P （図 2-1 参照）に旋回中心を持つ荷電粒子の速度方向と磁場方向のなす角が 90 度であった。この荷電粒子はサイクロトロン運動をしながら、磁力線方向の力 F_z によって磁場強度が弱まる方向に移動してゆく。荷電粒子の旋回中心が点 Q に到達した時、荷電粒子の速度方向と磁場方向のなす角 α を求めよ。なお、点 P における磁場強度を B_P、点 Q における磁場強度を B_Qとする。

（※この用紙は回収します。）