修士論文
撮像型X線TESマイクロカロリメーターのデジタル信号処理

東京大学 理学系研究科 物理学専攻
山崎研究室

萩原 利士成

2007/1/5

Abstract

X 線マイクロカロリメータとは、1 つ 1 つの X 線光子が入射した際の素子の温度上昇から入射 X 線のエネルギーを求める検出器であり、~ 100 mK の極低温で使用することにより高いエネルギー分解能と高い検出効率を両立する検出器である。X 線マイクロカロリメータでは、X 線入射時の温度上昇を読みとる温度計の感度が大きいほど高いエネルギー分解能が得られる。そこで注目されるのが、超伝導薄膜の超伝導–常伝導遷移にともなうの急激な抵抗変化を利用した超伝導遷移端温度計 (TES: Transition Edge Sensor) である。TES を温度計として用いたものを超伝導遷移端 (TES 型) X 線マイクロカロリメータと呼ぶ。

TES マイクロカロリメータは原理的に高い分解能を有するが、その潜在能力を引き出すためには最適フィルター処理と呼ばれるデジタルフィルタリング処理が必要となる。我々のグループでも TES マイクロカロリメータ信号に対して最適フィルター処理を行なっているが、分解能を向上させるためにサンプリングレートや ADC の分解能といったパラメータにどのような制限を加える必要があるのか明確な指針がなかった。そのため、シミュレーションを行ないこれらのパラメータに制限を加えた。また、最適フィルター処理の原理となっている波形の相似が破れた時、分解能がどのように劣化するのか、またいかなる処理をすれば分解能の劣化を防げるのかについて考察を試みた。

マイクロカロリメータはその高いエネルギー分解能から、核施設の査察などといった地上応用が進んでいる。我々のグループでも企業と共同して透過型電子顕微鏡用の X 線分光器として TES マイクロカロリメータシステムの開発を行なっており、ADC から先のデジタル処理系を担当している。今回、このデジタル処理系に次世代衛星用通信規格 SpaceWire の実証試験用に作成された SpaceCube 及び SpaceWireIO ボードを使う事となった。SpaceCube はリアルタイム処理にすぐれた Tron 型のカーネルを搭載し、SpaceWire 用の通信ポートを備えた一辺およそ 5cm の小型コンピュータである。SpaceWireIO ボードはさまざまな入出力端子を備えており、搭載されている FPGA に回路を作成することにより、データの収集や処理を行なう事ができるほか、SpaceWire 通信用の FPGA を搭載している。

私が担当したのは SpaceCube 内での最適フィルター処理を筆頭とした処理プログラムの移植、及び開発と、SpWIO ボードに搭載された FPGA(UserFPGA) 内のロジックの設計である。今回のシステムは実験室系とくらべて、カウントレートが大きいこと、リアルタイム処理を行なう必要があることから、ダブルパルスやトリプルパルスに対する処理プログラムの開発と処理時間の見積りを行なった。UserFPGA では波形信号の選別と取得をおこなう。高カウントレートの要請から、波形取得後、イベントデータを保管場所 (SDRAM) に送る前に次のトリガが立つ可能性があり、また純粋にダブルパルスのレートが増加する。そのため、イベントデータを保持するイベントバッファは一つのチャンネルに対して複数用意する必要があるが、UserFPGA 内でとれるバッファの大きさには制限があるため、共有バッファとした。また、ダブルパルスに対して確実にトリガをかけるために、タイムスケールにより 1 階微分と 2 階微分に分かれるトリガロジックを開発した。

設計と並行してこれらのロジックの試験を行なうための試験処理系を構築し、これらのロジックが有効に働く事を確認した。個々のロジックの確認だけでなく、最適フィルター処理まで含めた全体を通しての試験をすることが今後の課題である。

目 次

第 1 章　X 線天文学と分光観測

1.1　X 線分光による宇宙の進化の解明

天体物理学は様々な天体の起源と進化を物理法則を使って明らかにする天文学、物理学の一分野である。20 世紀に入って人類は、宇宙は決して定常的なものではなく、およそ 150 億年前にビッグバン (big bang) と呼ばれる大爆発によって始まったこと、その後も進化を続け、現在の複雑な階層構造を持った宇宙に至っていることを知るようになった。それではビッグバンの後、いつ頃、どのようにして星が生まれ、銀河が形成され、銀河団のような巨大な構造が作られたのだろうか? 宇宙は今後どのようになっていくのだろうか?

恒星は人の一生と同じように、ライフサイクルを持っている。すなわち星間物質の重力収縮によって原始星が生まれ、原始星がさらに重力収縮を続けることでやがて中心部で核融合反応が起こり、主系列星となる。核融合反応のための燃料を使い果たすと、あるものは周辺部が惑星状星雲として星間空間に還元されて白色矮星が残り、あるものは超新星爆発を起こして自分自身を吹き飛ばし、中性子星やブラックホールを残す。銀河とは恒星の集まりであり、無数の恒星が、あるいは独立に、あるいは影響しあってサイクルを繰り返している。長期的に見ると、恒星によって作られた重元素を含んだ星間物質 (ISM; Interstellar medium) が、銀河風 (galactic wind) という形で銀河系外に放出される。銀河はさらに銀河団という集団を形成している。銀河団の重力ポテンシャルは実は電磁波では見ることのできない暗黒物質 (dark matter) によって作られており、銀河はそのポテンシャルに束縛されている。また、銀河団内の空間は銀河団の重力ポテンシャルに束縛された 1 億度程度の高温ガスで満たされており、その高温ガスの質量は個々の銀河の質量和よりも大きい。このような高温ガス内にも重元素が存在しており、個々の恒星で作られ銀河風として放出された星間物質が大きく寄与している。銀河団同士もまた衝突合体を繰り返しており、より大きな銀河団へと成長している。ビッグバン直後の宇宙は極めて一様であり、現在の宇宙に見られるような構造は、その後の進化の過程で互いに密接に関係しながら作られたものである。したがって、宇宙の進化を理解するためには、各種の天体の進化とお互いの関連を観測的に見極めていくことが重要である。

近年になって観測技術が飛躍的に進歩し、光・赤外線では、地球大気の影響を受けないハッブル宇宙望遠鏡 (Hubble Space Telescope) や、すばる望遠鏡をはじめとする 8 – 10m クラスの望遠鏡が、電波では「はるか」衛星を使ったスペース VLBI が実現され、人類はこれらの諸問題に対して観測的な解答を得はじめようとしている。X 線においても、1999 年に NASA の Chandra 衛星、2000 年には ESA の XMM-Newton 衛星が軌道に投入され、結像性能や有効面積において過去の衛星をはるかに上回る性能を達成している。さらに、2005 年には日本のすざく衛星が軌道に投入され、成果を上げ始めている。

X 線は高エネルギー電子によるシンクロトロン放射や逆コンプトン散乱によって、あるいは高温物質からの熱制動放射や黒体放射によって生み出される。したがって、宇宙における高エネルギー現象をとらえるのにもっとも適した電磁波である。また、エネルギー 100 eV から 10 keV の間には、炭素、窒素、酸素、ネオン、マグネシウム、シリコン、イオウ、アルゴン、カルシウム、鉄等の、宇宙に存在する主要な重元素の K 輝線、K 吸収端が存在することから、これらの重元素の量や物理状態を知る上でも X 線による観測が有効である。さらに、これらの輝線のエネルギーシフト、あるいは幅は、これらの元素を含むガスの運動状態を知る上で有効である。したがって、X 線による分光観測は宇宙の進化を解明する上での重要な手段の一つであるといえる。

1.2 次世代の X 線分光器に要求される性能

次に、次世代検出器に必要なエネルギー分解能と撮像能力について考える。たとえば銀河団の高温ガスの熱運動の速度は数 100 km/s から 1000 km/s である。乱流や銀河団の合体による高温ガスの内部運動の速度も同程度であると考えられ、これらの内部構造を知るためには 100 km/s の速度が分離できるエネルギー分解能が必要十分である。また、精密なプラズマ診断を行なうためには、各輝線の微細構造を十分に分離できる分解能が必要である。微細構造が分離できないと、プラズマの状態によって輝線構造の中心エネルギーが変わってしまうため、統計に関わらずエネルギーの決定精度が制限されてしまうからである。したがって微細構造の分離は不可欠である。

宇宙にもっとも多く存在する元素の 1 つで、X 線分光でもっとも興味のある元素の一つである鉄の Kα 線について考える。ヘリウム様に電離された鉄の Kα 線のエネルギーは 6.7 keV であるが、この鉄イオンが一階励起された状態は LS カップリングによって、1s2s ^{1}S$_0$、1s2s ^{3}S$_1$、1s2p ^{1}P$_1$、1s2p ^{3}P の 4 つの状態に分裂する。このうち 1s2p ^{1}P$_1$ $\rightarrow$ 1s^2 ^{1}S$_0$ は双極子遷移によって 6698 eV の共鳴 X 線を放射する。一方、1s2s ^{3}S$_1$ $\rightarrow$ 1s^2 ^{1}S$_0$ と 1s2p ^{3}P $\rightarrow$ 1s^2 ^{1}S$_0$ は双極子遷移が禁止されており、プラズマの物理状態によって 6637 eV の禁制線と 6673 eV の intercombination 線として観測される。このような輝線の強度比は放射過程により決まる。さらに、これらの輝線の近くにはリチウム様イオンやベリリウム様イオンから出る衛星線が現れる。したがってこれらの微細構造を分離するためには、ΔE <10 eV のエネルギー分解能が必要である。X 線 CCD カメラなどの半導体検出器では原理的にこれよりも 1 桁以上悪く、この条件を満たせない。図 1.1 は、温度 kT=2 keV の光学的に薄いプラズマから放射される 6.7 keV の鉄輝線を、エネルギー分解能が 120 eV、10 eV、2 eV の検出器で観測した場合に得られるスペクトル (シミュレーション) である。エネルギー分解能が 120 eV の検出器 (X 線 CCD カメラ) では、微細構造を分離できていない。それに対して、分解能 10 eV の検出器では共鳴線を分離でき、さらに 2 eV の検出器では複雑な微細構造をしっかり分離できているのがわかる。

100 km s^{-1} の運動によって起こるドップラーシフトは、6.7 keV の鉄輝線に対して 2.2 eV である。これは運動の状態によって、エネルギーのシフトもしくは輝線の広がりとして検出される。したがって、天体の運動を正確に知るためには、エネルギー分解能 $\sim$ 数 eV が必要となる。

また、各天体のダイナミクスを理解するには撮像が重要な役割を果たす。撮像能力としては、角度分解能 30 秒程度、視野 10'×10' 程度が望まれる。そこで 1 ピクセルの大きさを $20'' \times 20''$ とし、受光面積を $10' \times 10'$ とすると、必要なピクセル数は 30×30 と計算される。望遠鏡の焦点距離を 8 m とすると、1 ピクセルの大きさは 0.78 mm $\times$ 0.78 mm、全体では 23 mm $\times$ 23 mm になり、CCD チップ 1 枚分に相当する。角度分解能としては X 線 CCD カメラより 1/30 程度悪いが、撮像検出器として CCD カメラを併用することを考えれば妥当な大きさである。

まとめると、次世代 X 線検出器に求められる性能は、6 keV の X 線に対して 1–2 eV (FWHM) のエネルギー分解能 ($E/\Delta E$ ~3000-6000) を有し、30× 30 ピクセルで 2 cm× 2 cm 程度の面積をカバーすることである。

1.2.1 回折格子

回折格子 (grating) は、X 線領域で数 eV の分解能を達成する方法としてもっとも一般的である。例えば、Chandra 衛星には transmission grating (LETG、HETG) が、XMM-Newton 衛星には reflection grating (RGS) が搭載されている。これらの回折格子は $E < 1$ keV のエネルギーで $E/\Delta E \sim 500$ のエネルギー分解能を実現している。

しかし、回折格子を用いた分散型分光器は非分散型分光器に比べていくつかの点で劣る。まず、分散型分光器は波長の情報を位置情報として読み出すため、高いエネルギー分解能は点源の場合にしか得ることができない。X 線天体には銀河団の高温ガスをはじめ広がったものも多く、これらの天体の運動を解析する

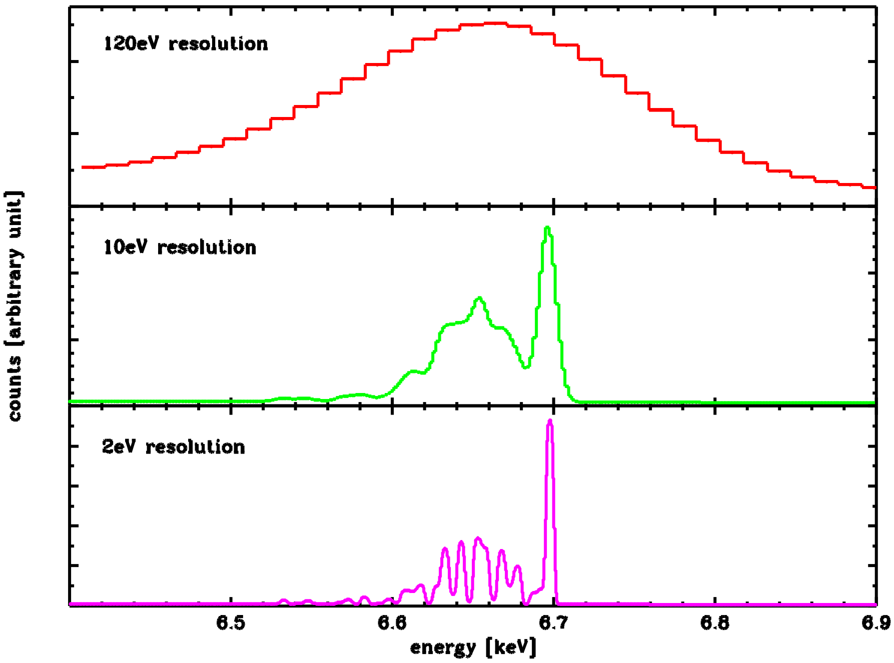


図 1.1: 温度 kT =2 keV の光学的に薄いプラズマから放射される 6.7 keV の鉄輝線を、エネルギー分解能が 120 eV、10 eV、2 eV の検出器で観測した場合に得られるスペクトル (シミュレーション)

には回折格子は不適当である。次に、grating の分散角は入射 X 線の波長に比例するため、波長の短い、すなわちエネルギーの高い X 線に対してはエネルギー分解能が悪いことである。図 1.2 左に、エネルギーに対するエネルギー分解能を示した。Chandra 衛星と XMM-Newton 衛星に搭載されている grating 分光器は、1 keV 以下では非常に高いエネルギー分解能を持つが、2 keV 以上では急激にエネルギー分解能が悪くなっていることがわかる。6 keV 付近の鉄の Kα 線に対しては十分なエネルギー分解能ではない。もう一つの欠点は検出効率が低いことである。grating 分光器では分散された光だけがエネルギー情報を持つため、非分散型分光器に比べて非常に検出効率が低くなる。図 1.2 右は、Chandra 衛星と XMM-Newton 衛星の grating 分光器の有効面積をエネルギーに対してプロットしたものである。XMM-Newton 衛星は大きな X 線望遠鏡を搭載しているが、望遠鏡と grating 分光器とを合わせた有効面積は 100 cm^2 程度しかない。以上のことから、grating 分光器で観測できる天体は軟 X 線で明るい点源に限られ、広がった天体や硬 X 線の分光には適していない。

1.2.2 X 線マイクロカロリメータ

半導体検出器はエネルギー分解能の点で性能不足であり、分散型分光器は広がった天体の観測には向かず、また低いエネルギー領域でしか十分なエネルギー分解能を達成できない。現時点では、鉄の Kα 線領域に対して十分なエネルギー分解能を持つ検出器は、X 線マイクロカロリメータをおいて他に存在しない。X 線マイクロカロリメータは、入射エネルギーを素子の温度上昇として測る検出器であり、極低温 ($\sim$100 mK) において高いエネルギー分解能を達成できる (第 2 章)。

2005 年 7 月 10 日に軌道上に投入されたすざく衛星に搭載されていた X 線マイクロカロリメータ XRS は、6×6 のピクセルで 3.8 mm×3.8 mm (視野 $2.9' \times 2.9'$) の面積を持ち、個々のピクセルの大きさは 0.6 mm×0.6 mm、エネルギー分解能は地上試験で平均 6 eV (FWHM)、軌道上にて鉄線源に対し 7eV を達成し、カロリメータ技術の軌道上での有効性を実証した。図 1.2 には、すざく XRS と X 線 CCD カメラ XIS のエネルギー分解能と有効面積も示してある。2 keV 以上のエネルギー帯で、XRS はエネルギー分解

能と有効面積のどちらも他の検出器と比べて高い性能を持っていることがわかる。さらに、XRS は適度な撮像能力も持っている。このように、XRS は X 線天文学において新たな時代を切り開くことが期待されていた。しかし、軌道上での液体ヘリウムの喪失により、XRS が天体からの X 線を観測する事はなかった。X 線マイクロカロリメータによる精密分光は未だ実現されていない。

上で述べた次世代 X 線検出器は、エネルギー分解能で XRS よりも数倍良く、ピクセル数は 2 桁近く多い。エネルギー分解能のさらなる改善には、XRS で用いた半導体温度計の代わりに超伝導遷移端を利用した温度計 (TES) を用いた新しいマイクロカロリメータが提案されている (???, たとえば)。TES 型マイクロカロリメータの読み出し系として超伝導量子干渉素子 (SQUID) を用いれば、読み出し系のノイズを抑えることができる。すでに、5.9 keV の X 線に対して 3 eV (FWHM) 程度のエネルギー分解能が報告されている。

このように、エネルギー分解能については要求される性能を達成しつつある。一方、1000 ピクセルの読み出し系はまだ開発段階である。XRS では 32 ピクセルを独立に読み出していたが、これと同じように 1000 ピクセルを独立に読み出すのは配線による熱流入の影響などを考えると現実的でない。何らかのマルチプレクスを行うことによって、配線数を減らすことが必須である。既にいくつかの方法が提案されているがいずれも確立されるには至っていない。

1.3 次世代衛星用通信規格

衛星開発においては各検出器の開発だけでなく、それらと衛星内の各部分及び地上とを結ぶ通信系統の開発が重要課題となる。なぜなら、一度軌道に投入された衛星の各機器を直接点検し情報を得ることは不可能であり、各装置自体の情報だけでなく、観測データや姿勢データ等を地上から得るには、衛星内のネットワークを介する他ないからである。たとえ全ての観測装置が生きていても、通信系統に致命的なダメージを負った衛星から得られるものはほとんど無い。

従来は各衛星ごとに通信系統を独自最適化していた。しかしこの方法では開発経験が蓄積されず、また経費、時間がかかるという問題点がある。そこで、通信の統一規格を作成し各部分をモジュール化することによって、作業の効率化を計るという次世代衛星用のアーキテクチャが提唱されている。SpaceWire はその中で最も有力視されている通信規格であり、ルーティング機能を持つネットワークプロトコルに、接続された機器のローカルバスにアクセスするための仕組み（リモートメモリアクセス）をとりこんでいる。2006 年 12 月現在、既に SpaceWire 規格用の通信モジュールを搭載した SpaceCube、SpaceWireIO ボードといった製品が作られており SpaceWire の実証試験が始まっている。

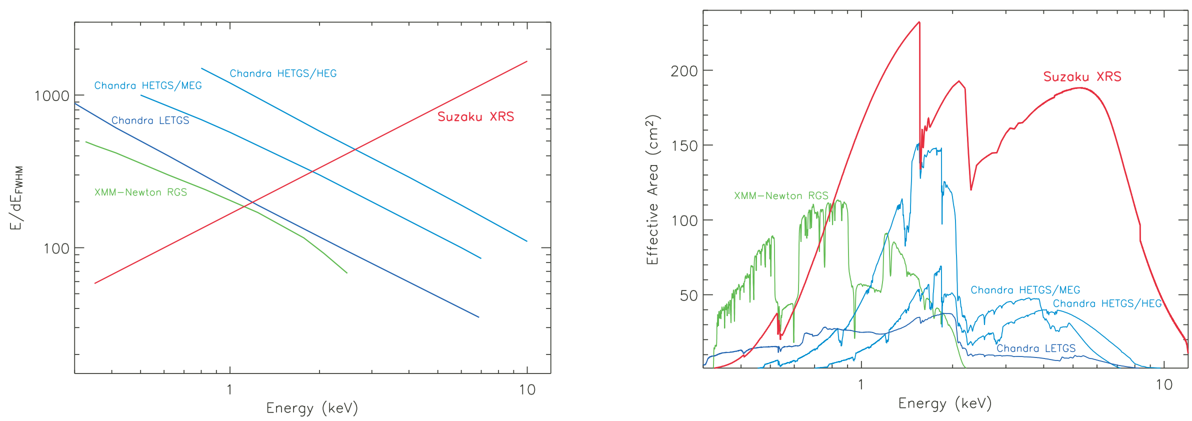


図 1.2: X 線分光器の性能比較。左: エネルギー分解能のエネルギー依存性 右: 有効面積のエネルギー依存性

1.4 本修士論文の目的

近年、マイクロカロリメータはその高いエネルギー分解能と高エネルギー帯域から、天文観測だけでなくプラズマの状態診断や原子炉内の核反応状態を直接観察するといった地上応用への可能性が提唱されている。現在、我々のグループと SII(Seiko Instruments Inc.) は透過型電子顕微鏡において、電子と被検査物質との衝突励起によって発生する特性 X 線を TES マイクロカロリメータによって検出する TEM 用 TES マイクロカロリメータシステムの研究を進めている。我々は、この TEM 用 TES マイクロカロリメータの処理系として、リアルタイム処理能力が高い Tron 型カーネルを搭載した SpaceCube を用い、TEM への応用と同時に次世代規格に対応した TES カロリメータ信号処理系の確立へ一歩を踏み出した。本研究では、TES カロリメータパルスのデジタル信号処理において最も重要である最適フィルター処理についてシミュレーションにより検討を行ない、実際のパルス波形に適用する上での問題点を考察した。また、TEM 用 TES マイクロカロリメータの処理系を構築するために FPGA 内の波形取得ロジックを開発し VHDL を作成した。そして、SpaceCube にデータ処理プログラムを移植することによりシミュレーション試験環境を整え、TEM 用 TES マイクロカロリメータの処理系に向けての試験処理系を実際に構築しその性能を評価した。本論文ではこれらの研究成果をまとめる。

第2章　X線マイクロカロリメータの動作原理

2.1　X線マイクロカロリメータとは

X線マイクロカロリメータは、入射したX線光子1個1個のエネルギーを、素子の温度上昇により測定する検出器である。そのため、極低温 (~ 0.1 K) で高いエネルギー分解能を達成することができる。

X線マイクロカロリメータは、図2.1に示すような吸収体、ピクセル、温度計、サーマルリンク、熱浴から成る。吸収体に入射したX線光子は光電効果によって吸収され、そのエネルギーが熱に変わる。入射エネルギー E に対する素子の温度変化は、カロリメータピクセルの熱容量を C として、

$$\Delta T = \frac{E}{C} \tag{2.1}$$

と書ける。この微小な温度変化を、温度計の抵抗値の変化として測定する。カロリメータピクセルは、熱浴と弱いサーマルリンクによってつながっているため、吸収体で生じた熱はサーマルリンクを通して熱浴に逃げて行き、ゆっくりと元の定常状態に戻る。これは、

$$C\frac{d\Delta T}{dt} = -G\Delta T \tag{2.2}$$

のように表される。ただし、G はサーマルリンクの熱伝導度である。したがって、素子の温度上昇は時定数

$$\tau_0 = \frac{C}{G} \tag{2.3}$$

で指数関数的に減衰していく。

X線マイクロカロリメータのエネルギー分解能は素子の熱揺らぎによって制限される。カロリメータピクセル中のフォノン数は $N \sim CT/k_{\mathrm{B}}T = C/k_{\mathrm{B}}$ と書けるので、素子の熱揺らぎは、

$$\Delta U \sim \sqrt{N}k_{\mathrm{B}}T = \sqrt{k_{\mathrm{B}}T^2C}. \tag{2.4}$$

となる。§ **??**で導くように、より一般的には、X線マイクロカロリメータのintrinsicなエネルギー分解能は、

$$\Delta E_{\mathrm{FWHM}} = 2.35\xi\sqrt{k_{\mathrm{B}}T^2C} \tag{2.5}$$

と書ける (Moseley et al. 1984)。ただし、ξ は温度計の感度や動作条件などによって決まるパラメータである。付録 **??**に示したように、熱容量は電子比熱により決定される場合 T の依存性を、格子比熱により決定される場合 T^3 の依存性を持つ。熱容量の温度依存性を考慮すると、エネルギー分解能は温度に強く依存し、極低温 (~ 0.1 K) で非常に高いエネルギー分解能が達成されることがわかる。

