受験番号：　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名：

総合研究大学院大学　物理科学研究科　宇宙科学専攻
入学選抜試験　問題
（数学）

問1-1． 2 次元平面（ここでは $x-y$ 平面 $(\boldsymbol{E}^2)$を考える）座標のある点について線形変換と平行移動を伴う変換を考える。つまり、

$$\mathrm{X} \mid \rightarrow \mathrm{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{m}$$

ここで、A：線形変換行列とし、$\boldsymbol{x}$、$\mathbf{m}$ はそれぞれ点の位置座標と平行移動量を表す列ベクトルとする。例えば、座標点 $a(a_1, a_2)$ に対して線形変換行列 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ および平行移動 $\mathrm{m}(m_1, m_2)$ を行って座標点$b(b_1, b_2)$ に変換される場合；

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

と行列表示できる。さらに、これを

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q & m_1 \\ r & s & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すことにする。列ベクトルの 3 行目の値は座標変換としては意味がないが変換行列が1つの正方行列となり、線形変換と移動を1つの行列として同時に表現でき、一次変換と同様に扱える特徴を持つ。ここで示した 3 次正方行列をA_fと呼ぶことにする。

下記(1)–(3)に記した変換を示す行列A_fを示せ。また、行列A_fが正則であることを各設問の指示にしたがって示し、逆行列A_f^{-1}を求めよ。

（1） 任意の座標点 $a(a_1, a_2)$ から x 方向に $+2$ 、y 方向に -3 移動する変換行列A_fを示せ。$Ker\ \mathrm{A}_f = \{0\}$となることで$\mathrm{A}_f$が正則であることを示せ。また逆行列$\mathrm{A}_f^{-1}$を求めよ。

（2） 任意の座標点 $a(a_1, a_2)$ に対して原点 $(0,0)$ を中心に反時計回りに角度 $\theta(rad)$ で回転させる変換行列A_fを示せ。$\det\left|\mathrm{A}_f\right| \neq 0$ となることでA_fが正則であることを示せ。また逆行列A_f^{-1}を求めよ。

（3） 任意の座標点 $a(a_1, a_2)$ に対して原点 $(0,0)$ を中心に反時計回りに角度 $\theta(rad)$ で回転させたのちに、x 方向に $+2$ 、y 方向に -3 移動する変換行列A_fを示せ。$\mathrm{rank}=3$ となることで A_f が正則であることを示せ。また逆行列A_f^{-1}を求めよ。

（※この用紙は回収します。）

受験番号:　　　　　　　　　　　　　　　氏名:

問1−2．4 角形（$\mathrm{E}(-1,-10), \mathrm{F}(-1,4), \mathrm{G}(7,-2), \mathrm{H}(7,-4)$）について重心 $\mathrm{G}(g_1, g_2)$ を中心に時計方向に $\pi/_4\,(rad)$ 回転させる変換を考える。

（1） この四角形の重心位置座標(g_1, g_2)を求めよ。ここで「重心」とはこの四角形が均質な物質であるとした時に1点で釣り合って支えることができる点のことを言う。

（2） 変換行列A_fを求めよ。なお、上記設問（1）で重心位置座標が求められた時はその座標を用い、求められなかった時はその座標を $\mathrm{G}(g_1, g_2)$ として計算してよい。

問1−3．指数関数 e^x の x（ここでは実数とする）に対して n 次正方行列に置き換えたもの e^{A} を次のように定義する。

$$e^{\mathrm{A}} = exp(\mathrm{A}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{A}^k \ (\mathrm{A} \in \mathbf{R}^{\mathrm{n}})$$

ここで、$A^0 = \mathrm{E}$ (単位行列)とする。つまり、指数関数のマクローリン展開においてxを行列 A で置き換えるということである。したがってe^Aは n 次正方行列となる。
なお、マクローリン展開とはテイラー展開の $x = 0$ で展開したもので；

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \cdots$$

指数関数e^xについては；

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots$$

となる。

（1） R を以下とするとき、$exp(\mathrm{R})$ を求めよ。求められた行列は何を意味するか説明せよ。

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} \ x \in \mathrm{R}$$

（2） 行列 G をAと同じ n 次正方行列でかつ正則とする時、以下の関係が成り立つこ

（※この用紙は回収します。）

受験番号:　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名:

とを示せ。

$$exp(\mathrm{G}^{-1}\mathrm{AG}) = G^{-1}exp(\mathrm{A})\mathrm{G}$$

（3） 行列 A を以下とするとき、$exp(\mathrm{A})$を求めよ。

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

（※この用紙は回収します。）

受験番号:　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名:

問2-1. 次の関数$f(x)$の導関数$\frac{df}{dx}$を求めよ。

（1）$f(x) = \frac{(1-4x^2)^2}{1+x^2}$

（2）$f(x) = x^3 log(x^2)$

（3）$f(x) = \frac{sin\,x}{1+tan\,x}$

（4）$f(x) = cos^{-1}(x\sqrt{1-x^2})$

問2-2. 以下の$f(x)$に対して、不定積分$\int f(x)\,dx$を求めよ。

（1）　$f(x) = (x-1)^4$

（2）　$f(x) = sin^2 x$

（3）　$f(x) = x^2 e^x$

問2-3. 次の微分方程式を解け。

（1）　$\frac{dy}{dx}$=$3x\ (y-3)^2$

（2）　$\frac{dy}{dx}$=2y+1

（3）　$\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx}$+74y=0

問2-4. 以下の関数において、

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

とする。ただし、c 、h 、k は定数とする。

（1）　$\frac{\partial \mathrm{B}(\nu,T)}{\partial \mathrm{T}}$を求めよ。

（2）　$\int_0^\infty B(\nu, T) d\nu$を求めよ。

ただし、

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx = \frac{\pi^4}{15}$$

である。

（3）$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^4}{15}$ を示せ。

（※この用紙は回収します。）

受験番号 :　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名 :

ただし、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

とする。

（ヒント）

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$$

を計算してみよ。

（※この用紙は回収します。）