

受験番号: _____ 氏名: _____

総合研究大学院大学 物理科学研究科 宇宙科学専攻
入学選抜試験 問題
(数学)

問1-1

次の微分方程式について、 c を任意定数として一般解を求めよ。

ここで $y' = \frac{dy}{dx}$ である。

(1) $y' = \frac{y-1}{xy}$

(2) $x^2y' - (y^2 + xy) = 0$

(3) $y' - \frac{y}{x} = x^2$

問1-2

$u(x, t)$ について、 c を正の定数として次の偏微分方程式を考える。
このとき、以下の問いに答えよ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(1) 2つの独立関数、 $\xi = x + ct$ 、 $\eta = x - ct$ を用いて以下の式を導け。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

(2) (1)で導いた式の一般解が以下で表されることを示せ。
ここで ϕ, ψ は任意関数である。

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

(※この用紙は回収します。)

受験番号: _____ 氏名: _____

(3) (2)で示した一般解について、以下を初期条件とするとき、

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x)$$

解が以下で表されることを示せ。

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} F(y) dy$$

(※この用紙は回収します。)

受験番号: _____ 氏名: _____

問2

(1) ベクトルの一次独立、一次従属に関する以下の設問に答えよ。

(ア) 次の2つのベクトルが一次従属の場合、実数 s の値を求めよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 - 2s \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 + s \\ 12 \end{pmatrix}$$

(イ) 次の3つのベクトルは、一次独立か一次従属か、理由とともに述べよ。また、この3つのベクトルが3次元空間内の点の位置を表すとした時、3つの点はどのような位置関係にあるか、簡潔に述べよ。

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ -14 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(ア) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(イ) $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) 2次の正方行列は、一次独立な2つの固有ベクトルを持つ時に対角化できる。

設問(2)(イ)の行列 B を、

$$C = P^{-1}BP$$

と対角化する時、行列 P と対角行列 C を求めよ。

(4) 指数関数の展開式を使って、行列 D の指数関数を、次のように定義する。

$$e^D = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}$$

設問(3)の結果を用いて、設問(2)(イ)の行列 B について、 e^B を計算せよ。

(※この用紙は回収します。)