2.1.1　吸収体

X線光子は光電効果によって吸収体に吸収される。エネルギー分解能を向上させるには、式 (2.5) からわかるように熱容量 C を小さく、つまり、吸収体を小さくすればよい。一方、検出効率を高くするためには、吸収体は大きい方がよい。吸収体の大きさはこれらのトレードオフで決まる。

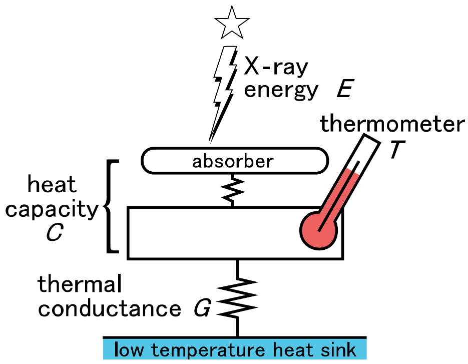


図 2.1: X 線マイクロカロリメータの構造

これとは別に、吸収体を選ぶ際に考慮しなければならない性質として、熱化 (thermalization)、熱拡散 (diffusion) の速さがある。熱化、熱拡散が遅いと熱が逃げてしまい、エネルギー分解能が悪くなる。また、吸収位置により熱化、熱拡散過程がばらついてしまうと、イベントごとの波形のばらつきが生じ、S/N 比とは別にエネルギー分解能を悪化させてしまう。熱化、熱拡散過程を一様にするには、TES にエネルギーが移動する前に吸収体内で熱化、熱拡散が一様に起こる必要がある。そのためには、やはり吸収体内での熱化、熱拡散が速いことが重要となる。

このように、吸収体として用いる物質は高い吸収効率、小さい熱容量、熱化、熱拡散の速さ、という条件を同時に満たすものが適している。以下に物質の種類に応じた特徴をあげる。

- 絶縁体と半導体
  一般的に、絶縁体と半導体は、バンドギャップの不純物準位に電子が捕捉されて準安定な状態を作ってしまう。そのため、熱化が不完全であったり、ばらつくことが多い。

- 常伝導金属
  常伝導金属は X 線のエネルギーは伝導電子の電子–電子相互作用によって熱化されるため、熱化が非常に速く、経験的に ns のオーダーである。また、熱拡散も伝導電子が担うため、非常に早い。そのため、熱化、熱拡散という点においては有利である。しかし、電子比熱が大きいために高いエネルギー分解能を得るには吸収体のサイズは限られる。

- 超伝導体
  超伝導体は超伝導遷移温度よりも十分低温では電子比熱が指数関数的に小さくなる。そこで、原子番号の大きくデバイ温度が高い超伝導体を用いれば、比熱を抑えつつ高い検出効率を達成できる。しかし、超伝導遷移温度よりも十分な低温では準粒子の寿命が長くなり、一般的には熱化が非常に遅くなる。準粒子の寿命は格子の一様性に依存すると言われている。

- 半金属
  ビスマスなどの半金属は、電子比熱が小さいため熱容量を抑えつつ吸収体のサイズを大きくすることができる。一方、熱化が比較的速いことも知られている。

これらの特徴を考慮して、吸収体としてはスズ、金、銅 (金属)、ビスマス (半金属)、水銀テルル (ギャップエネルギーの小さい化合物半導体) などが用いられている。

2.1.2 温度計

温度計は、半導体や金属の抵抗値が温度に依存して変化することを利用したものである。温度計の感度 α (無次元) を、

$$\alpha \equiv \frac{d\ln R}{d\ln T} = \frac{T}{R}\frac{dR}{dT} \tag{2.6}$$

と定義する。ただし、T は温度計の温度、R はその抵抗値である。

温度計の感度 α を大きくすれば、カロリメータのエネルギー分解能を改善することができる。半導体温度計を用いた XRS では $|\alpha| \sim 6$ であるが、次に述べる超伝導遷移端を利用した温度計 TES を用いれば、感度 α を非常に大きくすることができる。

2.2 トランジションエッジセンサ TES

トランジションエッジセンサ (Transition Edge Sensor) とは、超伝導–常伝導遷移端の急激な抵抗変化を利用した温度計である。超伝導遷移は典型的には数 mK という非常に狭い温度範囲で起こり (図 2.2)、式 (2.6) で定義される温度計の感度 α は 1000 にも達する。そのため、TES を用いたカロリメータは、従来の半導体温度計のカロリメータに比べて原理的には 1 桁以上もエネルギー分解能を改善することが可能である。それゆえに、TES カロリメータでは吸収体の熱容量の大きさに対するマージンが大きくなり、熱化の速い常伝導金属を使用したり、大きな吸収体を用いて受光面積を増やすといったことも可能になる。

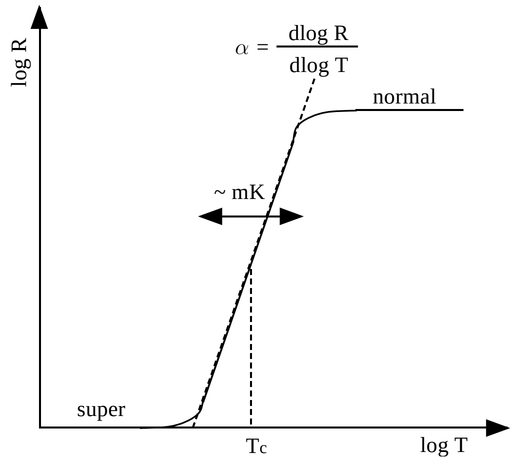


図 2.2: 超伝導遷移端

TES を用いる場合、カロリメータの動作温度は TES の遷移温度に保たなければならない。そのため、動作温度は TES の遷移温度によって決まってしまう。しかし、TES を二層薄膜にすることで近接効果 (proximity effect) によって臨界温度をコントロールすることが可能である。近接効果とは、超伝導体に常伝導体を接触させるとクーパー対が常伝導体に漏れ出し、膜厚の比に依存して超伝導体の臨界温度が下がる効果である。

2.3 電熱フィードバック (ETF: Electro-thermal feedback)

TES は温度計として非常に高い感度を持っているが、感度を持つ温度域が非常に狭い ($\sim$ mK) ため、動作点を吸収端中に保つ必要がある。これは TES を定電圧バイアスで動作させ、強いフィードバックをかけることで実現する。これを電熱フィードバック (ETF: Electro-Thernal Feedback) と呼ぶ (**???**)。

この節では電熱フィードバック中でのカロリメータの動作について述べる。

2.3.1 電熱フィードバックのもとでの温度変化に対する応答

図 2.3 左に示すような定電圧バイアスで TES を動作させた場合を考える。熱入力によって温度が上昇すると、TES の抵抗値は急激に増加する。定電圧なので電流は減少し、ジュール発熱も減少する。このように、熱入力を打ち消す方向にジュール発熱量が急激に変化して負のフィードバックが働くので、素子の温度も安定に保たれる。実際には TES と並列にシャント抵抗をつないで、疑似的に定電圧バイアスを実現する

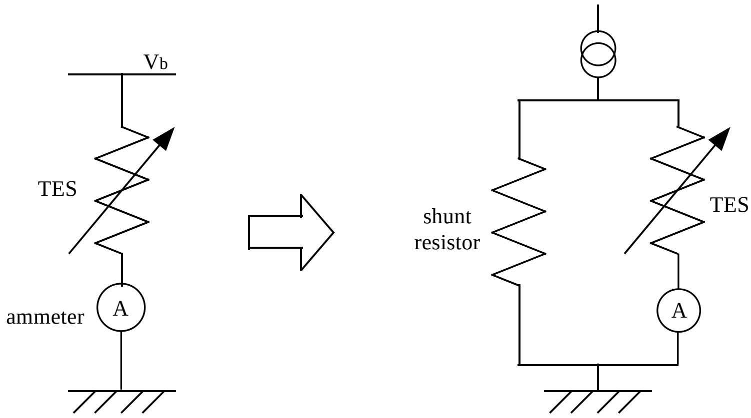


図 2.3: 左図: 定電圧バイアス 右図: シャント抵抗を使って疑似的に作る定電圧バイアス

(図 2.3 右)。以下では理想的な定電圧バイアスで動作しているものとする。

熱伝導度は

$$G \equiv dP/dT \tag{2.7}$$

で定義される。付録 **??**に示すように、一般的に熱伝導度は温度依存性を持ち、

$$G = G_0 T^{n-1} \tag{2.8}$$

と温度に対するべき n を用いて表される。電子が熱伝導度を担う場合 $n = 2$、格子振動が熱伝導度を担う場合 $n = 4$ となる (付録 **??**参照)。熱浴と TES との間の熱伝導度を考える。一般に $T \gg T_{\rm bath}$ であるので、熱浴との熱伝導度による熱の流れは

$$P = \int_{T_{\rm bath}}^{T} G dT = \frac{G_0}{n}\left(T^n - T_{\rm bath}^n\right) \tag{2.9}$$

と式 (2.7) を積分して計算できる。

平衡状態では、TES の温度を T_0 として、TES におけるジュール発熱 $P_{\rm b} \equiv V_{\rm b}^2/R_0$ とカロリメータピクセルから熱浴へ流れる熱量とがつり合っているので、

$$P_{\rm b} = \frac{G_0}{n}\left(T_0^n - T_{\rm bath}^n\right) \tag{2.10}$$

と書ける。ただし、$V_{\rm b}$ はバイアス電圧、G_0 は $G = G_0 T^{n-1}$ を満たす定数 (G は熱伝導度)、R_0 は動作点での TES の抵抗値、$T_{\rm bath}$ は熱浴の温度である。

微小な温度上昇 $\Delta T \equiv T - T_0$ によって素子の温度が T になった場合、内部エネルギーの変化は熱の収支に等しいので、

$$C\frac{dT}{dt} = \frac{V_{\rm b}^2}{R(T)} - \frac{G_0}{n}\left(T^n - T_{\rm bath}^n\right) \tag{2.11}$$

が成り立つ。温度上昇 ΔT は 1 次の近似で、

$$C\frac{d\Delta T}{dt} \simeq -\frac{V_{\rm b}^2}{R_0^2}\Delta R - G_0 T^{n-1}\Delta T \tag{2.12}$$

$$= \frac{P_{\rm b}\alpha}{T}\Delta T - G\Delta T \tag{2.13}$$

となる。最後の項の G は TES の温度 T での熱伝導度 $G(T)$ を表す。以後単に G と書いた場合は TES の温度 T での熱伝導度を表すこととする。式 (2.12) の解は、

$$\Delta T = \Delta T_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\rm eff}}\right) \tag{2.14}$$

と書ける。ただし、

$$\tau_{\rm eff} \equiv \frac{C/G}{1+\frac{P_{\rm b}\alpha}{GT}} \tag{2.15}$$

$$= \frac{\tau_0}{1+\frac{P_{\rm b}\alpha}{GT}} \tag{2.16}$$

は有効時定数である。式 (2.10)、(2.16) より、$\tau_{\rm eff}$ は

$$\tau_{\rm eff} = \frac{\tau_0}{1+\frac{\alpha}{n}\left(1-\left(\frac{T_{\rm bath}}{T}\right)^n\right)} \tag{2.17}$$

のように書ける。さらに、熱浴の温度が TES の温度よりも十分に低い場合 ($T_{\rm bath}^n \ll T^n$) は、

$$\tau_{\rm eff} = \frac{\tau_0}{1+\frac{\alpha}{n}} \tag{2.18}$$

$$\approx \frac{n}{\alpha}\tau_0 \tag{2.19}$$

と近似できる。ただし、式 (2.19) は $\alpha/n \gg 1$ の場合である。このように、α が大きい場合は、電熱フィードバックによって応答速度が非常に速くなることがわかる。また、X 線のエネルギーは電流値の変化として読み出され、

$$\Delta I = \frac{V_{\rm b}}{R(T_0+\Delta T)} - \frac{V_{\rm b}}{R(T_0)} \tag{2.20}$$

$$\simeq -\frac{\Delta R}{R}I \tag{2.21}$$

$$\simeq -\alpha\frac{E}{CT}I \tag{2.22}$$

となる。

2.3.2 電熱フィードバックの一般論と電流応答性

定電圧バイアスで動作するカロリメータに、時間に依存する微小なパワー $\delta P{\rm e}^{i\omega t}$ が入射したときの応答について考える。系の応答は線型であり、入射 $\delta P{\rm e}^{i\omega t}$ に対する温度変化は $\delta T{\rm e}^{i\omega t}$ で表されるとする。フィードバックがかかっていないときは、

$$P_{\rm bgd} + \delta P{\rm e}^{i\omega t} = \bar{G}(T-T_{\rm bath}) + G\delta T{\rm e}^{i\omega t} + i\omega C\delta T{\rm e}^{i\omega t} \tag{2.23}$$

が成り立つ。ただし、 $P_{\rm bgd}$ はバックグラウンドパワー、$\bar{G}$ は平均の熱伝導度である。定常状態では、

$$P_{\rm bgd} = \bar{G}(T-T_{\rm bath}) \tag{2.24}$$

である。式 (2.23) と (2.24) から、δT は δP を用いて

$$\delta T = \frac{1}{G}\frac{1}{1+i\omega\tau_0}\delta P \tag{2.25}$$

と表される。ここで、$\tau_0 \equiv C/G$ は系の固有時定数である。

電熱フィードバックがかかった状態では、エネルギー保存の式は、

$$P_{\rm bgd} + \delta P e^{i\omega t} + P_{\rm b} + \delta P_{\rm b} e^{i\omega t} = \bar{G}(T - T_{\rm bath}) + G\delta T e^{i\omega t} + i\omega C\delta T e^{i\omega t} \tag{2.26}$$

となる。また、定電圧バイアスでは以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \delta P_{\rm b} e^{i\omega t} &= \frac{dP_{\rm b}}{dI}\delta I e^{i\omega t} = V_{\rm b}\delta I e^{i\omega t} && (2.27)\\ \delta I{\rm e}^{i\omega t} &= \frac{dI}{dR}\delta R{\rm e}^{i\omega t} = \frac{d}{dR}\left(\frac{V_{\rm b}}{R}\right)\delta R{\rm e}^{i\omega t} = -\frac{V_{\rm b}}{R^2}\delta R{\rm e}^{i\omega t} && (2.28)\\ \delta R{\rm e}^{i\omega t} &= \frac{dR}{dT}\delta T{\rm e}^{i\omega t} = \alpha\frac{R}{T}\delta T{\rm e}^{i\omega t} && (2.29) \end{aligned}$$

これらを使うと式 (2.26) は、

$$P_{\rm bgd} + \delta P e^{i\omega t} + \frac{V_b^2}{R} - \frac{V_b^2}{R^2}\frac{dR}{dT}\delta T e^{i\omega t} = \bar{G}(T - T_{\rm bath}) + G\delta T e^{i\omega t} + i\omega C\delta T e^{i\omega t} \tag{2.30}$$

と書き換えられる。式 (2.30) の解は、

$$\begin{aligned} \delta T{\rm e}^{i\omega t} &= \frac{1}{\alpha\frac{P_{\rm b}}{T} + G + i\omega C}\delta P{\rm e}^{i\omega t} && (2.31)\\ &= \frac{1}{G}\frac{1}{1+\frac{\alpha P_{\rm b}}{GT}}\frac{1}{1+i\omega\tau_{\rm eff}}\delta P{\rm e}^{i\omega t} && (2.32) \end{aligned}$$

ここで、

$$\tau_{\rm eff} \equiv \frac{1}{1+\frac{\alpha P_{\rm b}}{GT}}\frac{C}{G} \tag{2.33}$$

は、電熱フィードバックがかかった状態での実効的な時定数である。

一般的なフィードバックの理論に当てはめると、電熱フィードバックの系は図 2.4 のように表すことができる。フィードバック量 b と系のループゲイン $\mathcal{L}(\omega)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} b &= -V_{\rm b} && (2.34)\\ \mathcal{L}(\omega) &= \frac{1}{G(1+i\omega\tau_0)} \times \alpha\frac{R}{T} \times \left(-\frac{I}{R}\right) \times (-V_{\rm b}) = \frac{\alpha P_{\rm b}}{GT}\frac{1}{1+i\omega\tau_0} \equiv \frac{\mathcal{L}_0}{1+i\omega\tau_0} && (2.35) \end{aligned}$$

と書ける。ただし、

$$\mathcal{L}_0 \equiv \frac{\alpha P_{\rm b}}{GT} \tag{2.36}$$

は、周波数 0 でのループゲインである。ループを閉じた場合の伝達関数

$$S_I(\omega) \equiv \frac{\delta I}{\delta P} \tag{2.37}$$

は $\mathcal{L}(\omega)$ を使って、

$$\begin{aligned} S_I(\omega) &= \frac{1}{b}\frac{\mathcal{L}(\omega)}{1+\mathcal{L}(\omega)} && (2.38)\\ &= -\frac{1}{V_{\rm b}}\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0 + 1 + i\omega\tau_0} && (2.39)\\ &= -\frac{1}{V_{\rm b}}\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0+1}\frac{1}{1+i\omega\tau_{\rm eff}} && (2.40) \end{aligned}$$

と書ける (付録 C 参照)。ただし、

$$\tau_{\mathrm{eff}} \equiv \frac{\tau}{\mathcal{L}_0 + 1} \tag{2.41}$$

である。ループゲインが十分に大きい場合 ($\mathcal{L}_0 \gg 1$) は、

$$S_I(\omega) = -\frac{1}{V_{\mathrm{b}}}\frac{1}{1 + i\omega\tau_{\mathrm{eff}}} \tag{2.42}$$

となる。さらに $\omega \ll 1/\tau_{\mathrm{eff}}$ を満たす周波数範囲では、

$$S_I = -\frac{1}{V_{\mathrm{b}}} \tag{2.43}$$

と表され、電圧 V_{b} の逆数になる。$S_I(\omega)$ のことを特に電流応答性 (current responsivity) と呼ぶことがある。

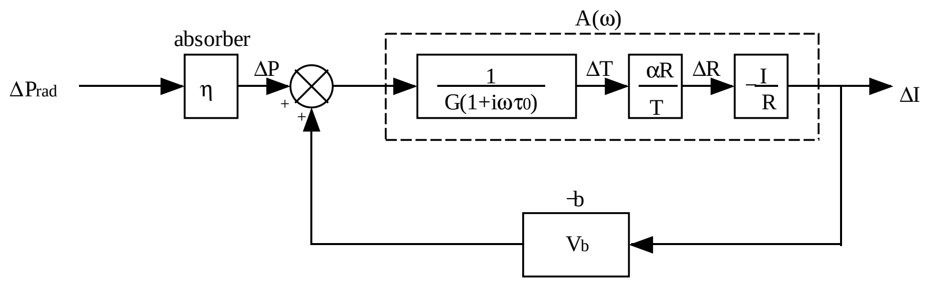


図 2.4: 電熱フィードバックのダイアグラム

入力 $P(t) = E\delta(t)$ に対する応答は、以下のように計算される。角周波数空間 ($-\infty < \omega < +\infty$) での入力は、

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E\delta(t)\mathrm{e}^{i\omega t}dt \tag{2.44}$$

$$= \frac{E}{2\pi} \tag{2.45}$$

であるので、出力はそれに電流応答性をかけて、

$$I(\omega) = S_I(\omega)P(\omega) \tag{2.46}$$

$$= -\frac{E}{2\pi V_{\mathrm{b}}}\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0 + 1}\frac{1}{1 + i\omega\tau_{\mathrm{eff}}} \tag{2.47}$$

と表される。これを逆フーリエ変換して時間軸に戻すと

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}d\omega \tag{2.48}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{E}{V_{\mathrm{b}}}\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0 + 1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\omega t}}{1 + i\omega\tau_{\mathrm{eff}}}d\omega \tag{2.49}$$

$$= -\frac{E}{V_{\mathrm{b}}\tau_{\mathrm{eff}}}\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0 + 1}\exp\left(-\frac{t}{\tau_{\mathrm{eff}}}\right) \tag{2.50}$$

$$= -\frac{\alpha E}{CT}I_0\exp\left(-\frac{t}{\tau_{\mathrm{eff}}}\right) \tag{2.51}$$

となり、式 (2.22) と一致する。ただし、I_0 は平衡状態で TES を流れる電流である。一方、入力 $P(t) = E\delta(t)$ による温度上昇は周波数空間で

$$\Delta T(\omega) = \frac{1}{G(1 + i\omega\tau_0)}\frac{1}{1 + \mathcal{L}(\omega)}P(\omega) \tag{2.52}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{E}{G}\frac{1}{1 + \mathcal{L}_0}\frac{1}{1 + i\omega\tau_{\mathrm{eff}}} \tag{2.53}$$

と書けるので、時間軸に直すと

$$\begin{aligned}\Delta T(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta T(\omega) \mathrm{e}^{-i\omega t} d\omega &(2.54)\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{E}{G}\frac{1}{\mathcal{L}_0+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\omega t}}{1+i\omega\tau_{\mathrm{eff}}}d\omega &(2.55)\\ &= \frac{E}{G\tau_{\mathrm{eff}}}\frac{1}{\mathcal{L}_0+1}\exp\left(-\frac{t}{\tau_{\mathrm{eff}}}\right) &(2.56)\\ &= \frac{E}{C}\exp\left(-\frac{t}{\tau_{\mathrm{eff}}}\right) &(2.57)\end{aligned}$$

である。

ループゲイン $\mathcal{L}_0$ が一定とみなせる時、式 (2.50) より

$$\int V_{\mathrm{b}} I(t) dt = -\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0+1}E \quad (2.58)$$

したがって、X 線入射に伴うジュール発熱の積分量は入射エネルギー E に比例する。入射エネルギーのうち $\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0+1}$ はジュール発熱の変化で補償され、$\frac{1}{\mathcal{L}_0+1}$ が熱浴に逃げていくことになる。特に $\mathcal{L}_0 \gg 1$ の場合は X 線入射に伴うジュール発熱の変化の積分量は入射エネルギーに一致する。

2.4 固有ノイズ

エネルギー分解能を見積もるためにはノイズレベルを評価しなければならない。ノイズには、バックグラウンドの放射、熱浴の温度揺らぎ、外部磁場、$1/f$ ノイズ、rf ノイズなど様々な起源のものが存在する。その中でも、ジョンソンノイズとフォノンノイズは X 線マイクロカロリメータを使う限り避けることができず、原理的なエネルギー分解能はこれらで制限される。また、前置アンプなどの読み出し系ノイズも大きく寄与することが多い。ここではジョンソンノイズとフォノンノイズについて述べ、読み出し系のノイズについては § 2.6.4 で述べる。なお、ここでは理想的な定電圧バイアスの場合を定式化する。§ **??**で行なった補正を反映させるには、フィードバック量 b、ループゲイン $\mathcal{L}_0$ を補正すればよい。

