

受験番号: _____ 氏名: _____

総合研究大学院大学 物理科学研究科 宇宙科学専攻
入学選抜試験 問題
(数学)

問1-1.

n を 0 以上の整数とし、不定積分

$$I_n = \int (\ln x)^n dx \quad (1-1)$$

を考える。ただし、 $\ln x$ は自然対数であり、 $x > 0$ とする。

- (1) 部分積分を使って、 I_{n+1} と I_n の満たす漸化式を求めよ。
- (2) (1)の結果を用いて、 I_3 を計算せよ。不定積分にともなう定数項は書かなくて良い。
- (3) 次の定積分を計算せよ。ここで e は自然対数の底である。

$$\int_e^{e^2} (\ln x)^3 dx \quad (1-2)$$

問1-2.

実数 x, y, z について、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $z \geq 0$ 、とする。このとき、以下の問いに理由も含めて答えよ。

- (1) x, y の和が一定値 c のとき、積 $w = xy$ の最大値と、最大値を与える (x, y) を求めよ。
- (2) x, y, z の和が一定値 c のとき、積 $w = xyz$ の最大値と、最大値を与える (x, y, z) を求めよ。

(※この用紙は回収します。)

受験番号:

氏名:

問2. 以下の各設問に対し解答せよ。ただし、解答用紙の(a)から(l)には式を記入すること。また概略図は、解答の意図がわかる程度に、代表点などで補足・追記せよ。なお以下で j は、虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表す。

(1) 座標系のある点 P が (X, Y) で与えられたとする。これを極座標系の成分、絶対値(または距離) $|P|$ と角度 φ でそれぞれ表すと

$$X = |P| \cos \varphi$$

$$Y = |P| \sin \varphi$$

となる。これをオイラーの公式を使って複素数表示すると

$$P = |P|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |P|e^{j\varphi} \quad (2-1)$$

ここで、この点 P の回転操作を考える。この点 P を原点 O の周りに角度 θ だけ正方向に回転させた点 P' の座標値 (X', Y') を求める。すなわち、(2-1)式の φ に $\varphi + \theta$ を代入して

$$P' = |P|e^{j(\varphi+\theta)} = |P|\{\cos(\varphi + \theta) + j \sin(\varphi + \theta)\}$$

を得る。これから $\sin \varphi, \cos \varphi, \sin \theta, \cos \theta$ と $|P|$ を用いて

$$X' = |P|\{\cos \varphi \cos \theta - \boxed{(a)}\}$$

$$Y' = |P|\{\boxed{(b)} + \boxed{(c)}\}$$

(2) 複素平面において、 z_L と Γ を次のように定義する。ただし、 r, x, u, v は実数、 θ は角度パラメータ(単位:ラジアン)である。

$$z_L = r + jx \quad (2-2a)$$

$$\Gamma = u + jv = |\Gamma|e^{j\theta} \quad (2-2b)$$

すなわち(2-2b)式は、 u - v 座標系では、原点を中心とし、 $|\Gamma|$ を半径とする円(解答用紙 問2 の図 2-0 を参照)を描く。ここでは、さらに u - v 座標系での平行移動を加える。そこで z_L と Γ には以下の関係を設定し、 r - x 座標系と u - v 座標系間の変換式を与えるものとする。

$$z_L = 1 + A\Gamma \quad (2-3a)$$

$$A = |A|e^{j\varphi} \quad (2-3b)$$

(2-2)式を(2-3)式に代入し、それぞれ u, v の関数として示すと

$$r + jx = r(u, v) + jx(u, v) = 1 + |A||\Gamma|e^{j(\varphi+\theta)} = \boxed{(d)} + j\boxed{(e)} \quad (2-4)$$

を得る。この変換は、平行移動、相似拡大および回転変換の合成により複素平面上の円を円に移す(円円対応)。

(※この用紙は回収します。)

受験番号:

氏名:

(3) 前問の円円対応を踏まえ、次にこれに反転変換を加えた一次分数変換を検討する。ここでは次の z_L と Γ は、前問の(2-2)式で定義されるものとし、 z_L と Γ の間には新たに以下の関係を設定する。すなわち、 r - x 座標系と u - v 座標系間の変換式を与えるものとする。

$$z_L = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \quad (2-5)$$

(2-2)式を(2-5)式に代入し、それぞれ u, v の関数として示すと

$$r + jx = r(u, v) + jx(u, v) = \boxed{(f)} + j\boxed{(g)} \quad (2-6)$$

この(2-6)式の実部より r をパラメータとした u - v 座標系では次式のような円の式が得られる。

$$\left(\boxed{(h)}\right)^2 + v^2 = \left(\boxed{(i)}\right)^2 \quad (2-7)$$

$r=0.5, 1.0, 2.0$ の場合の円の中心座標及び半径を解答欄に記せ。またそれらの概略図を解答欄の図 2-1 に示せ。 $r=0$ の場合、(2-7)式は u - v 座標系の原点を中心とした半径 1 の円であり、これは(2-2b)式より任意の実数 u, v (すなわち角度パラメータ θ) に対して $|\Gamma| = 1$ となる。

(2-7)式の導出と同様に、(2-6)式の虚部より x をパラメータとした u - v 座標系における円の式が得られる。(2-7)式と同じ形式で示すと

$$(u-1)^2 + \left(\boxed{(k)}\right)^2 = \left(\boxed{(l)}\right)^2 \quad (2-8)$$

これをもとに、 $x = \pm 1.0, \pm 2.0$ の場合の円の中心座標及び半径を解答欄に記せ。またそれらの概略図を解答欄の図 2-2 に $-1 < u < 1, -1 < v < 1$ の範囲で図示せよ。ただし、 $x=0$ は、 u - v 座標系では $v=0$ (u 軸)である。

(4) 図 2-0、図 2-1、および、図 2-2 は、 u - v 座標系で各パラメータの値で異なる 1 つのグラフの曲線群である。このことを念頭に $u > 0, v > 0$ の条件下で、 $|\Gamma| = 0.5$ で $r=1$ のとき、図 2-0、図 2-1、図 2-2 を用いて x を求めるための方法を、簡単に説明せよ。

(※この用紙は回収します。)

受験番号:

氏名:

総合研究大学院大学 物理科学研究科 宇宙科学専攻
入学選抜試験 問題
(物理)

問1. 図1のように、質量 M の剛体を重心 G から d だけ離れた位置 O を支点とし、剛体振り子として鉛直面内を振動させる。次の問に答えよ。ただし、重力加速度を g 、支点 O のまわりの剛体の慣性モーメントを I とする。

- (1) 支点 O まわりの剛体の回転運動を記述する運動方程式を考えたい。鉛直方向に対して OG がなす角が θ のとき、重力による支点 O まわりのモーメントを書け。
- (2) 支点 O まわりの剛体の回転運動を記述する運動方程式を書け。
- (3) この振動が微小振動のとき、この運動方程式を解き、その周期 T を求めよ。
- (4) 長さの次元をもつ k を用いて、剛体の重心 G を通る軸のまわりの慣性モーメントを Mk^2 と書くことにした場合、 I を d , k , M を用いて表せ。

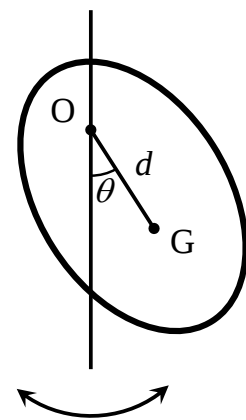


図1

- (5) d を変化させると周期 T も変わる。 d を横軸、 T を縦軸にして、グラフを描き、周期を最小にする d とそのときの周期 $T_{\min}$ を求めよ。
- (6) 十分に細い棒と十分に薄い円板があり、それぞれを剛体振り子として振動させることを考える。これらの支点を調整してそれぞれ周期が最小になる位置で振動させた場合、周期が短いのはどちらか、説明せよ。ただし、棒の長さと円板の直径は等しく、それぞれの質量も等しいとする。

(※この用紙は回収します。)

受験番号:

氏名:

問2. 真空中に孤立した小さな導体球(半径: a 、質量: m)がある。以下の設問に答えよ。なお、以下の設問においては SI 単位系を使用し、真空の誘電率を ϵ_0 、重力加速度を g とする。

問2-1.

