

受験番号:

氏名:

総合研究大学院大学 物理科学研究科 宇宙科学専攻
入学選抜試験 問題
(数学)

問1-1.

以下の設問に回答せよ。最終回答のみでなく、導出の過程も記述すること。

(1) 次の関数を微分せよ。

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

(2) 次の関数を x, y それぞれについて偏微分せよ。

$$z = \log_x \sqrt{y^2 + 1}$$

(3) $x = \sinh(t)$ と置換することで、次の定積分を求めよ。

なお $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ である。

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

問1-2.

(1) $y = f(x)$ が区間 $[\alpha, \beta]$ で微分可能で、 $f'(x)$ が連続の時、この曲線を x 軸まわりに回転させた曲面の面積 S が以下となることを示せ。
ただし $f(x) \geq 0$ とする。

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

(2) 直線上を円が滑らずに回転する時の、円周上の定点の軌跡をサイクロイド曲線といい、円の半径を r 、回転角を θ とした時の媒介変数表示は、
 $x = r(\theta - \sin \theta), y = r(1 - \cos \theta)$
となる。この曲線の $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲を x 軸のまわりに回転した曲面の面積を求めよ。

(※この用紙は回収します。)

受験番号: _____ 氏名: _____

問 1-3.

極座標に変換して、次の 2 重積分の値を求めよ。

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$$
$$D: x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

受験番号: _____ 氏名: _____

問2-1.

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値が $1, \zeta, \zeta^2$ となることを示せ。ただし、 ζ は、

$x^2 + x + 1 = 0$ の1つの解とする。

問2-2.

巡回行列 $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}$ を単位行列 E と、問 2-1 の A および A^2 を用いて表せ。

問2-3.

ある行列 P によって、問 2-1 の行列 A は、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}$ のように対角化で

きるものとする。ただし、 ζ は問 2-1 において定義した通りであり、 P^{-1} は P の逆行列を表す。このとき、問 2-2 の行列 B の固有値を $a_1, a_2, a_3, \zeta, \zeta^2$ を使って表せ。

問2-4.

問 2-2 の行列 B の行列式を、 $|B|$ で表すものとする。 $a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ かつ

$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$ であるとき、 $|B| = 0$ を満足する実数 a_1, a_2, a_3 を全て求めよ。

問2-5.

問 2-3 の行列 P を、ユニタリ行列として具体的に計算して求めよ。ただし、ユニタリ行列 P は、 $P^\dagger P = E$ で定義される。なお、右肩の記号 $\dagger$ は、行列 P を転置して複素共役を取ることを表す。

(※この用紙は回収します。)