マイクロカロリメータには 2 種類の固有ノイズ源がある。1 つは、温度計の抵抗で発生するジョンソンノイズ、もう 1 つは熱浴との熱伝導度が有限であるために発生する熱揺らぎ (フォノンノイズ) である。図 2.5 は、これらのノイズの寄与も含めた電熱フィードバックのダイアグラムである。フォノンノイズは熱起源であるので、信号と同じ部分に入力される。これに対して、ジョンソンノイズはカロリメータの抵抗に起因するため、フォノンノイズとは伝達の仕方が異なる。微小な熱揺らぎ δP_{ph} がもたらす電流の揺らぎは、

$$\begin{aligned}\delta I_{\mathrm{ph}} &= -\frac{1}{V_{\mathrm{b}}}\frac{\mathcal{L}(\omega)}{1+\mathcal{L}(\omega)}\delta P_{\mathrm{ph}} &(2.59)\\ &= S_I \delta P_{\mathrm{ph}} &(2.60)\end{aligned}$$

である。これより、フォノンノイズの電流密度は、

$$\begin{aligned}\delta I_{\mathrm{ph}}^2 &= |S_I|^2 \delta P_{\mathrm{ph}}^2 &(2.61)\\ &= \frac{1}{V_{\mathrm{b}}^2}\left(\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0+1}\right)^2\frac{1}{1+\omega^2\tau_{\mathrm{eff}}^2}\delta P_{\mathrm{ph}}^2 &(2.62)\end{aligned}$$

となる。Mather (1982) によると、フォノンノイズのパワースペクトル密度は $0 \leq f < \infty$ 空間で

$$\begin{aligned}\delta P_n^2 &= 4k_B G T^2 \frac{\int_{T_{\mathrm{bath}}}^{T}\left(\frac{t\kappa(t)}{T\kappa(T)}\right)^2 dt}{\int_{T_{\mathrm{bath}}}^{T}\left(\frac{\kappa(t)}{\kappa(T)}\right)dt} &(2.63)\\ &\equiv 4k_B G T^2 \Gamma &(2.64)\end{aligned}$$

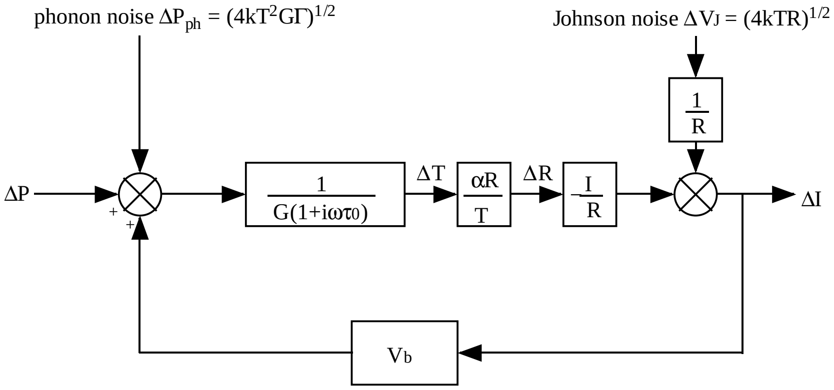


図 2.5: ノイズの寄与も含めた電熱フィードバックのダイアグラム

と表される (付録 ??参照)。ただし、$\kappa(T)$ はサーマルリンクを構成する物質の熱伝導率である。$\theta \equiv T_{\rm bath}/T$ とし、$\kappa(T)$ は $\kappa(T) = \kappa(T_{\rm bath})\theta^{-(n-1)}$ と表されると仮定すると、Γ は、

$$\Gamma = \frac{n}{2n+1}\frac{1-\theta^{(2n+1)}}{1-\theta^n} \tag{2.65}$$

となる。式 (2.64) を (2.62) に代入すると、フォノンノイズの電流密度は、

$$\begin{aligned} \delta I_{\rm ph}^2 &= 4k_{\rm B}GT^2\Gamma|S_I|^2 && (2.66)\\ &= \frac{4k_{\rm B}GT^2\Gamma}{b^2}\left(\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0+1}\right)^2\frac{1}{1+\omega^2\tau_{\rm eff}^2} && (2.67)\\ &= \frac{4k_{\rm B}GT^2\Gamma}{V_{\rm b}^2}\left(\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0+1}\right)^2\frac{1}{1+\omega^2\tau_{\rm eff}^2} && (2.68) \end{aligned}$$

と表される。

一方、ジョンソンノイズ $\delta V_{\rm J}$ による電流の揺らぎ $\delta I_{\rm J}^0$ は、

$$\delta I_{\rm J}^0 = \frac{\delta V_{\rm J}}{R} \tag{2.69}$$

であり、この揺らぎが系に入力されると、出力の揺らぎは、

$$\begin{aligned} \delta I_{\rm J} &= \frac{1}{1+\mathcal{L}(\omega)}\delta I_{\rm J}^0 && (2.70)\\ &= \frac{\frac{1}{\mathcal{L}_0+1}+i\omega\tau_{\rm eff}}{1+i\omega\tau_{\rm eff}}\frac{\delta V_{\rm J}}{R} && (2.71)\\ &= \frac{1}{\mathcal{L}_0+1}\frac{1+i\omega\tau_0}{1+i\omega\tau_{\rm eff}}\frac{\delta V_{\rm J}}{R} && (2.72) \end{aligned}$$

となる (付録 ??参照)。ジョンソンノイズの電圧密度は $0 \le f < \infty$ 空間では $\delta V_{\rm J}^2 = 4k_{\rm B}TR$ と与えられるので (付録 ??参照)、出力電流密度は

$$\begin{aligned} \delta I_{\rm J}^2 &= \frac{4k_{\rm B}T}{R}\left(\frac{1}{\mathcal{L}_0+1}\right)^2\left|\frac{1+i\omega\tau_0}{1+i\omega\tau_{\rm eff}}\right|^2 && (2.73)\\ &= \frac{4k_{\rm B}T}{R}\left(\frac{1}{\mathcal{L}_0+1}\right)^2\frac{1+\omega^2\tau_0^2}{1+\omega^2\tau_{\rm eff}^2} && (2.74)\\ &= \begin{cases} \frac{4k_{\rm B}T}{R}\left(\frac{1}{\mathcal{L}_0+1}\right)^2 & \text{if } \omega \ll \tau_0^{-1} \\ \frac{4k_{\rm B}T}{R} & \text{if } \omega \gg \tau_{\rm eff}^{-1} \end{cases} && (2.75) \end{aligned}$$

となる。これより、$\omega \ll \tau_0^{-1}$ の周波数範囲では、ジョンソンノイズは電熱フィードバックによって抑制され、$\omega \gg \tau_{\mathrm{eff}}^{-1}$ の周波数範囲では元の値に戻ることがわかる。

これら全ての電流密度は自乗和によって与えられ、$0 \le f < \infty$ 空間で

$$\begin{aligned}
\delta I^2 &= \delta I_{\mathrm{J}}^2 + \delta I_{\mathrm{ph}}^2 && (2.76)\\
&= \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{R}\left(\frac{1}{\mathcal{L}_0+1}\right)^2 \frac{1+\omega^2\tau_0^2}{1+\omega^2\tau_{\mathrm{eff}}^2} + 4k_{\mathrm{B}}GT^2\Gamma\frac{1}{V_{\mathrm{b}}^2}\left(\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0+1}\right)^2\frac{1}{1+\omega^2\tau_{\mathrm{eff}}^2} && (2.77)\\
&= \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{R}\frac{\frac{1+\Gamma\alpha\mathcal{L}_0}{(\mathcal{L}_0+1)^2}+\omega^2\tau_{\mathrm{eff}}^2}{1+\omega^2\tau_{\mathrm{eff}}^2} && (2.78)
\end{aligned}$$

となる。これは、強い電熱フィードバックの極限では、

$$\delta I^2 = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{R}\frac{n/2+\omega^2\tau_{\mathrm{eff}}^2}{1+\omega^2\tau_{\mathrm{eff}}^2} \tag{2.79}$$

となる。図 2.6 にノイズ電流密度と信号の周波数特性を示す。フォノンノイズとジョンソンノイズの関係を見るために両者の比をとると、

$$\frac{\delta I_{\mathrm{ph}}^2}{\delta I_{\mathrm{J}}^2} = \frac{\alpha\mathcal{L}_0\Gamma}{1+\omega^2\tau_0^2} \tag{2.80}$$

したがって、低い周波数ではジョンソンノイズが抑制され、フォノンノイズが $\alpha\mathcal{L}_0\Gamma$ 倍大きいが、$\omega > \tau_0^{-1}$ ではジョンソンノイズの寄与が大きくなりはじめ、$\omega \gg \tau_{\mathrm{eff}}^{-1}$ ではジョンソンノイズが支配的になる。一方、パルスとフォノンノイズの比は

$$\frac{\delta P_{\mathrm{signal}}^2}{\delta P_{\mathrm{n}}} = \frac{2E^2}{4k_BGT^2\Gamma} \tag{2.81}$$

となり、周波数に依存しない。これは両者がまったく同じ周波数依存性を持つためである。

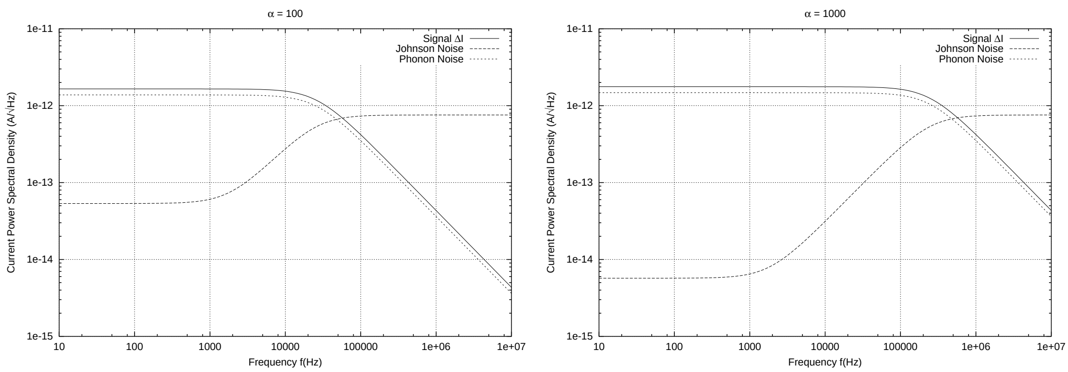


図 2.6: ノイズ電流密度。左は $\alpha = 100$　右は $\alpha = 1000$ の場合。実線が信号、破線がジョンソンノイズ、点線がフォノンノイズを表す。低い周波数では電熱フィードバックによってジョンソンノイズが抑制される。

式 (2.40) と式 (2.75) より、ジョンソンノイズは電流応答性 S_I を用いて

$$\delta I_{\mathrm{J}}^2 = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{R}\frac{b^2(1+\omega^2\tau_0^2)}{\mathcal{L}_0^2}|S_I|^2 \tag{2.82}$$

とかける。式 (2.67) と式 (2.75) から、固有ノイズは

$$\delta I^2 = \frac{4k_BT}{R}\frac{1+\omega^2\tau_0^2}{\mathcal{L}_0^2}b^2|S_I|^2 + 4k_BGT^2\Gamma|S_I|^2 \tag{2.83}$$

となる。雑音等価パワー (noise equivalent power) NEP(f) は、信号のパワーと NEP(f) の比が S/N 比となる値として定義され、

$$\mathrm{NEP}(f)^2 = \left|\frac{\delta I}{S_I}\right|^2 \tag{2.84}$$

と計算される。固有ノイズに対する NEP(f) は

$$\begin{aligned}\mathrm{NEP}(f)^2 &= \left|\frac{\delta I}{S_I}\right|^2 &(2.85)\\ &= \frac{4k_BT}{R}\frac{b^2}{\mathcal{L}_0^2}\left(1+(2\pi f)^2\tau_0^2+\frac{\mathcal{L}_0^2}{b^2}RGT\Gamma\right) &(2.86)\\ &= 4k_BTP_\mathrm{b}\left(\frac{1+(2\pi f)^2\tau_0^2}{\mathcal{L}_0^2}+\frac{\alpha\Gamma}{\mathcal{L}_0}\right) &(2.87)\end{aligned}$$

となる。

2.5 吸収体と TES が有限の熱伝導度でつながれている場合

吸収体と TES の間の熱伝導度が有限の場合を考える。この場合、TES と吸収体は図 2.7 のようなモデルで表される。このような場合、吸収体で吸収されたエネルギーが TES に伝わるまでに有限の時間がかかり、

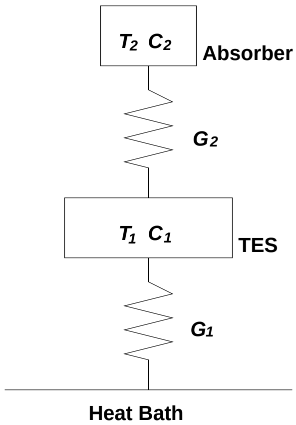


図 2.7: TES と吸収体の間に有限の熱伝導度が存在する場合のモデル

それまでの時間は TES と吸収体に温度差が生じる。また、TES と吸収体の熱伝導度 G_2 に伴い **??** に示す熱揺らぎノイズが発生する。

2.5.1 温度変化を表す方程式

この系での熱の流れを表す微分方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta T_2}{dt} &= -\frac{G_2}{C_2}(\Delta T_2-\Delta T) &(2.88)\\ \frac{d\Delta T_1}{dt} &= -\frac{G_1}{C_1}\Delta T_1+\frac{G_2}{C_1}(\Delta T_2-\Delta T_1)-\frac{P_\mathrm{b}\alpha}{C_1T_1}\Delta T_1 &(2.89)\end{aligned}$$

のようになる。ただし、G_1 は TES と熱浴間の熱伝導度、G_2 は TES と吸収体間の熱伝導度、C_1、T_1 は TES の熱容量と温度、C_2、T_2 は吸収体の熱容量と温度である。ここで、式 (2.89) の最後の項は電熱フィードバックによるジュール発熱の変化を表す。

これらの式を変形すると、

$$\frac{d}{dt}(\Delta T_2 - \Delta T_1) = -\left(\frac{G_2}{C_2} + \frac{G_2}{C_1}\right)(\Delta T_2 - \Delta T_1) + \frac{G_1}{C_1}(1+\mathcal{L}_0)\Delta T \quad (2.90)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\Delta T_1 + \frac{C_2}{C_1}\Delta T_2\right) = -\frac{G_1}{C_1}\Delta T_1 \quad (2.91)$$

となる。ここで、系全体の温度が変化する時間に比べて、ΔT_2 は短い時間で ΔT_1 に一致すると仮定する。すなわち $G_2 \gg G_1(1+\mathcal{L}_0)$ が成り立つとする。すると、式 (2.90) の右辺第二項は無視することができ、

$$\frac{d}{dt}(\Delta T_2 - \Delta T_1) = -\left(\frac{G_2}{C_2} + \frac{G_2}{C_1}\right)(\Delta T_2 - \Delta T_1) \quad (2.92)$$

となる。この式は簡単に解くことができ、

$$\Delta T_2 - \Delta T_1 \propto \exp\left[-\left(\frac{G_2}{C_{\mathrm{internal}}}\right)t\right] \quad (2.93)$$

となる。ここで、C_{internal} は

$$\frac{1}{C_{\mathrm{internal}}} \equiv \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} \quad (2.94)$$

で定義した。したがって時定数 τ_2 は

$$\tau_2 = \frac{C_{\mathrm{internal}}}{G_2} = \frac{CC_2}{(C+C_2)G_2} \quad (2.95)$$

となる。τ_2 経過後は $\Delta T_2 \to \Delta T_1$ となるので、式 (2.91) より

$$\left(1+\frac{C_2}{C_1}\right)\frac{d}{dt}\Delta T_1 = -\frac{G_1}{C_1}(1+\mathcal{L}_0)\Delta T_1 \quad (2.96)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta T_1 = -\frac{G_1}{C_1+C_2}(1+\mathcal{L}_0)\Delta T_1 \quad (2.97)$$

$$\Delta T_1 \propto \exp\left(-\frac{G_1}{C_1+C_2}(1+\mathcal{L}_0)t\right) \quad (2.98)$$

と計算できる。したがって時定数 τ_1 は

$$\tau_1 = \frac{C_1+C_2}{G}\frac{1}{1+\mathcal{L}_0} \quad (2.99)$$

となる。以上より、TES と吸収体の温度は時定数 $\tau_2 = \frac{C_{\mathrm{internal}}}{G_2}$ の後に一致し、その後は時定数 $\tau_1 = \frac{C+C_2}{G(1+\mathcal{L}_0)}$ で定常状態の温度に戻っていくことになる。この τ_1 はカロリメータの有効時定数に対応する。

2.5.2 X 線入射後の波形

X 線が吸収体で吸収された場合、TES で吸収された場合の温度変化をそれぞれ考える。温度変化は出力電流の変化に対応するのでこれは出力波形を考える相当する。

X 線が吸収体に入射すると、吸収体の温度は $\Delta T_2 = E/C_2$ だけ上昇する。その熱は、時定数 τ_2 で吸収体から TES に流入する。その後、時定数 τ_1 で TES、吸収体の温度は定常状態の温度に戻る。このことから、TES の温度は、まず時定数 τ_2 の指数関数で立ち上がり、時定数 τ_1 で定常状態に戻る。そこで、TES の温度は

$$\Delta T_1 \propto \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right) \quad (2.100)$$

となる。

一方、X 線が TES に入射した場合、TES の温度がまず $\Delta T_1 = E/C_1$ だけ上昇する。その熱は時定数 τ_2 で吸収体に移動し、TES と吸収体の温度が等しくなった後に時定数 τ_1 で両者の温度は定常状態の温度に戻る。そこで、TES の温度はまず時定数 τ_2 で減衰し、吸収体と温度が等しくなった後に時定数 τ_1 で減衰すると考えられる。TES の温度は

$$\Delta T_1 \propto \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right) \tag{2.101}$$

となる。

次に微分方程式を数値的に解いた。$C_2/C_1 = 4$、$\tau_1/\tau_2 = 20$ としたときの、吸収体に X 線が入射した場合 ($t = 0$ で $\Delta T_1 = 0$、$\Delta T_2 = E/C_2$) の TES の温度変化を図 2.8 左に、TES に入射した場合 ($t = 0$ で $\Delta T_1 = E/C_1$、$\Delta T_2 = 0$) を図 2.8 右に示す。この波形は上の考察とよくあっている。

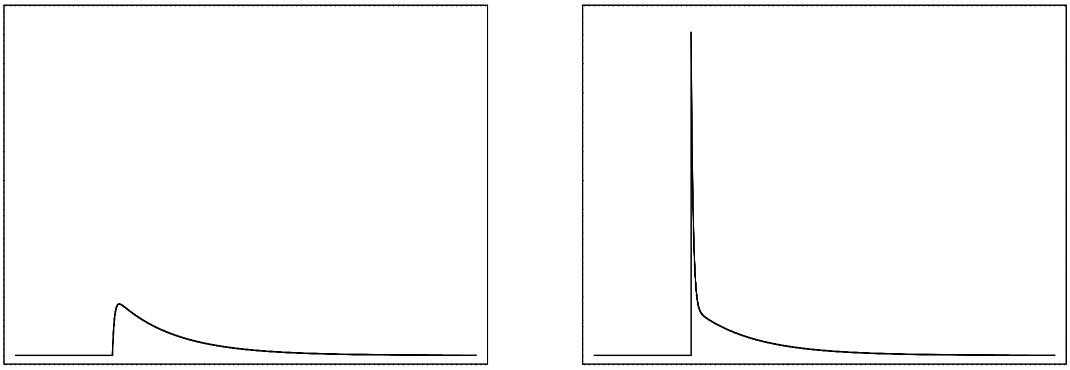


図 2.8: モデルから計算される TES の温度。横軸は時間。吸収体に X 線が入射した場合 (左) と、TES に X 線が入射した場合 (右)。

2.5.3 周波数応答を用いた定式化

次に、TES の周波数応答を用いて、吸収体に X 線が入射した際の波形を考える。

§ 2.3.2 では、TES への熱入力は入射 X 線エネルギー E がデルタ関数的に入射するとして $P(t) = E\delta(t)$ とした。吸収体と TES との間に有限の熱伝導度が存在する場合には、熱入力は

$$P(t) = \frac{E}{\tau_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \qquad (t \geq 0) \tag{2.102}$$

だと考えればよい。ただし、吸収体に X 線が入射した時刻を $t = 0$ とする。

§ 2.3.2 と同様に計算を行なうと、周波数空間での熱入力 $P(\omega)$ は、

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{E}{\tau_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{E}{2\pi}\frac{1}{1 + i\omega\tau_2} \tag{2.103}$$

$$\tag{2.104}$$

となり、周波数空間での出力電流 $I(\omega)$ は、

$$I(\omega) = P(\omega)S_{\mathrm{I}}(\omega) \tag{2.105}$$

$$= -\frac{E}{2\pi}\frac{1}{V_{\mathrm{b}}}\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0 + 1}\frac{1}{1 + i\omega\tau_2}\frac{1}{1 + i\omega\tau_{\mathrm{eff}}} \tag{2.106}$$

と表される。これを逆フーリエ変換をして実空間に戻すと、

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega &(2.107)\\ &= -\frac{E}{2\pi}\frac{1}{V_\mathrm{b}}\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+i\omega\tau_2}\frac{1}{1+i\omega\tau_\mathrm{eff}}\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega &(2.108)\\ &= \frac{E}{V_\mathrm{b}}\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0+1}\frac{1}{\tau_\mathrm{eff}-\tau_2}\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau_\mathrm{eff}}\right)-\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right) &(2.109)\end{aligned}$$

と表させる。これは、時刻 $t=0$ では最大値をとらず、

$$t_\mathrm{peak} = \ln\frac{\tau_\mathrm{eff}}{\tau_2}\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_\mathrm{eff}}\right)^{-1} \tag{2.110}$$

となる t_peak で最大値をとる。また、式 (2.109) を積分すると

$$\int V_\mathrm{b} I(t)dt = -\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0+1}E \tag{2.111}$$

となり、式 (2.58) と同様 $\mathcal{L}_0 \gg 1$ では X 線のエネルギーに一致することがわかる。

2.6 SQUID を用いた読み出し系

TES の電流変化を読み出すには、低インピーダンスの電流計が必要である。その点で、SQUID は最良の電流計である。SQUID を用いたカロリメータの読み出し系の摸式図を図 2.9 に示す。

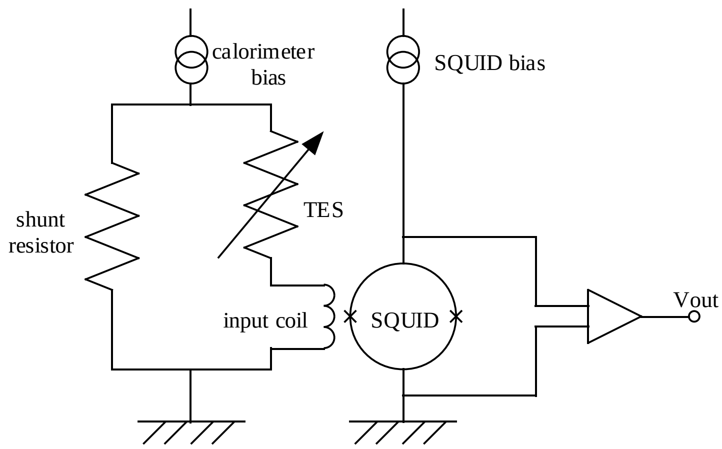


図 2.9: SQUID を用いたカロリメータの読み出し系

2.6.1 dc-SQUID

SQUID (Superconducting QUantum Interference Device) とはジョセフソン効果を利用した素子で、図 2.10 のように 2 つのジョセフソン接合を並列に持つリングである (たとえば ?)。2 つの接合の位相差とリングを貫く磁束との間には