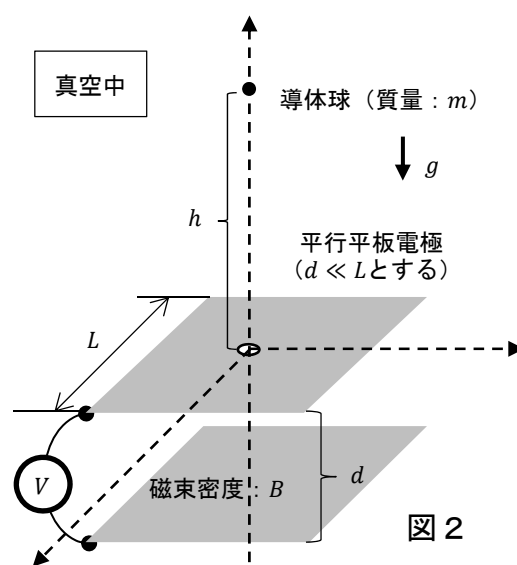
- (1) この球に、無限遠から電荷 Q (> 0)を運んできて帯電させるのに必要なエネルギー(U)を求めよ。ただし、導体球ははじめ帯電していなかったものとする。
- (2) 帯電した導体球の内部には電荷が存在しない。この理由を簡潔に説明せよ。
- (3) 仮に、この帯電した導体球の周囲を気体(誘電率: ϵ)で充たしたとき、静電エネルギーはどう変化するか。また、静電エネルギーの変化分は何に使われたか簡潔に示せ。

問2-2.

電荷 Q を与えたこの導体球を、水平に設置した平行平板電極(一辺の長さが L の正方形で、電極間の距離が d ($\ll L$))の上面電極から高さ h のところに静止させた(図2)。そこから自由落下させ、平行平板電極の上面に設けた小さな穴から平行平板内に入射させる。平行平板電極には任意の電位差 V を与えることができる。また、電極間の空間には一様かつ一定の強さの磁場(磁束密度: B)を電極板と平行に発生させることができ、そのオン・オフ制御を任意のタイミングで行うことができるものとする。なお、上面電極の穴にはセンサーが設けられており、導体球が穴を通過したタイミングを知ることができる仕組みになっている。

上面電極に設けた小さな穴の存在は、自由落下および平行平板電極中の電場に影響を与えないものとして、以下の設問に答えよ。

- (1) 導体球が平行平板電極上面の穴に入射する際の速度 v_0 はいくらか。
- (2) 平行平板内で重力の影響をキャンセルするためには、平行平板にどのような電位差 V を与える必要があるか。



(※この用紙は回収します。)

受験番号:

氏名:

- (3) 平行平板電極に入射した導体球を磁場により水平方向に取り出したい。導体球が下面電極にぶつからないために必要な平行平板電極間の磁束密度 B の最小値を求めよ。ただし、電位差 V の印加により平行平板内では重力の影響はキャンセルされているものとする。
- (4) 実際に導体球を水平方向に取り出すためには、平行平板電極内の磁場をどのようにオン・オフ制御すればよいか。導体球が穴を通過したときからの経過時間を基準に示せ。ただし、電位差 V の印加により平行平板内では重力の影響はキャンセルされているものとする。
- (5) 仮に、導体球の質量が想定していた質量 m から δm ずれていた、あるいは与えた電荷が想定していた電荷量 Q から δQ だけずれていたとする。上記(4)で質量 m および電荷量 Q の導体球に対して設定した電位差 V と磁束密度 B の値そしてオン・オフ制御のタイミングを変えないという条件のもとで、質量が δm 、あるいは電荷量が δQ ずれた導体球の飛跡はどのように変化するか示せ。