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0} \tag{2.112}$$

という関係がある。ただし、θ_1 と θ_2 はそれぞれのジョセフソン接合での位相差、Φ はリングを貫く磁束、Φ_0 は磁束量子で、

$$\Phi_0 \equiv h/2e = 2.06 \times 10^{-15}\ \mathrm{Wb} \tag{2.113}$$

という定数である。ジョセフソン接合が超伝導状態のとき、バイアス電流 I_B は

$$I_\mathrm{B} = I_0 \cos\left(\pi \frac{\Phi_\mathrm{exp}}{\Phi_0}\right) \sin\left(\theta_1 - \pi \frac{\Phi_\mathrm{exp}}{\Phi_0}\right) \tag{2.114}$$

となる。ただし、 I_0 は接合の臨界電流、$\Phi_\mathrm{ext} \equiv \Phi - LJ$ は外部磁束、L と J はリングの自己インダクタンスとリングを循環する電流である。したがって、SQUID が超伝導でいられる最大の電流、すなわち SQUID の臨界電流は

$$I_\mathrm{max} = 2I_0 \left|\cos\left(\pi \frac{\Phi_\mathrm{ext}}{\Phi_0}\right)\right| \tag{2.115}$$

となる。このように、SQUID の臨界電流は外部磁束によって変化する。$2I_0$ より大きなバイアス電流で SQUID を動作させると、臨界電流が変化することにより、外部磁束の変化に対して出力電圧が変化するようになる。したがって、SQUID の隣にコイルを置くことによって、SQUID を非常に感度の高い電流計として扱うことが可能になる。カロリメータの読み出し系として SQUID を用いた場合の模式図を図 2.9 に示す。

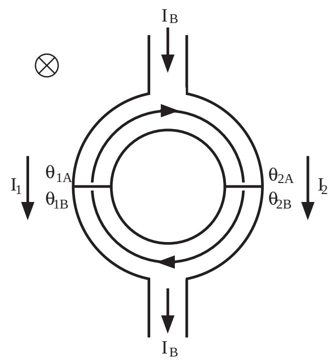


図 2.10: dc-SQUID の模式図

2.6.2 磁束固定ループ (flux-locked loop)

SQUID は外部磁束に対して周期的な応答をするため、動作点が少しずれただけでも増幅率が大きく変動してしまい、応答は非線形である。さらに、大きな入力に対しては出力の折り返しが起きてしまう。そのため、一般的にはフィードバックをかけて動作させる。これは、SQUID を貫く磁束が一定に保たれれるようにフィードバックをかけることから、磁束固定ループ (FLL: Flux-Locked Loop) と呼ばれる。SQUID の出力は、図 2.11 に示すように、フィードバック抵抗を介して SQUID に磁気的に結合されたフィードバックコイルに戻される

このとき、フィードバック量 b は

$$b = \frac{\Phi_\mathrm{FB}}{V_\mathrm{out}} = \frac{M_\mathrm{FB}}{R_\mathrm{FB}} \tag{2.116}$$

で与えられ、FLL 回路のゲインは $\frac{1}{b} = \frac{R_\mathrm{FB}}{M_\mathrm{FB}}$ となる。ただし、R_FB はフィードバック抵抗、M_FB はフィードバックコイルと SQUID との相互インダクタンスである。入力コイルを流れる電流 I が SQUID に作る磁束は、入力コイルと SQUID の相互インダクタンスを M_IS として

$$\Phi = M_\mathrm{IS} I \tag{2.117}$$

したがって、磁束固定ループを用いた場合の電流電圧変換係数 Ξ は

$$\Xi = \frac{M_{\mathrm{IS}}}{M_{\mathrm{FB}}} R_{\mathrm{FB}} \tag{2.118}$$

で与えられる。一般的には FLL 回路はロックイン増幅とともに使用されることが多いが、これは SQUID の周波数帯域を狭めてしまう。そこで、カロリメータの読み出し系としては、次に述べる SQUID アンプを用いる方がよい。

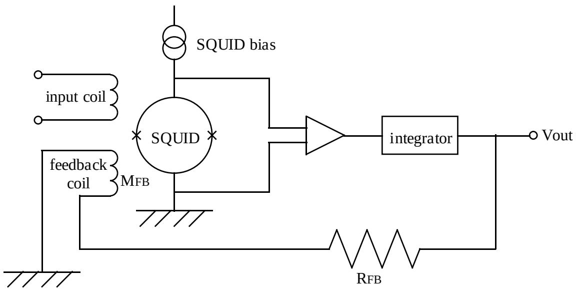


図 2.11: 磁束固定ループ (FLL) 回路の摸式図

2.6.3 SQUID アンプ

SQUID アンプは、直列に並んだ多数の入力コイルと、それぞれに結合された多数の dc-SQUID から構成されている。その数は数十〜数百にも及ぶ。これらを同位相で動作させることで信号を増幅する。SQUID アンプの利点は、低温で信号を増幅できるために読み出しノイズを抑えられることと、SQUID に比べてインピーダンスが数十〜数百倍大きいために、インピーダンス整合が取り易いことである。また、ロックイン増幅を用いた場合に比べて広帯域 ($\sim$ MHz) が実現される。本研究では図 2.12 左のような 2 段式の SQUID アンプと図 2.12 右のような 1 段式の SQUID アンプを使用した。前者を TSS (Two Stage SQUID) アンプ、後者を SSA (Serial SQUID Array) アンプと呼ぶ。

2.6.4 SQUID ノイズ

SQUID ノイズには、SQUID のシャント抵抗で発生するジョンソンノイズと、トンネル接合のショットノイズがある。そのスペクトルは、読み出し回路のカットオフ周波数より低い範囲ではほぼ一定で、ノイズ等価電流は典型的に数 pA/$\sqrt{\mathrm{Hz}}$ である。SQUID ノイズのノイズ等価パワーは

$$\mathrm{NEP}^2_{\mathrm{readout}} = \frac{i_n^2}{S_I^2} \tag{2.119}$$

で与えられる。ただし、i_n は SQUID のノイズ電流密度である。SQUID ノイズのエネルギー分解能への寄与は、式 (3.10) を用いて

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\mathrm{FWHM}} &= 2.35 \left(\int_0^\infty \frac{4df}{\mathrm{NEP}^2_{\mathrm{readout}}(f)} \right)^{-\frac{1}{2}} && (2.120)\\
&= 2.35 \frac{\mathcal{L}_0 + 1}{\mathcal{L}_0} |b| i_n \sqrt{\tau_{\mathrm{eff}}} && (2.121)\\
&= 2.35 \frac{\mathcal{L}_0 + 1}{\mathcal{L}_0} V_{\mathrm{b}} i_n \sqrt{\tau_{\mathrm{eff}}} && (2.122)
\end{aligned}$$

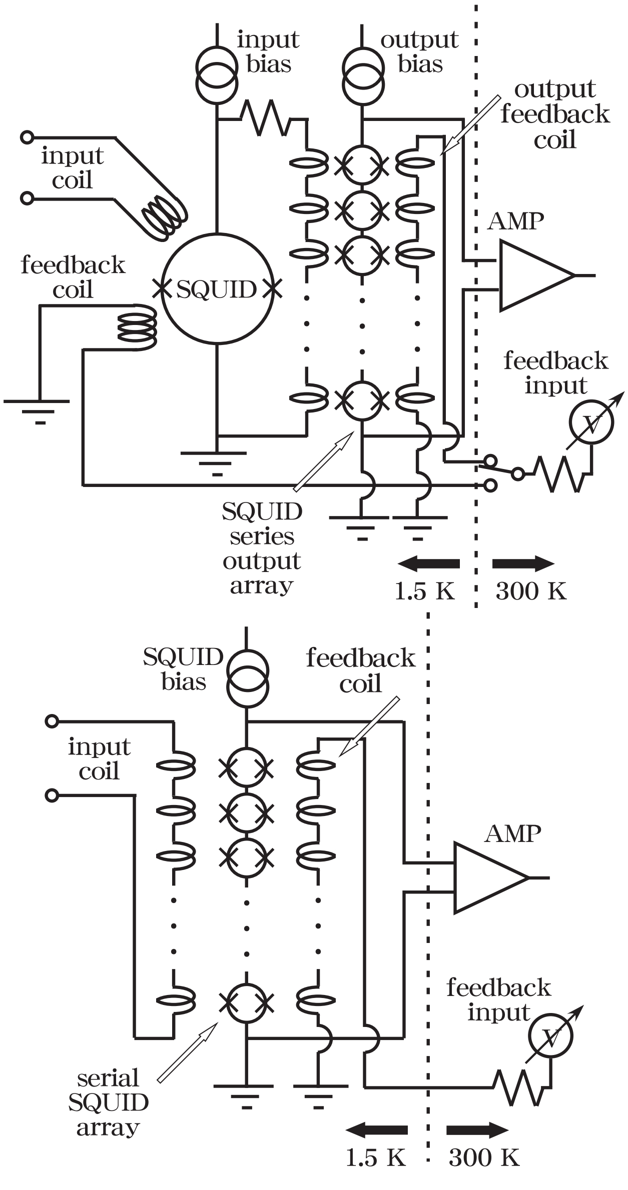


図 2.12: SQUID アンプを用いたカロリメータの読み出し系左: 2 段式 SQUID アンプ (Two Stage SQUID)、右: 1 段式 SQUID アンプ (Serial SQUID array)。

したがって $\mathcal{L}_0 \gg 1$ の場合は

$$\Delta E_{\mathrm{FWHM}} \quad \sim \quad 2.35 V_{\mathrm{b}} i_n \sqrt{\tau_{\mathrm{eff}}} \tag{2.123}$$

となる。

第3章 TESカロリメータ信号のデジタル処理

TES カロリメータは原理的に高いエネルギー分解能を有するが、それを実現するためには S/N 比を最大にするようなデジタルフィルタリング処理が必要となる。これを最適フィルター処理という。この最適フィルター処理はパルス波形がエネルギーに比例する事、周波数空間でノイズに相関がない事を条件としている。このような手法は分解能を追求する上で回路系等のノイズによる分解能の悪化が原理的な分解能の限界に対して無視できないカロリメータにおいて追求され発展している。

3.1 最適フィルター処理

3.1.1 最適フィルターの原理

X 線マイクロカロリメータは、原理的には非常に高いエネルギー分解能を達成することができる。しかし、実際にはパルス波形がノイズによって変形されるため単純にパルスのピーク値を取っただけではよい分解能が得られれない。そこで、一般的には最適フィルタ処理を行うことにより、その誤差を小さくできると考えられている。最適フィルター処理では。すべての X 線パルスが相似系である事を仮定して以下のようにエネルギーを決定する。

測定により得られたパルスを $D(t)$ とし、周波数空間では

$$D(f) = A \times M(f) + N(f) \tag{3.1}$$

のように表されるとする。ただし、$M(f)$ と $N(f)$ はそれぞれ理想的なパルス (電流応答性 S_I と同等のもので、ここではモデルパルスと呼ぶ) とノイズのスペクトルであり、A は振幅を表す。相似系を仮定しているので、パルスは $A \times M(f)$ と書ける。実際に得られたパルスとモデルパルスの差が小さくなるように、振幅 A の値を最小自乗法によって決定する。実際に得られたパルスとモデルパルスの差を、

$$\chi^2 \equiv \int \frac{|D(f) - A \times M(f)|^2}{|N(f)|^2} \tag{3.2}$$

と定義すると、χ^2 を最小にする A は、

$$A = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{DM^* + D^*M}{2|N|^2} df}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M|^2}{|N|^2} df} \tag{3.3}$$

で与えられる。$D(f)$ と $M(f)$ は実関数のフーリエ成分であるから、$D(-f) = D(f)^*$、$M(-f) = M(f)^*$ を満たす。したがって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(f)M(f)^*}{2|N|^2} df = -\int_{\infty}^{-\infty} \frac{D(-f)M(-f)^*}{2|N|^2} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(f)D(f)^*}{2|N|^2} df \tag{3.4}$$

が成り立つので、A は

$$A \quad = \quad \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{DM^*}{|N|^2} df}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M|^2}{|N|^2} df} \tag{3.5}$$

あるいは

$$A = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{M} \left|\frac{M}{N}\right|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{M}{N}\right|^2 df} \tag{3.6}$$

となる。式 (3.6) から、A は S/N 比 $[M(f)/N(f)]^2$ を重みとした場合の $D(f)/M(f)$ の平均値になっていることがわかる。式 (3.6) はさらに

$$A = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} D(t)\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{M(f)}{|N(f)|^2}\right) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{M}{N}\right|^2 df} \tag{3.7}$$

と変形できる。ただし、$\mathcal{F}^{-1}$ は逆フーリエ変換を表し、$T(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{M(f)}{|N(f)|^2}\right)$ を最適フィルタのテンプレートと呼ぶことにする。したがって、最適フィルタテンプレートを用いると、パルスハイト H は

$$H = N\int_{-\infty}^{\infty} D(t)T(t)dt \tag{3.8}$$

あるいは離散的なデータ点に対して

$$H = N\sum_i D_i(t)T_i(t) \tag{3.9}$$

となる。ただし、N は最適な規格化定数、$D_i(t)$ と $T_i(t)$ はそれぞれディジタイズされたパルスデータとテンプレートである。最適フィルターテンプレートを作成するためのモデルパルスとしては、実際に得られた X 線パルスの平均 (平均パルスと呼ぶ) を用いればよい[1]。

最適フィルタ処理を施した場合のエネルギー分解能の限界 (1σ エラー) は式 (3.2) の χ^2 が最適値より 1 だけ増える A の変化分で計算でき、これは雑音等価パワー NEP$(f)^2$を用いて

$$\Delta E_{\mathrm{rms}} = \left(\int_0^{\infty} \frac{4df}{\mathrm{NEP}^2(f)}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.10}$$

と表される (?)。固有ノイズによるエネルギー分解能を計算する。式 (2.87) を式 (3.10) に代入すると、エネルギー分解能は、

$$\Delta E_{\mathrm{rms}} = \left(\int_0^{\infty} \frac{4df}{\frac{4k_BT}{R}\frac{b^2}{\mathcal{L}_0^2}\left((1+(2\pi f)^2\tau_0^2)+\frac{\mathcal{L}_0^2}{b^2}RGT\Gamma\right)}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.11}$$

$$= \sqrt{\frac{4k_{\mathrm{B}}T}{R}\frac{b^2}{\mathcal{L}_0^2}\tau_0\sqrt{1+\frac{\mathcal{L}_0^2}{b^2}RGT\Gamma}} \tag{3.12}$$

$$= \sqrt{4k_{\mathrm{B}}T^2C\frac{b^2}{RGT\mathcal{L}_0^2}\sqrt{1+\frac{\mathcal{L}_0^2}{b^2}RGT\Gamma}} \tag{3.13}$$

となる。ξ を

$$\xi \equiv 2\sqrt{\frac{b^2}{RGT\mathcal{L}_0^2}\sqrt{1+\frac{\Gamma}{\frac{b^2}{RGT\mathcal{L}_0^2}}}} \tag{3.14}$$

と定義すると、エネルギー分解能は半値全幅 (FWHM) で、

$$\Delta E_{\mathrm{FWHM}} = 2.35\xi\sqrt{k_{\mathrm{B}}T^2C} \tag{3.15}$$

[1]平均パルスを $M(f)$ として式 (3.7) を計算すると、$D(f)=M(f)$ の時に $A=1$ となる。また、responsivity を $M(f)$ として式 (3.7) を計算すると、$D(f)=M(f)$ の時に $A=$ 入射エネルギーとなる。

[2]$\mathrm{NEP}(f) = \frac{\mathrm{NS}(f)}{\mathrm{PS}(f)/\sqrt{2E}} = \frac{2E}{\mathrm{SN}(f)}$

となる。式 (3.14) に式 (2.34) と (2.36) を代入すると、

$$\xi = 2\sqrt{\frac{1}{\alpha\mathcal{L}_0}\sqrt{1+\alpha\mathcal{L}_0\Gamma}} \tag{3.16}$$

のように書ける。$T_{\rm bath} \ll T$ の場合は、$\Gamma \sim 1/2$、$P_{\rm b} \sim GT/n$、$\mathcal{L}_0 \sim \alpha/n$ であり、$\xi \simeq 2\sqrt{\sqrt{n/2}/\alpha}$ となる。α が大きい場合は、固有ノイズによるなエネルギー分解能は $\alpha^{-1/2}$ に比例して良くなることがわかる。例えば、$\alpha \sim 1000$ では ξ が 0.1 以下にもなる。

実際は読み出し系ノイズ、熱浴の温度揺らぎ、これらとは別の原因のわからないノイズなどによりエネルギー分解能が制限されることがあり、一般的にはエネルギー分解能は式 (3.15) とは異なる依存性を持つ。また、パルス波形がイベントごとにばらつく場合は、S/N 比から計算されるエネルギー分解能より実際のエネルギー分解能は悪化する。

3.1.2 他の処理方法との比較

パルス波形に対してパルスハイトを求めるための処理はいくつかある。代表的なものでは

1. パルスの最大値を波高値として使用
2. パルスの積分値を波高値として使用

があげられる。簡単のため、理想的な TES カロリメータパルスにカットオフ周波数 $f_{\rm C}$ までのホワイトガウシアンノイズが載っているとして、得られるパルスハイトのばらつきを調べてみる。実際のパルス解析ではデータ点は有限であり、サンプリングレート Sr、サンプル長 L が重要なパラメータとなってくる。また、DFT(Digital Fourier Transformation) の要請から、周波数空間は Sr/2 までしか考慮することができない。

以降の議論では、サンプリングレート Sr は十分高く、本来ならデータ点の和で表すべき時間空間での積分をそのまま積分の形で考えてもよいとする。また、カットオフ周波数 $f_{\rm C}$ はサンプリングレート Sr と等しいとする。（以降特にことわらない限り、$H(t)$ は時間空間でのある波形 H を、$H(f)$ は同じ波形をフーリエ変換したものを表すとする。）

パルスを $D(t)$ とし、モデルパルスを $M(t)$、ノイズを $N(t)$、振幅を A とすると

$$D(t) = A \times M(t) + N(t) \tag{3.17}$$

となる。$M(t)$ は

$$M(t) = 0 \qquad (t < 0) \tag{3.18}$$

$$= \frac{\tau_{\rm rise}+\tau_{\rm fall}}{\tau_{\rm fall}^2}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_{\rm rise}}\right)\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau_{\rm fall}}\right) \qquad (t \geq 0) \tag{3.19}$$

とする。このとき $\int_{-\infty}^{\infty} A\, M(t)dt = A$ であり、パルスの積分値が入射エネルギー E と比例するので $A = E\ R$ となる (R は応答関数)。簡単のため $\tau_{\rm rise} > 1/f_{\rm C}$ の時は $\tau_{\rm rise} = 1/f_{\rm C}$ とする。

また $N(t)$ の rms、$\sigma_{\rm t}$ は $N(f) = \sigma_{\rm f}$ とすると

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} N(t)^2 dt = \sigma_{\rm t}^2 = \int_0^{f_{\rm C}} N(f)^2 df \tag{3.20}$$

$$= \sigma_{\rm f}^2 f_{\rm C} \tag{3.21}$$

より

$$\sigma_{\rm t} = \sqrt{f_{\rm C}}\ \sigma_{\rm f} \tag{3.22}$$

となる。

3.1.2.1 最適フィルター処理の場合のエネルギー分解能

最適フィルターの場合は前節のように、

$$\Delta E_{\mathrm{rms}} = \left(\int_0^{f_{\mathrm{C}}} \frac{4df}{\mathrm{NEP}^2(f)} \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.23}$$

$$= E \left(\int_0^{f_{\mathrm{C}}} \frac{2\mathrm{PS}^2(f)}{\mathrm{NS}^2(f)} df \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.24}$$

とおける。ここで E は入射エネルギーである。仮定により $PS(t) = A \times M(t), NS(t) = N(t)$ である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{PS}^2(t) dt = \int_0^{\infty} \mathrm{PS}^2(f) df \tag{3.25}$$

であり、f_{C} は十分に大きいので $\int_0^{f_{\mathrm{C}}} df \approx \int_0^{\infty} df$ としてしまってよい。

$$\int_0^{\infty} \mathrm{PS}^2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} D(t)^2 dt \tag{3.26}$$

$$= A^2 \left(\frac{\tau_{\mathrm{rise}} + \tau_{\mathrm{fall}}}{\tau_{\mathrm{fall}}^2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2t}{\tau_{\mathrm{fall}}} \right) + \exp\left(-\frac{2t}{\tau'_{\mathrm{rise}}} \right) - 2\exp\left(-\frac{t}{\tau_{\mathrm{fall}}} - \frac{t}{\tau'_{\mathrm{rise}}} \right) dt \tag{3.27}$$

$$\left(\frac{1}{\tau'_{\mathrm{rise}}} = \frac{1}{\tau_{\mathrm{fall}}} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{rise}}} = \frac{1+\mathrm{C}}{\tau_{\mathrm{rise}}}, \mathrm{C} = \frac{\tau_{\mathrm{rise}}}{\tau_{\mathrm{fall}}} \right) \tag{3.28}$$

$$= A^2 \left(\frac{\tau_{\mathrm{rise}} + \tau_{\mathrm{fall}}}{\tau_{\mathrm{fall}}^2} \right)^2 \left(\frac{\tau_{\mathrm{fall}}}{2} + \frac{\tau'_{\mathrm{rise}}}{2} - 2\frac{\tau'_{\mathrm{rise}}\tau_{\mathrm{fall}}}{\tau'_{\mathrm{rise}} + \tau_{\mathrm{fall}}} \right) \tag{3.29}$$

$$= A^2 \left(\frac{\tau_{\mathrm{rise}} + \tau_{\mathrm{fall}}}{\tau_{\mathrm{fall}}^2} \right)^2 \frac{(\tau_{\mathrm{fall}} - \tau'_{\mathrm{rise}})^2}{2(\tau_{\mathrm{fall}} + \tau'_{\mathrm{rise}})} = A^2 \frac{1}{2\tau_{\mathrm{fall}}} \frac{1+\mathrm{C}}{1+2\mathrm{C}} \tag{3.30}$$

となる。よって

$$\Delta E_{\mathrm{FWHM}} = 2.35E\frac{N}{A}\sqrt{2\tau_{\mathrm{fall}}} \left(\frac{1+2\mathrm{C}}{1+\mathrm{C}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.31}$$

$$= 2.35E\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{A}\sqrt{2\tau_{\mathrm{fall}}} \left(\frac{1+2\mathrm{C}}{1+\mathrm{C}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.32}$$

3.1.2.2 パルスハイトを用いる場合のエネルギー分解能

M(t) の最大値は $\tau_{\mathrm{rise}}/\tau_{\mathrm{fall}}$ を C とおいて

$$M_{max} = \frac{\tau_{\mathrm{rise}} + \tau_{\mathrm{fall}}}{\tau_{\mathrm{fall}}^2} \times \frac{1}{1+\mathrm{C}} \left(\frac{\mathrm{C}}{1+\mathrm{C}} \right)^{\mathrm{C}} \tag{3.33}$$

とかける。よってエネルギー分解能はおよそ

$$\Delta E_{\mathrm{FWHM}} = 2.35E\frac{\sqrt{f_{\mathrm{C}}}\ \sigma_{\mathrm{f}}}{AM_{max}} \tag{3.34}$$

$$= 2.35E\frac{\sqrt{f_{\mathrm{C}}}\ \sigma_{\mathrm{f}}}{A}\frac{\tau_{\mathrm{fall}}}{1+\mathrm{C}}(1+\mathrm{C}) \left(\frac{1+\mathrm{C}}{\mathrm{C}} \right)^{\mathrm{C}} \tag{3.35}$$

$$= 2.35E\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{A}\sqrt{f_{\mathrm{C}}}\tau_{\mathrm{fall}} \left(\frac{1+\mathrm{C}}{\mathrm{C}} \right)^{\mathrm{C}} \tag{3.36}$$

となる。

3.1.2.3 パルスの積分値を用いる場合のエネルギー分解能

時刻 0 から t_1 まで積分すると

$$\int_0^{t_1} A\ M(t)dt = A\frac{\tau_{\mathrm{rise}}+\tau_{\mathrm{fall}}}{\tau_{\mathrm{fall}}^2}\int_0^{t_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\mathrm{fall}}}\right)-\exp\left(-\frac{t}{\tau'_{\mathrm{fall}}}\right)dt \tag{3.37}$$

$$= A\frac{\tau_{\mathrm{rise}}+\tau_{\mathrm{fall}}}{\tau_{\mathrm{fall}}^2}\left\{\tau_{\mathrm{fall}}\left(1-\exp\left(-\frac{t_1}{\tau_{\mathrm{fall}}}\right)\right)-\tau'_{\mathrm{fall}}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau'_{\mathrm{fall}}}\right)\right)\right\} \tag{3.38}$$

となる。$\sigma=\sigma_1$ と $\sigma=\sigma_2$ のガウシアンを足し合わせると $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ のガウシアンができるので、積分したあとのノイズの rms を σ_{int} と置くと

$$\sigma_{\mathrm{int}} = \sigma_{\mathrm{t}}\sqrt{t_1\ \mathrm{Sr}}\frac{1}{\mathrm{Sr}} = \sigma_{\mathrm{t}}\frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{\mathrm{Sr}}} \tag{3.39}$$

となるので、分解能は

$$\Delta E_{\mathrm{FWHM}} = 2.35E\frac{\sigma_{\mathrm{int}}}{\int_0^{t_1} A\ M(t)dt} \tag{3.40}$$

$$= 2.35E\sqrt{f_{\mathrm{C}}}\ \sigma_{\mathrm{f}}\frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{\mathrm{Sr}}}\frac{1}{A\frac{\tau_{\mathrm{rise}}+\tau_{\mathrm{fall}}}{\tau_{\mathrm{fall}}^2}\left\{\tau_{\mathrm{fall}}\left(1-\exp\left(-\frac{t_1}{\tau_{\mathrm{fall}}}\right)\right)-\tau'_{\mathrm{rise}}\left(1-\exp\left(-\frac{t_1}{\tau'_{\mathrm{rise}}}\right)\right)\right\}} \tag{3.41}$$

$$= 2.35E\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{A}\frac{\sqrt{t_1}}{1-(1+\mathrm{C})\exp(-\frac{t_1}{\tau_{\mathrm{fall}}})+\mathrm{C}\exp(-(1+\mathrm{C})\frac{t_1}{\tau_{\mathrm{rise}}})} \tag{3.42}$$

となる。

3.1.2.4 考察

ここまでの議論をまとめるとそれぞれの処理方法での分解能 (ΔE_{FWHM}) は以下のようになる。
最適フィルター：

$$2.35E\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{A}\sqrt{\tau_{\mathrm{fall}}}\sqrt{2}\left(\frac{1+2\mathrm{C}}{1+\mathrm{C}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2.35E\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{A}H_{\mathrm{opt}} \tag{3.43}$$

パルスの最大値：

$$2.35E\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{A}\sqrt{\tau_{\mathrm{fall}}}\sqrt{\tau_{\mathrm{fall}}\ f_{\mathrm{C}}}\left(\frac{1+\mathrm{C}}{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} = 2.35E\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{A}H_{\max} \tag{3.44}$$

パルスの積分値：

$$2.35E\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{A}\frac{\sqrt{t_1}}{1-(1+\mathrm{C})\exp(-\frac{t_1}{\tau_{\mathrm{fall}}})+\mathrm{C}\exp(-(1+\mathrm{C})\frac{t_1}{\tau_{\mathrm{rise}}})} \tag{3.45}$$

$$= 2.35E\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{A}\sqrt{\tau_{\mathrm{fall}}}\frac{\sqrt{t_1/\tau_{\mathrm{fall}}}}{1-(1+\mathrm{C})\exp(-\frac{t_1}{\tau_{\mathrm{fall}}})+\mathrm{C}\exp(-\frac{(1+\mathrm{C})}{\mathrm{C}}\frac{t_1}{\tau_{\mathrm{fall}}})} = 2.35E\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{A}H_{\mathrm{int}} \tag{3.46}$$

以下の議論では τ_{fall} は $100\mu\mathrm{s}$ で一定とする。また

$$C = \frac{\tau_{\mathrm{rise}}}{\tau_{\mathrm{fall}}} \quad (f_{\mathrm{C}} > \frac{1}{\tau_{\mathrm{rise}}}) \tag{3.47}$$

$$= \frac{f_{\mathrm{C}}}{\tau_{\mathrm{fall}}}, f_{\mathrm{C}} = \tau_{\mathrm{rise}} \quad (\frac{1}{\tau_{\mathrm{fall}}} < f_{\mathrm{C}} < \frac{1}{\tau_{\mathrm{rise}}}) \tag{3.48}$$

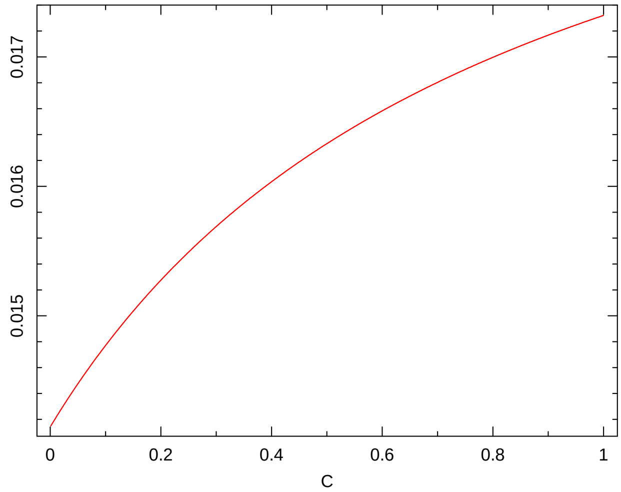


図 3.1: $H_{\mathrm{opt}} = \sqrt{\tau_{\mathrm{fall}}}\sqrt{\tau_{\mathrm{fall}}\ f_{\mathrm{C}}}\left(\frac{1+\mathrm{C}}{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}}$ の変化

と仮定する。

最適フィルターについては、$f_{\mathrm{C}} > 1/\tau_{\mathrm{fall}}$ であれば C の値のみ考慮すればよい事が分かる。C を変えた時の H_{opt} の変化を図 (3.1) に示す。

パルスの最大値については、H_{max} より $f_{\mathrm{C}} \le 1/\tau_{\mathrm{rise}}$ ならば $f_{\mathrm{C}} = 1/\tau_{\mathrm{rise}}$ のとき分解能が最少になることは明らかである。このときの

$$H_{\mathrm{max}} = \frac{\sqrt{\tau_{\mathrm{fall}}}}{\sqrt{\mathrm{C}}}\left(\frac{1+\mathrm{C}}{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \tag{3.49}$$

の変化を図（3.2）に示す。

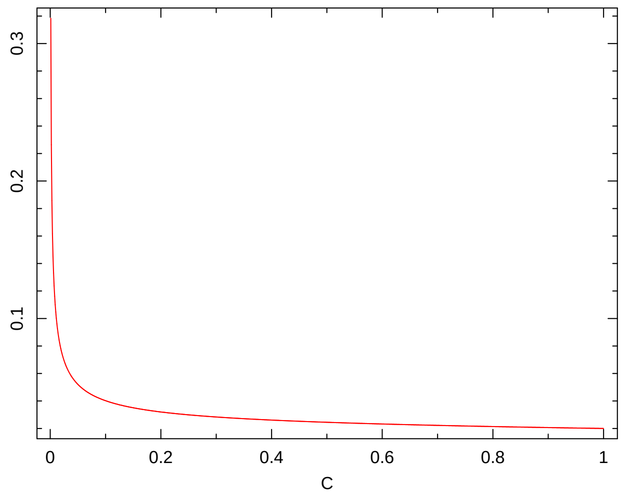


図 3.2: $H_{\mathrm{max}} = \frac{\sqrt{\tau_{\mathrm{fall}}}}{\sqrt{\mathrm{C}}}\left(\frac{1+\mathrm{C}}{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}}$ の変化

パルスの積分値については、$\tau = t_1/\tau_{\mathrm{fall}}$ および τ_{rise} を変化させた時の

$$H_{\mathrm{int}} = \sqrt{\tau_{\mathrm{fall}}}\frac{\sqrt{\tau}}{1-(1+\mathrm{C})\exp(-\tau)+\mathrm{C}\exp(-\frac{(1+\mathrm{C})}{\mathrm{C}}\tau)} \quad (\tau = \frac{t_1}{\tau_{\mathrm{fall}}}) \tag{3.50}$$

の変化を図 (3.3) に示す。

図より、$\tau \sim 1$ の時に最小値をとる事が分かるので、$\tau = 1$ とした時の H_{int} の変化を図（3.3）に示す。

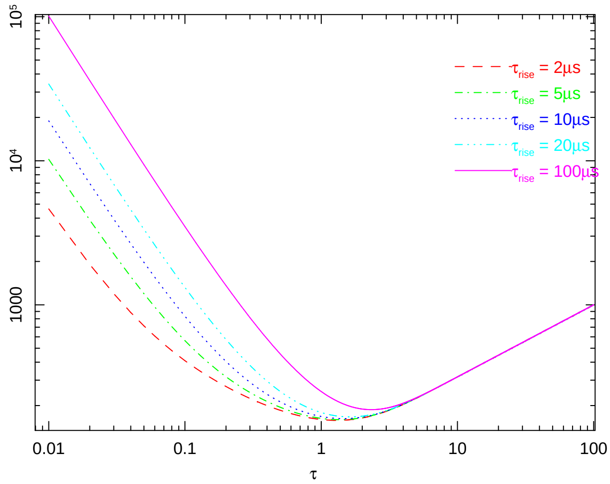


図 3.3: 立ち上がり時定数 τ_{rise}、積分時間 t_1 を τ_{fall} で一般化した値 τ を変化させた時の H_{int} の変化

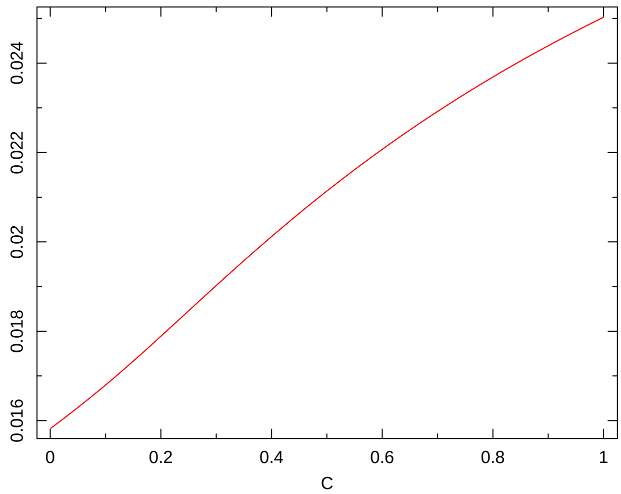


図 3.4: $\tau = 1$ に固定し、C を変化させた時の H_{int} の変化

ここまでの結果をまとめたものを、図（3.5）に示す。この図より、ホワイトガウシアンノイズ、f_C =Sr、$\tau_{\mathrm{fall}} = 100\mu\mathrm{s}$ という条件の下では最適フィルター処理により最も良い分解能を達成できる事が分かる。また、最適な条件のもとでは、積分値をパルスハイトとして用いても、最適フィルターとほぼ同程度の分解能を達成できる事が分かる。

しかし、実際の実験系においては先の条件は成り立たないため、より処理方法の吟味が必要となる。例えば、積分値をパルスハイトとして用いる場合、トリガーのずれや時間分解能以下のずれが大きく影響を与えるため、サンプリングレートを高く設定する方がよい。また、後述するが、最適フィルターは波形の相似を仮定しているため、立ち上がりの時定数がばらつくと分解能が計算値より大きくなってしまう。

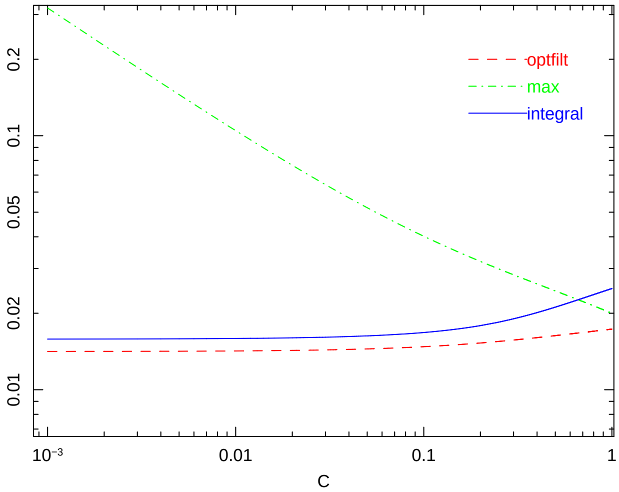


図 3.5: 図 (3.1)、図 (3.2)、図 (3.4) を重ねたもの。

3.2 DC 駆動時のデジタル処理 - シミュレーション

以下のような疑似パルスを作成し、デジタル処理のシミュレーションを行なった。

$$D(t) = A \times M(t) + N(t) \tag{3.51}$$

ここで $M(t)$ は

$$M(t) = 0 \qquad (t < 0) \tag{3.52}$$

$$= \frac{\tau_{\rm rise} + \tau_{\rm fall}}{\tau_{\rm fall}^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\rm rise}}\right)\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\rm fall}}\right) \qquad (t \geq 0) \tag{3.53}$$

である。$N(t)$ は $N(f) = \sigma_{\rm f}$ のガウシアンノイズに一次の $f = f_{\rm C}$ カットオフフィルターをかけたものを使用した。

パラメータとして指定できるものは

1. サンプリングレート (Sr)
2. サンプル長 (L)
3. ADC の分解能 (RES)
4. 立ち上がり、立ち下がりの時定数
5. カットオフ周波数

であり、また時間分解能以下のばらつき[3]も指定できる。なお、±1V の ADC で 0.3keV から 10keV までの X 線を取り込むことを想定しているため 5.9keV の鉄 Kα が最大約 600mV のパルスとして ADC に入ってくると考える。カットオフを実現するために、一度パルスを作成してから、それに対して周波数 $f_{\rm C}$ のローパスフィルターをかけている。

Sr=1MS/s、L=2048、$f_{\rm C}$=500kHz、RES=14bit、$\tau_{\rm rise}$=2μs,$\tau_{\rm fall}$=100μs,A=600[mV]$\times\tau_{\rm fall}$,$\sigma_{\rm f} = 3\times10^{-6}$[V/$\sqrt{\rm Hz}$] の時のパルス波形及びノイズ波形、テンプレートを図（3.6）, 図（3.7）, 図（3.8）に示す。

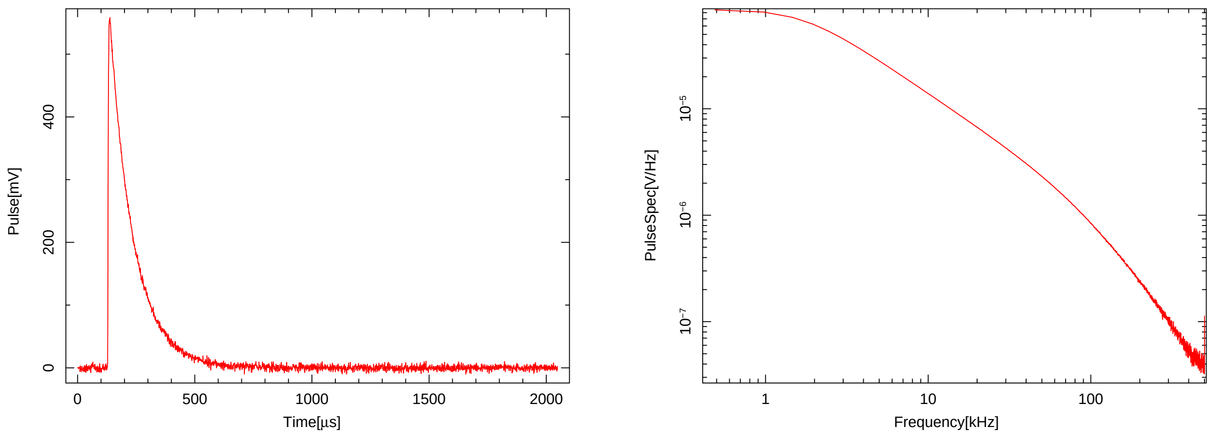


図 3.6: シミュレーションで使用した典型的なパルス及びそのスペクトル

[3]サンプルは離散的であり、パルスが立ち上がる瞬間とサンプルのタイミングには相関がないため。

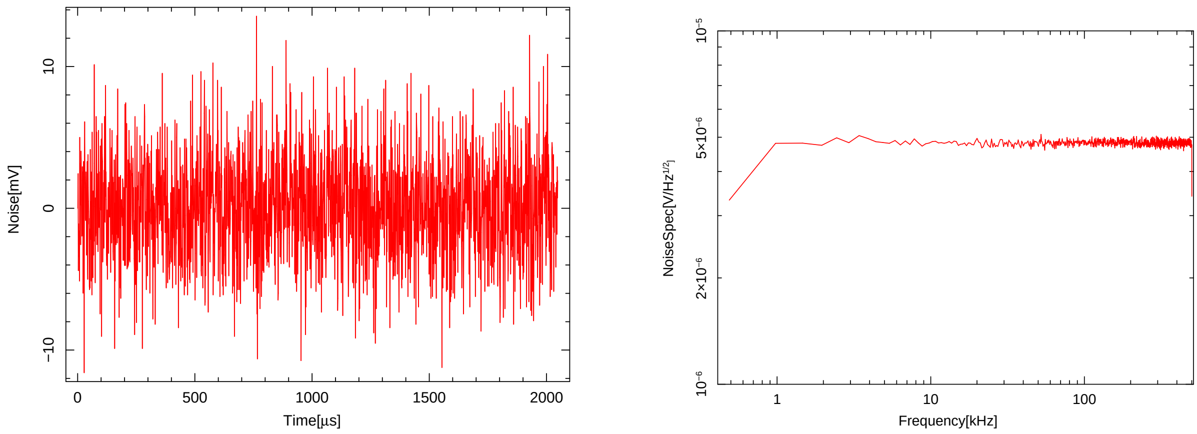


図 3.7: シミュレーションで使用した典型的なノイズ及びそのスペクトル

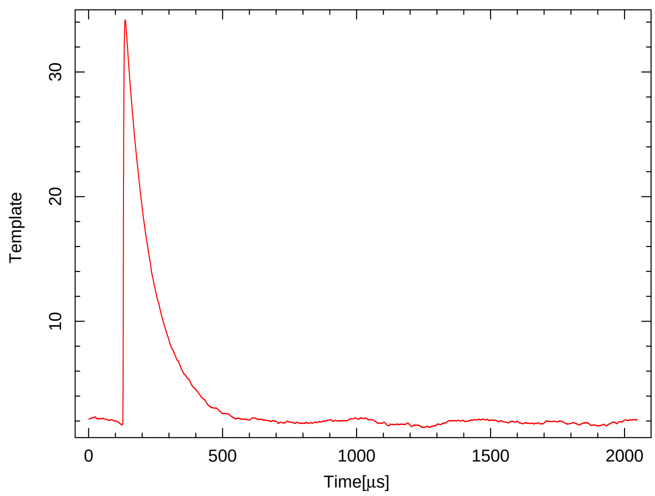


図 3.8: テンプレート

3.2.1 サンプリングレート

f_C=500kHz、RES=14bit、τ_{rise}=2μs,τ_{fall}=100μs,A=600[mV]$\times\tau_{fall}$,$\sigma_f = 3 \times 10^{-6}$[V/$\sqrt{\mathrm{Hz}}$] とし、サンプリングレートを変化させたときの分解能の変化を図（3.9）に示す。なお、実時間でのサンプル時間 (2ms) を変化させないために、サンプル長とサンプリングレートの比は一定 (Sr:L=1000:2048) である。

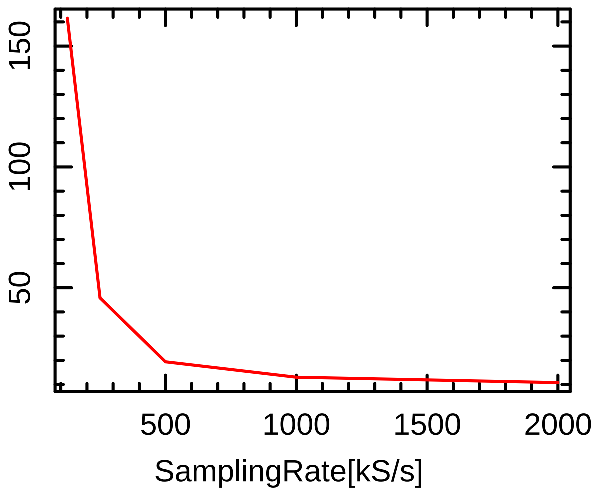


図 3.9: サンプリングレートとエネルギー分解能

サンプリングレート Sr とカットオフ周波数 f_C、立ち上がりの時定数 τ_{rise} の 3 つが複合的に分解能に影響を与えている。f_C >Sr/2(=ナイキスト周波数) の時、ノイズの高周波成分 (>Sr/2) が低周波側に折り返されるため、SN 比が悪くなってしまう。また、実際のノイズはフォノンオイズやアナログ回路の低周波のノイズのため低周波側で大きくなる傾向があるのでホワイトノイズを仮定した場合よりも高周波側が重要になる。そのため、二つ目の折れ曲がりである $1/\tau_{rise}$ をまでは周波数空間があることが望ましい。

3.2.2 サンプル時間 テンプレートへの影響

実時間でのサンプル時間を変化させた時のテンプレートを図（3.10）に示す。実際の処理では、トリガのずれなどが考えられるため、テンプレートを円環状にスライドさせながら積分計算を行なう事となる。そのため、テンプレートの始めのベースラインと終わりのベースラインが異なる場合、正確な値が計算されない可能性がある。また、同じ理由から取得時間中に十分にパルスが立ち下がっている必要があるため、少なくとも τ_{fall} の 10 倍程度の時間、サンプルする必要がある事が図から分かる。

3.2.3 ADC の分解能

ADC の分解能、RES を 8-16bit の範囲で変化させた時の分解能の変化を図（3.11）に示す。8bit 以上の分解能があれば、現在想定しているようなエネルギーレンジの X 線に対して十分対応できる事が分かる。

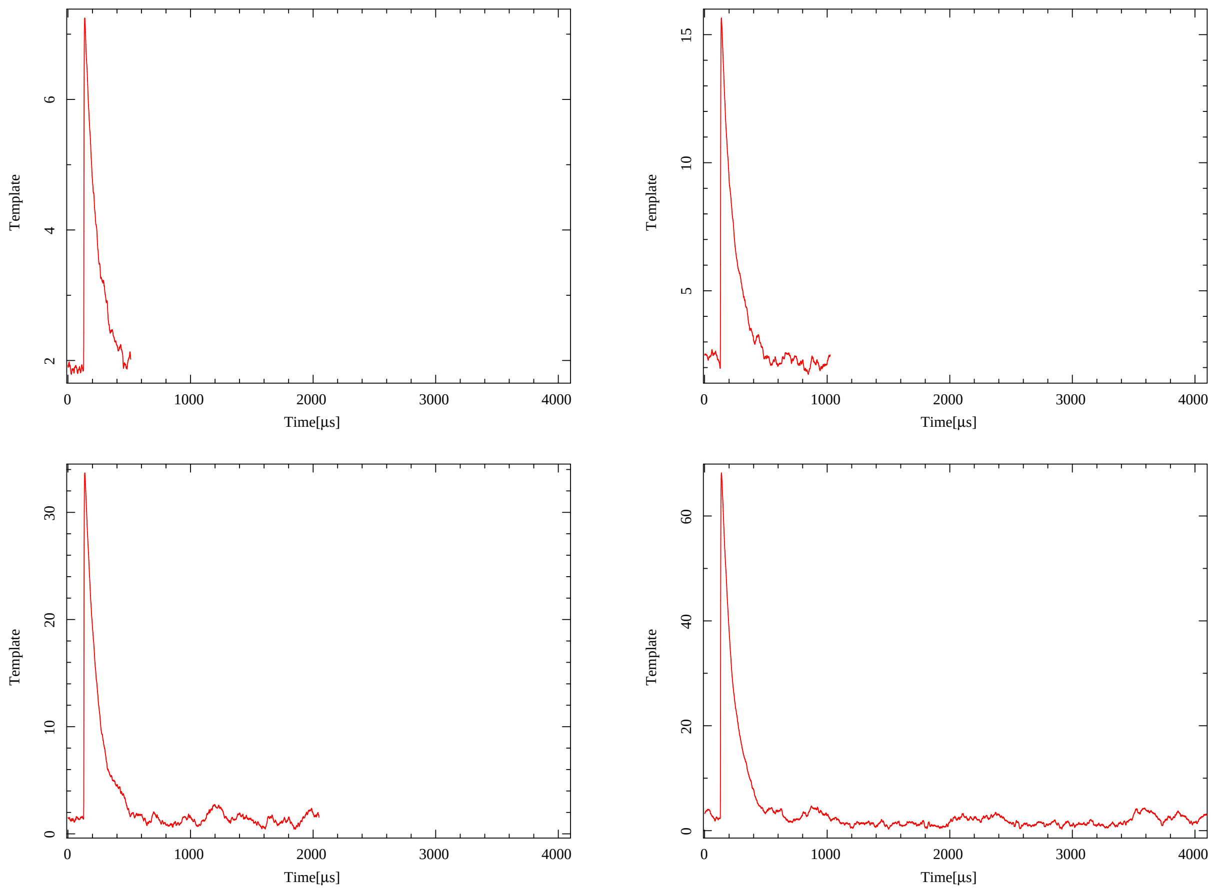


図 3.10: サンプリング時間 T_{sample} を変えた時のテンプレートの変化。τ_{fall}=100μs、イベントの開始からトリガまでは 128μ。左上：T_{sample}=512μ、右上：T_{sample}=1024μ、左下：T_{sample}=2048μ、右下：T_{sample}=4096μ

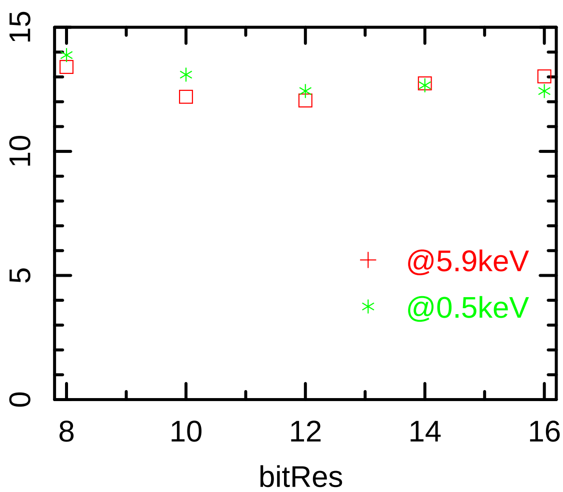


図 3.11: ADV の分解能とエネルギー分解能

3.3 実際の波形に対する議論

ここまで議論してきた事が実際のパルス波形に対してそのまま当てはまるわけではない。最適フィルターは波形の相似を仮定しているため、立ち上がりの時定数のバラツキが分解能を悪化させることとなる。また、ダブルパルスなど、通常のテンプレートが使用できない場合もある。

3.3.1 ダブルパルス

3.3.1.1 処理方法

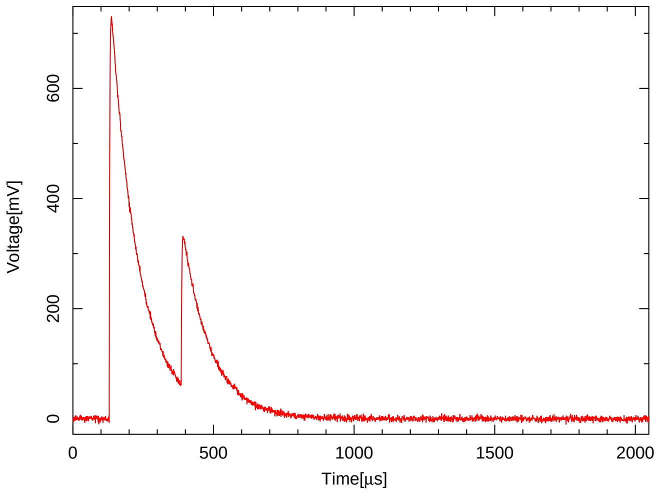


図 3.12: ダブルパルスの例（シミュレーション）

実際にはパルスが十分に立ち下がるまで有限の時間がかかる[4]。そのため、パルスが立ち下がっている途中で他のパルスが立ち上がる、という事態は十分に起こりうる（頻度については 5 章参照）。最適フィルター処理は周波数空間におけるパルスの形が相似であることを仮定しているため、このようなダブルパルスに対して通常のテンプレートを用いた最適処理をほどこすことはできない。そのため、ファーストパルスに対しては通常より短いテンプレートを用いる必要が、セカンドパルス（ラストパルス）に対しては下記のように外挿を用いてファーストパルスの影響を除去する必要がある。

3.3.1.2 セカンド（ラスト）パルスに対する処理 シミュレーション

立ち下がりの時定数は TES により温度の関数として決まる固有なものであり、パルスの大きさには影響されない。そのためセカンドパルスは

$$P_{second}(t) = B\exp\left(-\frac{t}{\tau_{\rm fall}}\right) + AM(t) \tag{3.54}$$

と書ける。$\tau_{\rm fall}$ が予め分かっていれば簡単な最少二乗法で B を決定する事ができるので、$P_{second}(t) - B\exp\left(-\frac{t}{\tau_{\rm fall}}\right)$ に対して最適フィルター処理を施すことによりセカンドパルスのパルスハイトを求めることができる。また、仮に複数の立ち下がりが重なっていても、各々の時定数が等しいので、その合計は結局

[4]最適フィルターはパルスのフーリエ変換を使用しているため、パルス波形を取得する際、最初のサンプルと最後のサンプルのベースラインが同じである事が望ましい

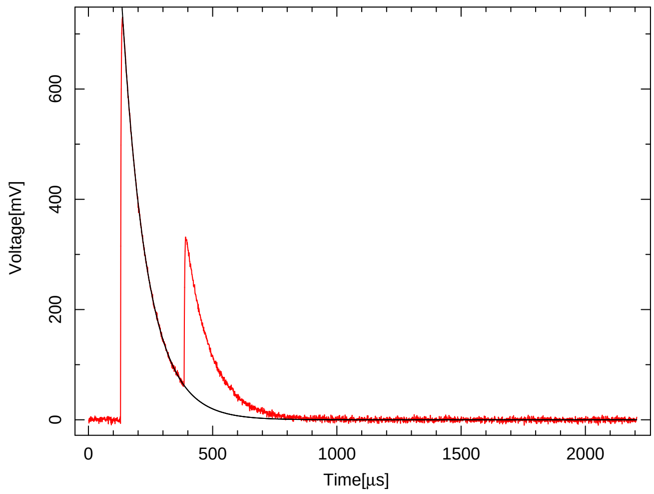
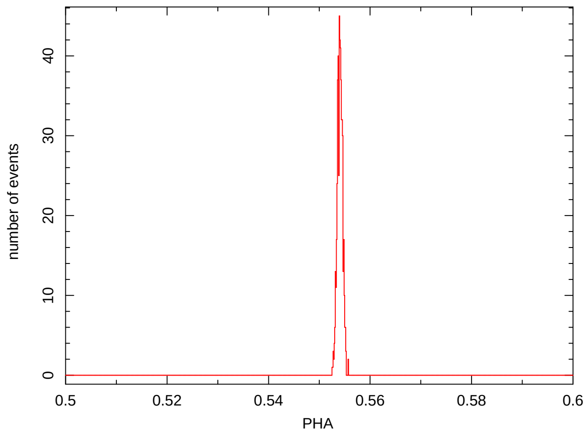


図 3.13: ダブルパルスの例：exponential による外挿（シミュレーション）

$B' \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\rm fall}}\right)$ とかける。そのため、この処理方法はダブルパルスのセカンドパルスだけでなく、立ち下がりの上に乗っているパルスに対して適用できる。

実際の処理では、テンプレート作成の際に各ピクセルごとのアベレージパルスから立ち下がりの時定数を求める事とした。図（3.18）はシミュレーションによりダブルパルスに対する一連の処理を行なった際の PHA、及び同じ条件でのシングルパルスの PHA である (Sr=1MS/s,L=2048,RES=14bit)。この処理方法が有効に機能している事が分かる。



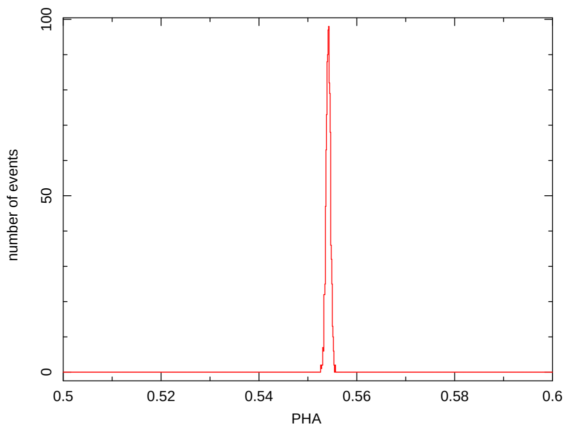


図 3.14: 左：シングルパルスの PHA, 右：ダブルパルスの PHA。それぞれ分解能は 12.1eV,11.1eV である。

3.3.1.3　ファーストパルスに対する処理

ファーストパルスに対しては短いテンプレートを使用する必要がある。逆フーリエ変換によってテンプレートは作られるので、テンプレートの bin 数を N とすれば、Template[0] = Template[N+1] となっている。トリガ判定がずれている場合、テンプレートを数 bin ずらしてから最適フィルターをする必要があるが、この循環的なテンプレートの性質により、パルス波形が十分に立ち下がっていれば bin シフトを行なっても問題ない。しかし、ファーストパルスの場合は、十分に立ち下がっていない状態で次のパルスが立ち上がる可能性があるため、特別の処理が必要となる。

まず、1MS/s,2048 サンプルのパルスとノイズを下に作成したテンプレートの前 1024 サンプルだけを使用し最適フィルター処理を行なってみた。得られた pha が図（3.15）である。

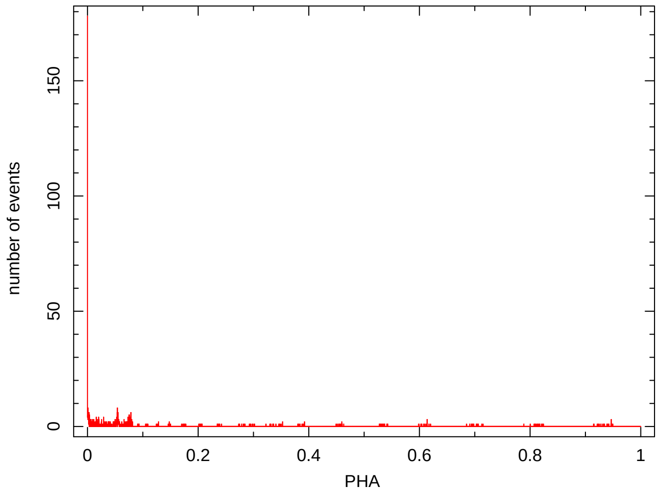


図 3.15: テンプレートを部分的に使用した場合の PHA

この結果はテンプレートがパルスのフーリエ変換を使っていることを考えれば当たり前である。

次に、始めからサンプル数を減らして作成したテンプレートを使って最適フィルター処理を行なった。サンプリングレートは 1MS/s, でサンプル数のみ 256,512,1024 サンプルと変えた。

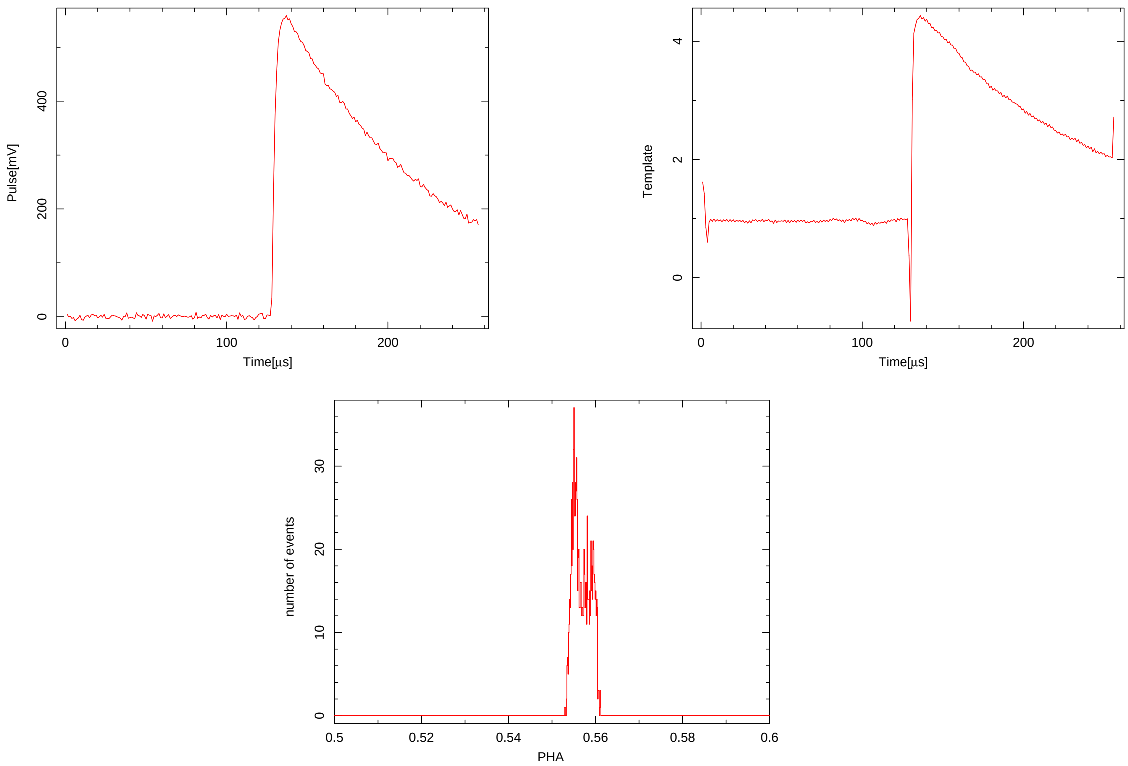


図 3.16: サンプル数 256。左上：パルス波形、右上：テンプレート、下：PHA

1024 サンプルの場合は立ち下がりきれているので十分な分解能を得られているが、512,256 サンプルと取得時間が短くなり、パルスが立ち下がりきれなくなるに従い分解能が悪化していくことがわかる。実際の

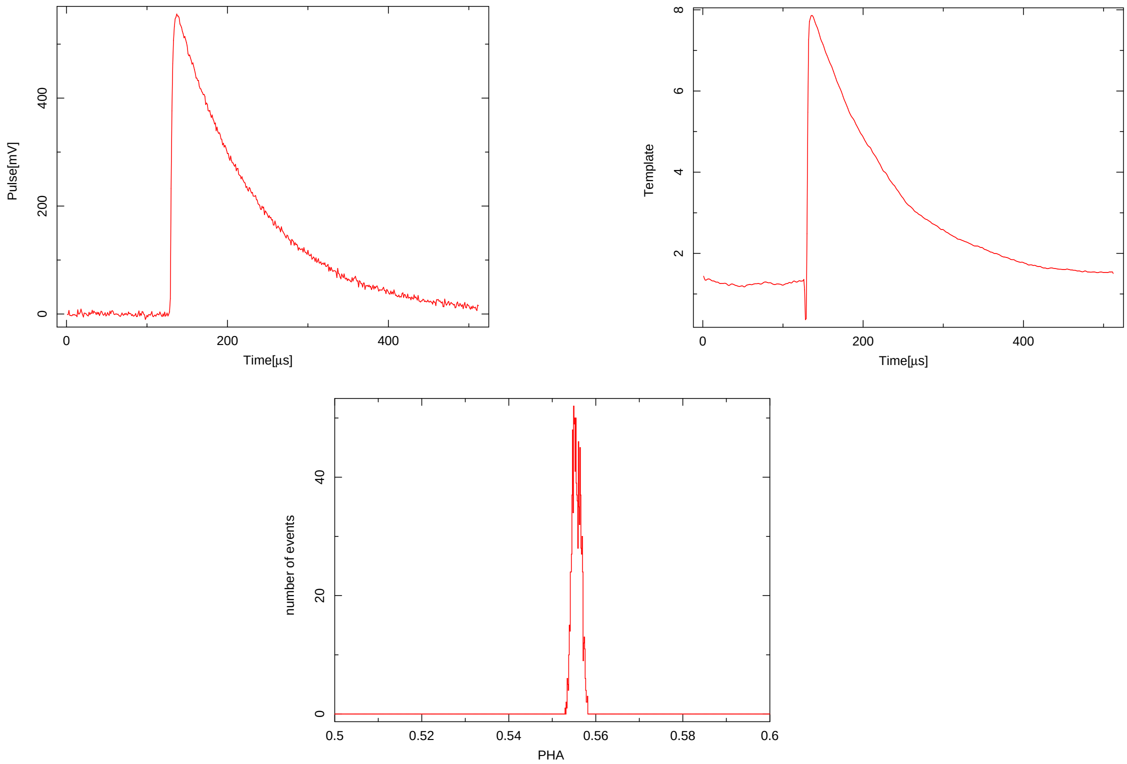


図 3.17: サンプル数 512。左上：パルス波形、右上：テンプレート、下：PHA

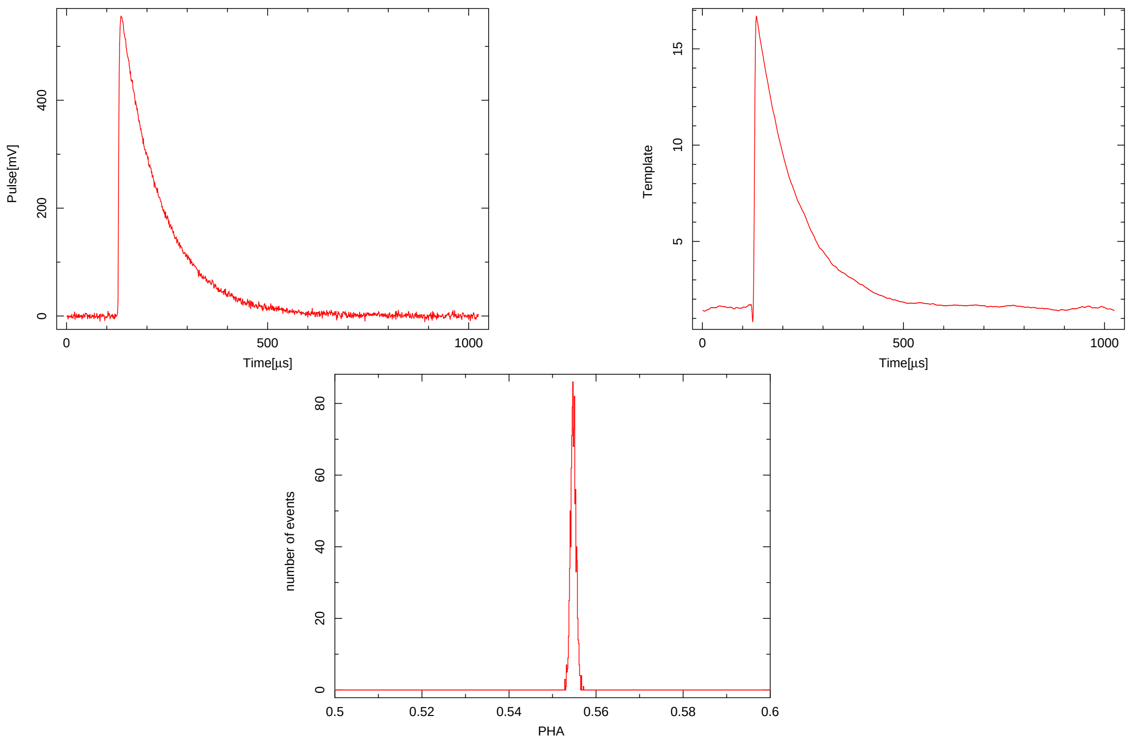


図 3.18: サンプル数 1024。左上：パルス波形、右上：テンプレート、下：PHA

処理の際は、立ち下がりの時定数とカウントレートから計算し、いくつかのショートテンプレートを使い分けていく必要がある。

3.3.2 立上りのばらつき

3.3.2.1 処理方法

ここまでパルス波形が全て相似であるという仮定の元で議論を進めてきたが、実際の立ち上がり波形はTES への入射位置に依存しており、数%から 10 %程度のバラツキがある。これは実験結果及び有限要素法を用いたシミュレーションの両方で確かめられている（吉田修論、吉野修論）。

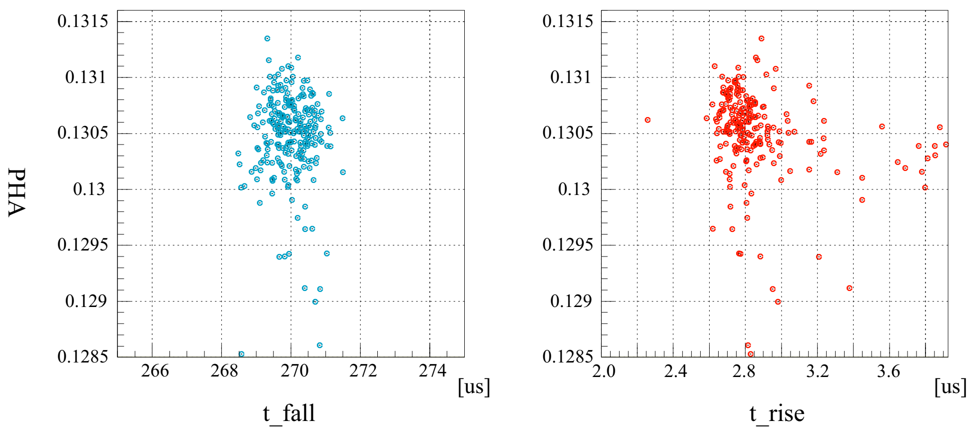


図 3.19: 左：立ち下がり時定数のばらつきと PHA の相関、右：立ち上がりの時定数のばらつきと PHA の相関。(吉田修論より)

立ち上がりを exponential で近似することは有用ではあるが、実際は入射位置や温度などに依存した複雑な関数である。この問題に対するアプローチとしては

1. 立ち上がり波形に対してそれぞれ厳密に最適フィルターを作成し適用する
2. テンプレート作成の際に、立ち上がりの影響を減らすために cut off 周波数を設ける。
3. 立ち上がり波形の時定数よりも遅い時定数を持った LowPassFilter を回路中に作成することにより立ち上がりのばらつきを減らす

という選択肢が存在する。

１の選択肢については、立ち上がり波形に対して解析的な議論が不可能なためエネルギー、入射位置を考慮した厳密な最適フィルターを作成する事が困難であること、さらに、リアルタイム処理を考える場合、処理工程が増えることは好ましくないことを考えるとあまり現実的とは言えない。

２が現在、我々のグループ内の波形処理で行なわれている手法である。最適フィルター処理自体は時間空間で行なわれるが、周波数空間での相似を仮定しているので、cut off をかけることによりある周波数より上の周波数については影響を少なくする事ができる。立ち上がりの時定数は $< 10\mu s$ であり立ち下がりの時定数より十分短いため実用に適する。

３は現在主流となっている方法であり、我々のグループでも採用を検討している。

これらは回路側からの解決方法であるが、素子製作という観点からも

1. 吸収体の熱伝導率をあげることにより入射位置によるばらつきを無くす。

という解決方法があり、我々のグループでもビスマスと金の多重化など吸収効率と比熱を維持したまま熱伝導率を上げる試みがなされている。

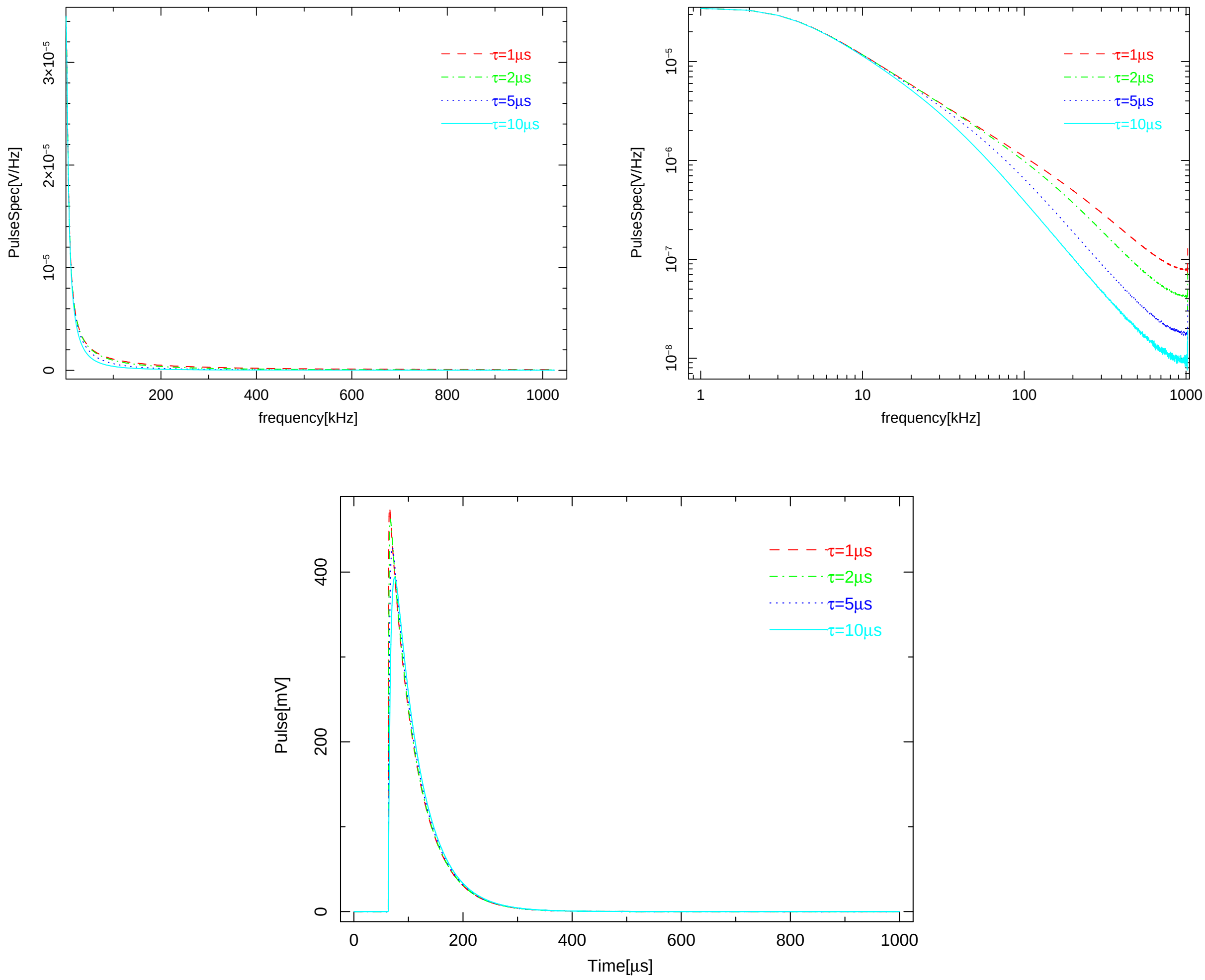


図 3.20: パルスの立ち上がり時定数を変えた時の概形の変化。左上：周波数空間 (linear)、右上：周波数空間 (log)、下：時間空間

3.3.2.2 シミュレーション

立ち上がりが exponential であり、その時定数が中心値 2μs、σ=0.1μs のガウシアン分布をしていると仮定してそれぞれの処理方法での分解能の変化を調べた。

表 3.1: 処理方法と分解能

処理方法	カットオフ周波数 f_c[kHz]	分解能 ΔE [eV]
カットオフのみ	50	10.99
	250	10.84
	500	12.54
	1000	14.86
テンプレートのカットオフのみ	10	15.43
	200	12.42
	500	12.39
積分	100[μ s]	15.57

実際にはノイズの中で、クリティカルダンピングの影響を受けるのは TES 起源のフォノンノイズやエクセスノイズだけであることに注意する必要がある。

現在は各パルスの max ビンが同じビンとなるように全体をシフトしてから、単純な足し算を行なってアベレージパルスを作成している。パルスの立ち上がりがばらついている場合について周波数空間で考えると、図（3.20）のようにバラツキの影響を受ける高周波側は無視して低周波側に重みを置いた方がよい。しかし、max ビンは立ち上がりの時定数の影響を受けるため、上記のような方法では立ち上がりのバラツキの影響を強く受けた、アベレージパルスができてしまう可能性がある。今後は周波数空間での足し合わせを考慮に入れる必要がある。

3.4 AC 駆動に向けて

TES カロリメータのアレイ化を目指す場合、各 TES カロリメータと読みだし系を結ぶ配線からの熱流入を考慮に入れなくてはならない。特に現在、我々が目指している 1024 素子のアレイ化の場合、一つの素子につき一系統の配線を行なうと、冷凍機の冷却能力を熱流入が上回り素子の動作温度を保つ事が難しくなる可能性がある。また、軌道上では冷媒の補充が不可能なため、熱流入を減らす事により観測装置の寿命を伸ばすことができる。これらの要請から、一系統のラインで複数の素子を読み出す方式が研究されている。

代表的なものは、各素子からの信号を時間ごとに区切り読み出す時分割方式と $\sim$MHz の変調をかけることにより周波数空間で分割する周波数分割方式である。我々のグループでは周波数分割方式を研究しており、2 素子の同時読みだしには成功している（市坪修論）。しかし、目標とする 8 素子同時読みだしまで課題は多い。

デジタル処理の観点から AC 駆動を考えると、復調が問題となる。復調以降の処理は DC 駆動と変わらないが、低周波数で変調された信号を復調する場合、自身の信号と干渉が起こってしまい復調後の波形がバラツクという問題があった。この問題に対して、私は自己撞着的な手法でバラツキを減らす方法を考案した。本修士論文は主に DC 駆動のシステムを扱っているため、この手法については付録 B に載せる。

第4章 SpaceWire-次世代信号処理系

科学衛星では観測装置をはじめ、姿勢制御装置、通信装置、各種センサ、データ処理装置などさまざまな機器の間でデータ通信を行なう必要がある。現状では、衛星上の装置間通信のためのハードウェア開発は、それぞれの装置の機能設計と同時に行なわれることが多い。このような設計手法では各装置にとって最適な通信ハードウェアを作成することができる反面、時間、コストが増大する。また、この最適化はあくまで衛星に固有のものとなるので、資産の継承ができない。このような問題を打開するべく、従来より衛星の装置間通信における統一規格が検討されてきた。

この中で SpaceWire は現時点で最も有力な規格である。SpaceWire はもともと、欧州宇宙機関 (ESA) により IEEE1355 をベースに宇宙用の標準規格として提案された。現在、SpaceWire の規格策定には、ヨーロッパをはじめ世界中の宇宙機関や企業が参加しており、日本からも JAXA/ISAS や大阪大学などが参加している。

4.1 SpaceWire

SpaceWire は高速シリアル通信規格の一種であるが、データ転送レートは 2 400Mbps と可変である。そのため様々な機器に柔軟に対応することが可能である。SpaceWire からの信号伝送では LVDS(Low Voltage Differential Signaling) と呼ばれる伝送方式が用いられている。この方式は低電圧の差動信号を用いることにより、高速通信、低消費電力ながらノイズに強く、信号線からのノイズ輻射も少ない。また、Data-Strobe(DS) encoding と呼ばれる方式を採用しているため、Data 信号と Strobe 信号の XOR をとることにより Clock を再現することが可能となっている (図 4.1)。

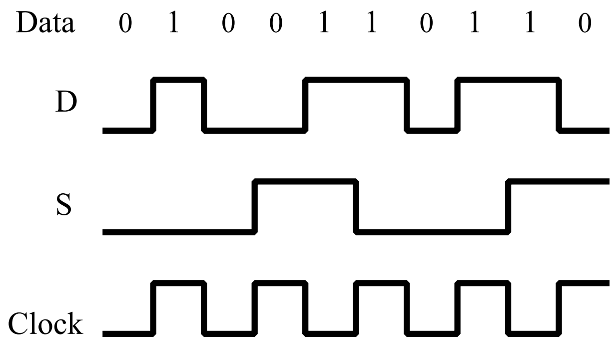


図 4.1: Data-Strobe(DS) encoding

SpaceWire に用いるケーブルは,Data,Strobe が入出力合わせて 2 組で構成されている。それぞれの信号線は、2 本のケーブルを強くよりあわせたツイステッドペアになっており、ノイズに強い構造となっている。ケーブルは最大で 10m 以上延ばすことができるため、衛星上での自由な機器配置が可能である。また、使用されるコネクタは 9 ピンの D-sub コネクタを使用している。

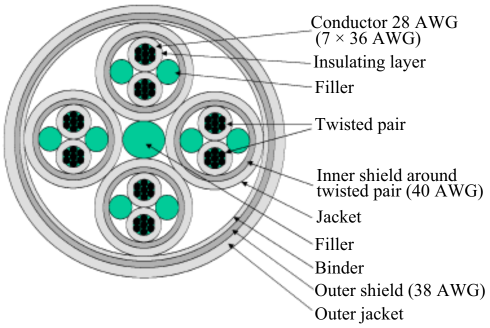


図 4.2: SpaceWire ケーブルの構造

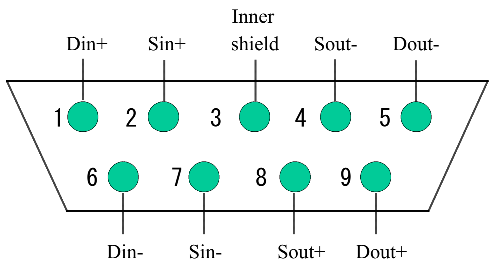


図 4.3: コネクタのピンアサインメント

SpaceWire 上を流れるデータは、宛先情報を含むヘッダと転送情報を結合させたパケットの形でやりとりされる。そのため、SpaceWire はルーティング機能を持たせることが可能であり、ルータを組み合わせることによりメッシュ状ネットワークを構成することができる。このことにより回線の途絶や混雑時に迂回ルートを使うこともでき信頼性の高いシステムを構築することができる。パケットにはエラー判定コードが自動的に付加されるため通信中でのデータの破損にも対応できる。また、転送レートが足りない場合は、複数の回線を同時に使用することで、より高速な転送を行なうことも可能である。

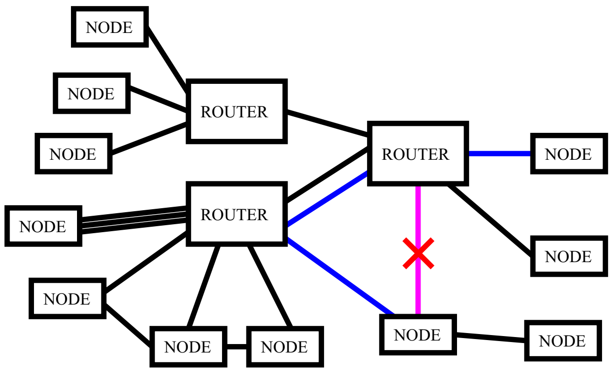


図 4.4: SpaceWire ネットワーク

SpaceWire で接続された装置の情報には、リモートメモリアクセスと呼ばれる手法により、メモリマップド I/O でアクセスすることが可能である。コンピュータの CPU がメモリ上のデータを読み書きする場合、アドレスによりメモリ上の場所を指定している。CPU が周辺機器と接続される場合、CPU が I/O 専用のレジスタを持つ場合もあるが、メモリと同じアドレス空間上に周辺機器のレジスタを配置し、メモリにアクセスするのと同じ手順で周辺機器の情報にアクセスする方法をメモリマップド I/O と呼ぶ。SpaceWire に接続された機器は自分のバスに接続された機器のようにメモリマップド I/O によるアクセスが可能となる。この機能の実現位は、簡便なプロトコルチップを用いれば良く、CPU を持たない機器も SpaceWire のネットワークに接続することができる。

以上のように SpaceWire は様々な機器に柔軟に対応でき、信頼性も高い。SpaceWire を用いた科学衛星開発では、通信インターフェイスの開発とそれぞれの機器開発を完全に分離することができ、各機器は互

いに干渉すること無く、容易に相互接続することができるようになる。さらに、プロトコルが簡便なことから、必ずしも専用のデバイスを用意する必要はなく、FPGA と LVDS のインターフェイスさえあればよい。そのため、非常に低コストで実現することができる。このような特徴から、車載機器や通信機器業界からの関心も高く、民生機器への応用も期待される。

4.2 SpaceCube

SpaceCube は、SpaceWire の開発プラットホームとして開発された超小型 PC で、JAXA/ISAS とシマフジ電機により開発された。CPU には MIPS アーキテクチャを持つ VR5701 を搭載し、一般的な PC の機能に加えて SpaceWireIO ポートを 3 つ搭載している。T-Engine が搭載されており、キーボード、マウス、ディスプレイなどを接続すると、普通の PC としても使用できる。SpaceCube は民生機器の技術を多用しており、非常に低コストで SpaceWire のテスト環境を実現している。

Linux の場合は全てのプロセスが OS によって厳密に管理されているため、例えば割り込みが入った場合でも、OS の影響によりプロセスに割り込みが伝わるタイミングにずれが生じる場合がある。そこで OS として Linux よりもリアルタイム性に優れた T-Kernel を使用した方が、高度なタイミング制御が必要な組み込みき機器としては有利である。開発環境としては TeaCube を使用しており Linux 環境上でクロスコンパイルが可能となっている。

モニタ等を繋げ単独で使用することもできるが、実際には Linux マシンと RS232C のクロスケーブルで接続し gterm を用いて操作する。

CPU	VR5701 266MHz,333MHz,(399MHz)
Flash ROM	1GB
InPut/OutPut	IEEE1355(SpaceWire),RTC CF(TrueIDE),XGA(1024×768) USB1.1,LAN(100BASE),Audio(Sereo) RS232C,JTAG I/F(Debug)
Power	DC +5V
Size	52×52×55[mm](本体のみ) 65×65×100[mm](パーツ装着時)

表 4.1: SpaceCube の仕様

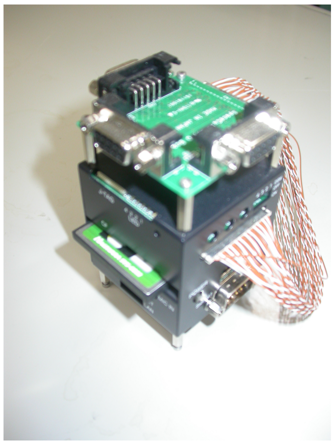


図 4.5: SpaceCube の写真

4.3 SpaceWireIO ボード

SpaceWireIO ボードは、SpaceWire に加え様々なデータポートを備えており、周辺機器からのデータを集積、処理し SpaceCuba に転送する。2 個の FPGA(Xilinx 社製 Spartan-3 シリーズ XC3S1000 FTG256,XC3S400 FTG256) を搭載して、一方 (通称 SpaceWireFPGA) には SpaceWire の機能が実装されている。もう一方の FPGA (通称 UserFPGA) は、ユーザが独自の回路を書き込むことが出来、処理内容に合わせてロジックを構築することにより汎用的な運用を行なうことが出来る。

現在、大阪大学の能町教授を中心として、UserFPGA 内のバス環境や SpaceWireFPGA とのデータ転送ロジックが構築されており、各ユーザはモジュールを作成するだけでバス転送等を利用することが可能となっている。また、同時に SpaceCube 上で動作する SpaceWire 関連ソフト及びライブラリも開発されてお

り、アドレスを指定するだけで UserFPGA 内のデータを SpaceCube に転送することが可能となっている。

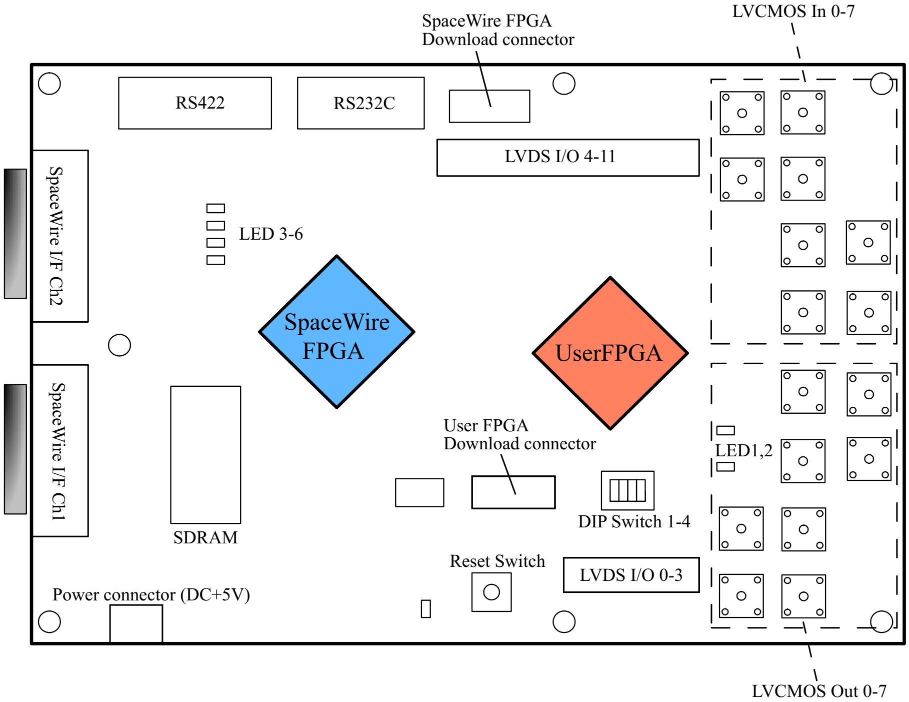


図 4.6: SpaceWireIO ボードの配置図

FPGA	Xilinx Spartan-3 XC3S1000 FTG256
	Xilinx Spartan-3 XC3S400 FTG256
InPut/OutPut	SpaceWire I/F ×2ch
	RS232C
	RS422
	LVDS I/O ×12ch
	LVCMOS I/O ×8ch
Power	DC +5V
Global Clock	48MHz
SDRAM	128MB(2007.1.5. 現在
	UserFPGA からのアクセスは不可)
その他	LED×6
	DIP Switch×4
	Reset Switch
Size	180×100×25[mm]

表 4.2: SpaceWireIO ボードの仕様

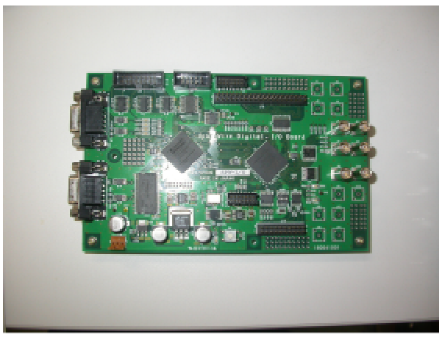


図 4.7: SpaceWireIO ボードの写真

4.3.1 FPGA

通常デジタル信号を処理するための回路は、標準ロジック IC などと呼ばれる IC を多数並べて作る。しかし、実装面積が大きくなり、高速な動作が難しいといった問題がある。そこで、特定用途向けの集積回路である ASIC(Application Specific Integrated Circuit) が使われる。ASIC を作ることで、回路を一つの集積回路に収めてしまい、省面積化、高速化を実現することができる。しかし、このような ASIC は半導体向上で製造されるため、開発に時間がかかり、工場の設備を使用するために莫大なコストもかかる。そのため、ASIC 開発段階での試作や、小量の ASIC しか使用しない場合、その度に半導体工場で LSI を生産するのは非現実的である。また、製造された LSI の中身は書き換えることが出来ないため、後から回路を修正したりすることは不可能である。そこで、ユーザが自由に回路を書き換えることのできるデバイスとして開発されたのが FPGA(Field Programmable Gate Array) である。同じように回路を書き換えることのできるデバイスとして CPLD(Complex Programmable Logic Device) と呼ばれるものもあるが、両者では内部構造や書き込める回路規模に違いがあり、一般に FPGA の方がより大規模な回路を書き込むことができる。初期の頃の FPGA は性能が悪く、非常に高価であったため ASIC 開発時の試作や研究にのみ用いられていたが、現在では性能も上がり安価になったため、実際の製品に組み込まれて使用されることも多く、人工衛星でも既に使われている。

ここでは Xilinx 社の FPGA である Spartan-3 シリーズを例に説明するが、基本的な構造はどこの製品でも同じである。FPGA には

1. ロジックセル 及び コンフィギャブル ロジックブロック (CLB)
2. 入出力ブロック (IOB)
3. ブロック RAM
4. 乗算ブロック 18×18bit
5. デジタルクロックマネージャ(DCM)

が基板上に設けられており、それらの間を内部配線が結合することにより目的とするロジックを実現している。

ロジックセルは 4 入力のルックアップテーブル (LUT) と D フリップフロップから成り、ルックアップテーブルを変更することにより様々なロジックを実現している。このロジックセルを 9 個集めたものがロジックブロックである。Spartan-3 XC3S400 には全部で 896 のロジックブロックが存在している。

入出力ブロックはボードの外縁部に位置し、外部との信号のやりとりをおこなう。Spartan-3 では LVCMOS、LVDS、LVTTL など多数の信号入力に対応している。

ブロック RAM はデータ保持機能を有し（36kB)、乗算器は 18bit の乗算が可能である。回路全体及び局所的なクロックはクロックマネージャにより供給される。

一般的な FPGA の場合、書き込まれた回路の情報は SRAM(Static Randam Access Memory) のアーキテクチャにより保持される。SRAM は電源を切ると情報を失ってしまうという特徴があるため、FPGA は電源を入れ直すたびに回路情報を書き込む必要がある。そこで、外部に回路情報を記憶した ROM(コンフィグレーション ROM) を実装し、電源投入時に自動的に回路情報を読み込むようにして使われることが多い。SpaceWireIO ボード上の FPGA も同様のである。そのため FPGA を書き換えるためには、コンフィグレーション ROM を書き換える必要がある。Spartan シリーズに用いられるコンフィグレーション ROM は EEPROM(Electronically Erasable and Programmable Read Only Memory) の一種である Flash Rom である。

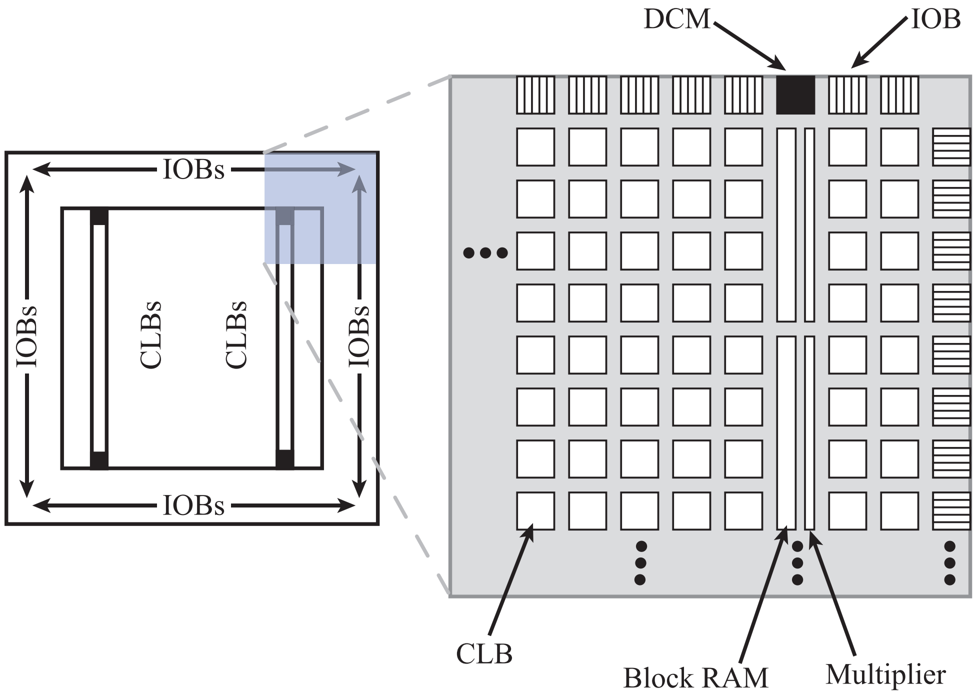


図 4.8: FPGA の内部構造

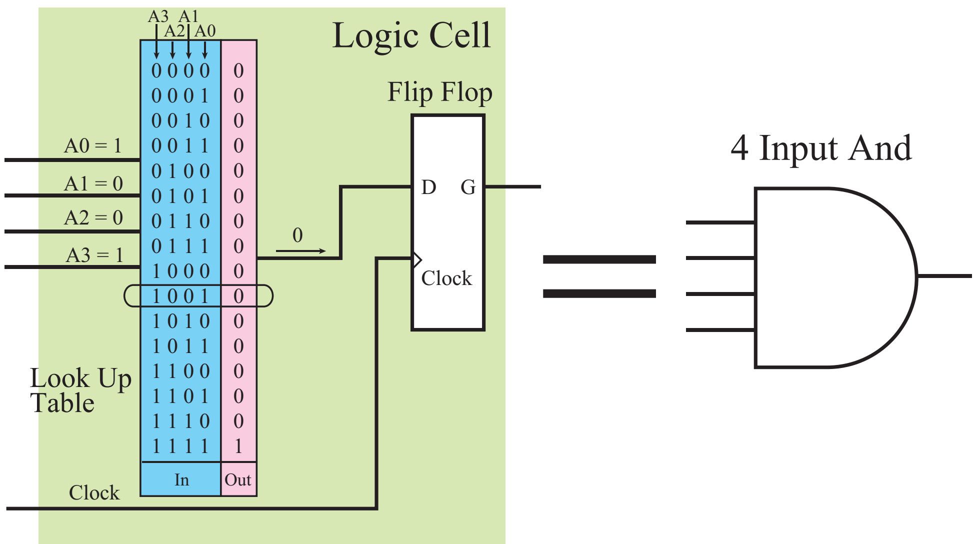


図 4.9: ロジックセルの内部構造の例（4 入力 AND と等価回路の場合）

4.3.2 VHDL

従来、ASIC や FPGA などの設計では、AND や OR などのロジックゲートを組み合わせた回路図を描いて目的の動作を記述する、回路図入力が用いられてきた。しかし、回路時入力では手間がかかる上、目的の動作を実現するために複雑な論理式を考える必要もあった。そのため、設計期間が長くかかり、途中からの回路変更も容易ではなかった。そこで、回路の動作をコンピュータプログラム言語のように記述できる、ハードウェア記述言語 (HDL:Hardware Description Language) が考案された。HDL を用いることにより、回路の動作を機能で表現することができ、複雑な論理式を考えなくても回路を設計することが可能となった。その結果、開発期間を大幅に短縮でき、設計の変更も容易に行なえるようになった。

現在最も普及している HDL には VHDL と Verilog HDL があるが、本研究では VHDL(Very High Speed Integrated Circuit HDL) を用いた。もともと VHDL は米国防総省によって提案されたものであるが、その後米国電機電子技術社協会 (IEEE) により標準化され、現在では世界に広く普及している。VHDL は記述能力が高く、システム全体のアーキテクチャからロジックゲートレヴェルの記述にまで対応している。VHDL を実際に ASIC や FPGA の回路を記述するのに用いる場合は、RTL(Register Transfer Level) と呼ばれるレヴェルで記述する。RTL では CAD ツールにより VHDL の記述から自動的にロジック回路を生成（論理合成）することができる。また RTL より抽象度の高い記述レヴェルは、システム全体のアーキテクチャのシミュレーションや、アルゴリズムの検証などに用いられる。現在、より抽象度の高い記述から直接回路を合成する研究も行なわれているが、まだ一般的ではない。以下に VHDL によるロジックゲートの記述の例を示す。

```
library IEEE;
use IEEE.std_logic_1164.all;

entity gates is
  port( A : in std_logic;
        B : in std_logic;
        Y1 : out std_logic;
        Y2 : out std_logic;
        Y3 : out std_logic;
        Y4 : out std_logic );
end gates;

architecture RTL of gates is
begin
        Y1 <= A and B;
        Y1 <= A or B;
        Y1 <= A nand B;
        Y1 <= A xor B;
end RTL;
```

前述のように VHDL での記述を実際の FPGA の回路設計に用いる場合、論理合成をする必要がある。現在では、多くの FPGA メーカが自社のデバイスに対応した開発環境を無償で提供しており、開発環境に論理合成ツールが含まれている。また、シミュレータを用いれば設計した回路が正しく動作するかを事前に検証することもできる。本研究では Xilinx 社の開発環境である ISE Project Navigator ver8.2i を使用した。

第5章 処理系の製作と評価

5.1 TEM 用 TES カロリメータシステム

5.1.1 透過型電子顕微鏡 TEM(Transmission Electron Microscope)

光学顕微鏡の分解能[1]（2 つの点が「2 つの点」として分離して観察される最短の距離）の限界は、可視光線の波長 (~500nm) によって理論的に 100 ナノメートル程度に制限されており、それより小さな対象（例：ウイルス）を観察することはできない。一方、電子顕微鏡では、電子線の持つ波長 (=h/p~4nm@加速電圧 100kV) が可視光線のものよりずっと短いので、理論的には分解能は 0.3 ナノメートル程度にもなる（透過型電子顕微鏡の場合）。光学顕微鏡では見ることのできない微細な対象を観察（観測）できるのが利点である。現在では、高分解能の電子顕微鏡を用いれば、原子レベルの大きさのものを観察（観測）可能である。電子顕微鏡には、大きく分けて下記の 2 種類がある。

○走査型電子顕微鏡 (Scanning Electron Microscope; SEM)
観察対象に電子線をあて、そこから反射してきた電子 (または二次電子) から得られる像を観察する顕微鏡。走査型の名は、対象に電子線を当てる位置を少しずつずらしてスキャン (走査) しながら顕微鏡像が形づくられることから。電子は検出器に集められ、コンピュータを用いて 2 次元の像が表示される。対象の表面の形状や凹凸の様子、比較的表面に近い部分の内部構造を観察するのに優れている。観察対象が導電性のないものの場合、電子線をあて続けると表面が帯電してしまい、反射する電子のパターンが乱れるため、観察対象の表面をあらかじめ導電性を持つ物質でうすくコーティングしておくことが行われる。○透過型電子顕微鏡 (Transmission Electron Microscope; TEM)
観察対象に電子線をあて、それを透過してきた電子を拡大して観察する顕微鏡。対象の構造や構成成分の違いにより、どのぐらい電子線を透過させるかが異なるので、場所により透過してきた電子の密度が変わり、これが顕微鏡像となる。電磁コイルを用いて透過電子線を拡大し、電子線により光る蛍光板にあてて観察したり、フィルムや CCD カメラで写真を撮影する。観察対象を透かして観察することになるため、できるだけ薄く切ったり、電子を透過するフィルムの上に塗りつけたりして観察する。

今回 TES マイクロカロリメータシステムが組み込まれるのは透過型電子顕微鏡である（図 5.1）。電子顕微鏡では、高エネルギーの電子が対象物質の電子を衝突励起することにより特性 X 線が放射される。この X 線を X 線分光器で解析することにより、対象物質の像だけでなく構成要素を知ることができる。また TES マイクロカロリメータであれば、酸化などの化学的な変化による 1eV 程度のエネルギーシフトを検出することも可能である。なお 0.3-10keV のエネルギー帯域には主要な元素の K 線や L 線があるため、この帯域に対して十分な感度があれば各成分を解析する事が可能となる。

今回のシステムは宇宙用のシステムと比較してピクセル数は少ないがカウントレートは高い。そのため、

[1]望遠鏡における分解能は 2 点として分離される最少の角度を表すため顕微鏡の分解能とは定義が異なる。

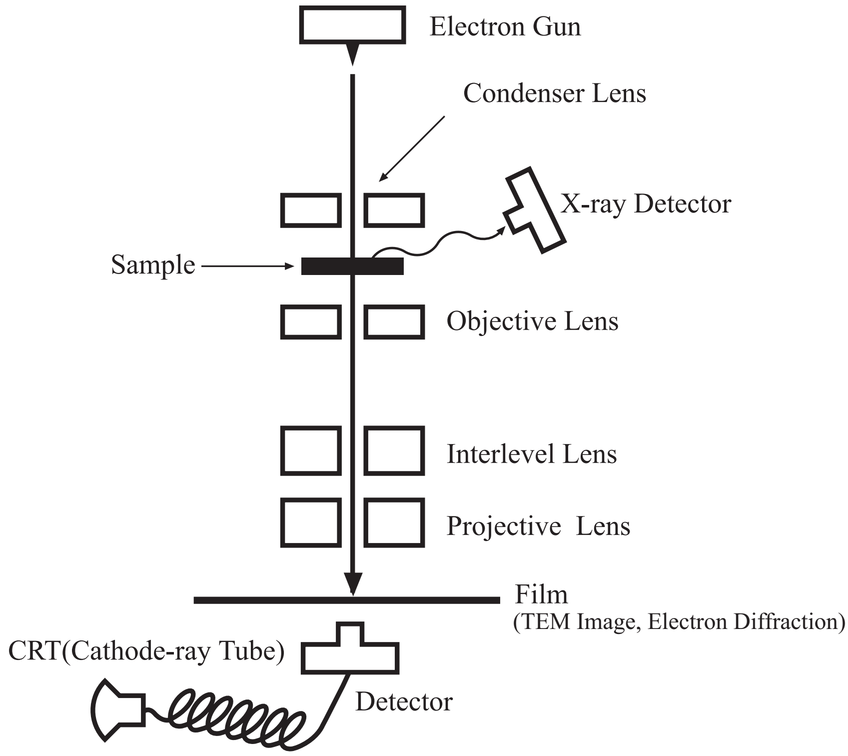


図 5.1: TEM の全体像

データ処理系としては宇宙用と同等の性能が必要であり、地上実証試験としての意味も持つ。

5.1.2 TES カロリメータシステムの設計

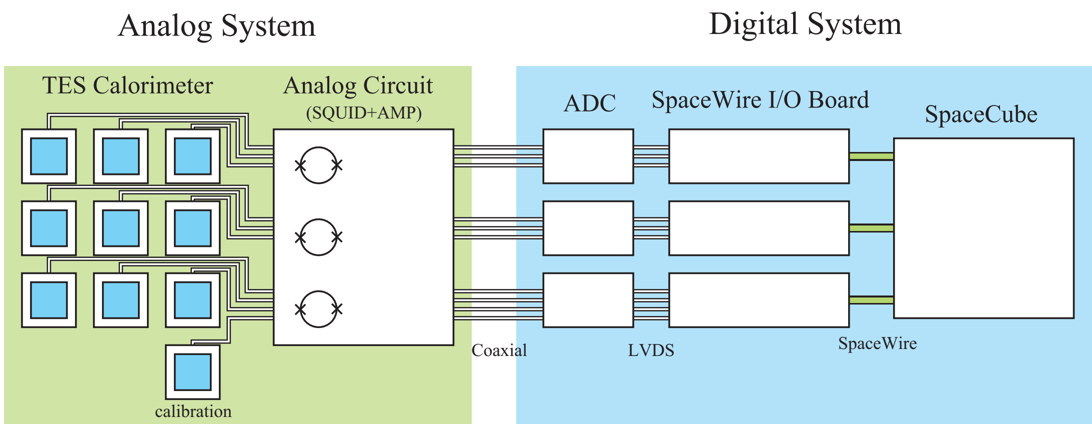


図 5.2: TEM 用 TES カロリメータシステムの全体像（実際の仕様）

10 ピクセルの TES（うち一つは較正用）が受光部分であり、TES 一つ一つに対して読みだし用の SQUID 回路、及び SQUID 駆動用のフィードバック回路、増幅回路が存在し全体でアナログ部を構成する。アナロ

グ回路で読み出された TES 信号（全部で 10Ch）は 4Ch の ADC ボード 3 つに、3+3+4Ch に分けられて入力される。ADC ボードで 1MS/s,14bit のデジタル信号として切り出された TES 信号は LVDS ケーブルを通じて SpWIO ボードにシリアル転送される。この際、ADC ボード一つに対して SpWIO ボード一つが対応する。SpWIO ボード内でトリガーをかけられ取得されたイベントデータは SpWIO ボード上の SDRAM に一旦格納される。SpaceCube と SpWIO ボードの間にはリングバッファ(図 5.3) が構築され、SpaceCube のメモリ空間にイベントデータが書き込まれることになる。SpaceCube から SpaceWire 通信系を通じてデータをとりにいくと、通信準備及びデータ転送時間がタイムロスとなり処理に支障をきたすためリングバッファが必要となる。

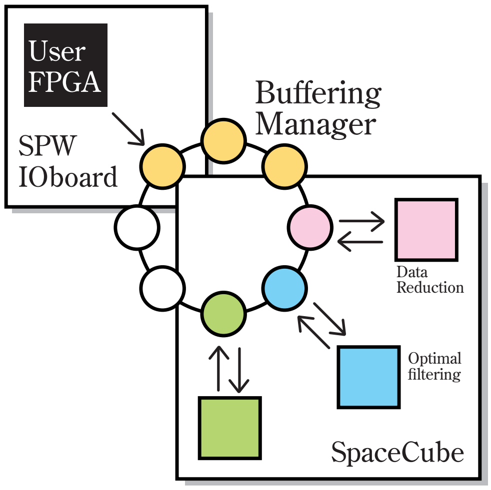


図 5.3: リングバッファの模式図

5.1.3 処理系への要求性能

今回製作する TEM 用 X 線 TES マイクロカロリメータシステムのカウントレートは 200counts/s/pixel と予想されている。透過窓などによりカウントレートを変更することは可能であるが、今回のシステムの場合はリアルタイムで物質表面の情報を得ると言う事が重要であり、走査中にスペクトルを得るためこのような高いカウントレートが必要となる。ADC としては 14bit,1MS/s のものを用いるが（サンプリングレートは可変）、14bit はデータ量としては扱いにくいので SpaceWireIO ボード中では空の bit を追加して 16bit のデータとして扱うこととなる。また、最適フィルター処理のために少なくともパルスの立ち上がりの瞬間から、立ち下がりの時定数の 10 倍以上の時間波形を取得する必要があると考えている。立ち下がり時定数は 100μs ほどが予定されているが、素子によってばらつくため 1count あたり 2048Samples(=2ms) 取得することとした。これらの要請から 1count あたり

$$16\ \mathrm{bit}(=2\ \mathrm{Byte}) \times 2048\ \mathrm{Samples} = 4\mathrm{kB} \tag{5.1}$$

のデータ量となる。TES カロリメータ 1pixel あたり 800kB/s の情報量となる。SpaceWireIO ボードには最大 4pixel からのデータが入るので、SpaceWire の転送速度としては

$$800\mathrm{kB/\ s/pixel} \times 4\mathrm{pixel} = 3.2\mathrm{MB/\ s} \tag{5.2}$$

となる。この転送レートは SpaceWire の許容範囲内である。一方 SpaceCube 内で処理すべきパルス量は

$$200\text{counts/ s/pixel} \times 10\text{pixel} = 2000\text{counts} \tag{5.3}$$

なので、直列処理の場合 1 パルスの処理に割ける時間は最大 500μs である。

5.1.4 ダブルパルス頻度の推定

バッファー数や処理速度の問題からどの程度の頻度でダブルパルス、もしくはそれ以上の重複パルスが発生するのか計算する必要がある。

まず始めにカウントレート A[counts/s] となる放射線源と検出器の組に発生するダブルパルスの頻度を考える。

放射線源の原子数 N に対して、放出される X 線が検出される原子数の割合を r と置き、またこの原始の崩壊定数（個数が 1/e になるのに要する時間 [s]）を τ とするとカウントレートは以下のように表せる。

$$Nr(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}) = A \tag{5.4}$$

以降 Nr を潜在的な原子数 N_0 と置く。サンプリング時間を Δt とすると、ダブルパルスの頻度はある時刻から Δt の間に N_0 のうち、ただ一つが崩壊する確率と等しい。

シングルパルス、ダブルパルス、トリプルパルスの確率はそれぞれ

$$P_{single} = {}_{N_0}C_0(e^{-\frac{\Delta t}{\tau}})^{N_0} \tag{5.5}$$

$$P_{double} = {}_{N_0}C_1(e^{-\frac{\Delta t}{\tau}})^{(N_0-1)}(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}) \tag{5.6}$$

$$P_{triple} = {}_{N_0}C_2(e^{-\frac{\Delta t}{\tau}})^{(N_0-2)}(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}})^2 \tag{5.7}$$

$\tau \geq 1$ の場合、N_0/τ = A と近似でき、また $\tau \geq \Delta$t の時上式はそれぞれ

$$P_{single} = (e^{-A\Delta t}) \tag{5.8}$$

$$P_{double} = A\Delta t(e^{-A\Delta t}) \tag{5.9}$$

$$P_{triple} = \frac{(A\Delta t)^2}{2}(e^{-A\Delta t}) \tag{5.10}$$

となる。この確率を横軸 AΔt に対してプロットしたものが以下の図である。

TEM の場合は照射時間に比例したカウント数が来るはずである。これは上記の放射線源の場合の N_0/τ = A を保ったまま、τ を無限大にした場合に等しいと考えられるので、式（5.8-5.10）における近似が厳密に成り立つこととなる。実際の予想カウントレート 200[counts/s]、サンプリング時間 2ms に対してそれぞれの確率を計算すると

1. シングルパルス 67%
2. ダブルパルス 27%
3. トリプルパルス以上 5%

となる。トリプルパルス以上についてもイベントデータを取得するとすると、

$$\frac{0.67 \times 1 + 0.27 \times 2 + 0.05 \times 2}{1 + 200 \times 0.002} = 0.94 \tag{5.11}$$

トリプルパルス以上を切り捨てるとすると

$$\frac{0.67 \times 1 + 0.27 \times 2}{1 + 200 \times 0.002} = 0.86 \tag{5.12}$$

が処理可能である。処理可能なイベントデータの詳細は 5.1.7 を参照。

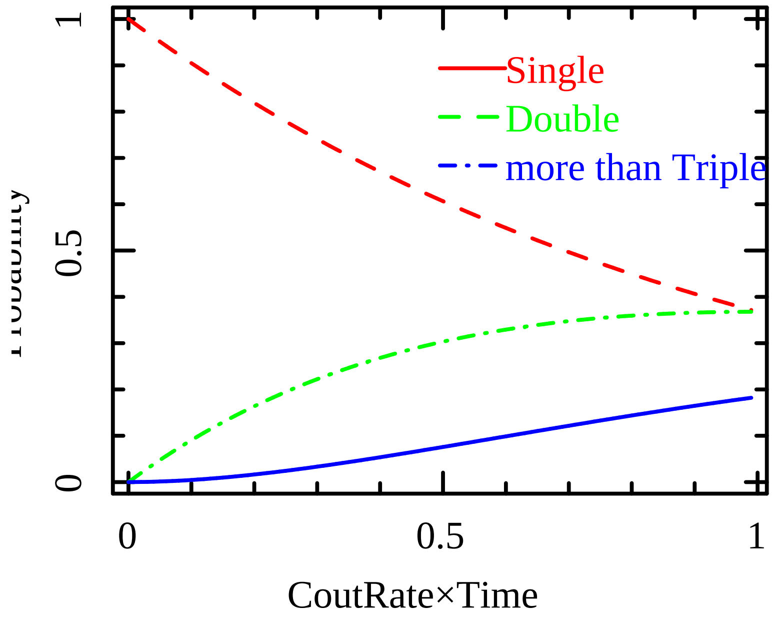


図 5.4: カウントレートを変えた時のシングル、ダブル、トリプル (以上) パルス頻度

5.1.5 SpaceCube での処理

SpaceCube での処理モードは大きく

1. テンプレート作成モード
2. リアルタイム処理モード

に分けられる。現段階ではリングバッファが構築されていないので、イベントフラッグを常に監視したうえで SpaceCube 側からデータを取得しなければならないが、リングバッファが構築されれば SpaceCube のメモリ上に自動的にデータが転送されてくるようになるため、処理工程が変化する。ただし、当然ながら最適フィルター処理などにかかる時間は変化しない。

5.1.6 テンプレート作成モード

一日に一度程度キャリブレーション用の線源を用い、各 TES ピクセルごとに平均パルス波形、及びノイズを取得し最適フィルター用のテンプレートを作成する。処理工程は

1. キャリブレーション線源からのパルスを必要数取得
2. ノイズを取得（この時 IO ボードはノイズ取得モードになる）
3. パルスデータとノイズデータからテンプレート作成（この際各ピクセルの立ち下がり時定数も計算）

となる。これらの処理には FFT(Fast Fourier Transformation) が必要となるためリアルタイム処理中にテンプレートは作成できない。テンプレートを多数用意しておくことはあまり現実的ではないので、次節のように、イベントの種類分けをする必要がある。

5.1.7 最適フィルター処理

このシステムのリアルタイム処理中、SpaceCube は SpWIO ボード上のイベントフラグを常に監視し、イベントが一つ起こるごとにデータを転送し最適フィルター処理を行なう。前述のように一つのイベント辺りに割ける処理時間は最大で 500μs なので、処理工程全てを 400μs 程度で完了する必要があると考え設計、試験を行なった。イベントフラグが立ってからの処理工程は

1. SpWIO ボードとの通信を確立しデータのヘッダーを解析
2. 処理すべきデータの場合 SpaceCube 側に転送
3. ヘッダーデータをもとに必要な最適フィルター処理を施し、PHA を出す

となる。最適フィルター処理はトリガーの前後何サンプルで別のトリガーが立ったかにより以下のように分けられる。

1. シングルパルス：前後 2048 サンプル以内に別のトリガーがない
2. ファーストパルス：前 2048 サンプル以内に別のトリガーがなく後ろ 2048 サンプル以内に別のトリガーがある。
3. ラストパルス：前 2048 サンプル以内に別のトリガーがあり後ろ 2048 サンプル以内に別のトリガーがない。

なおファーストパルスについては次のトリガーまでの長さ L_{inter} により処理がさらに分けられる。L_{inter} がある値より短いときは近接パルスとして処理を行なわない。また、L_{inter} の大きさにより 2 種類のテンプレートを用意している。また、ラストパルスについても近接パルス判定があり、こちらは L1_delay+32 サンプルがしきい値となっている。（ラストパルスのイベント内に他のパルスのピークがあると処理が繁雑になるため）

この中に分類されないパルス、例えばトリプルパルスの真ん中のパルスなどの前後 2048 サンプルの両方に別のトリガーがあるパルスについては処理を行なわず、ヘッダー情報のみを参照して破棄する (ヌルパルス)。

これらの関係を図（5.5）に示す。

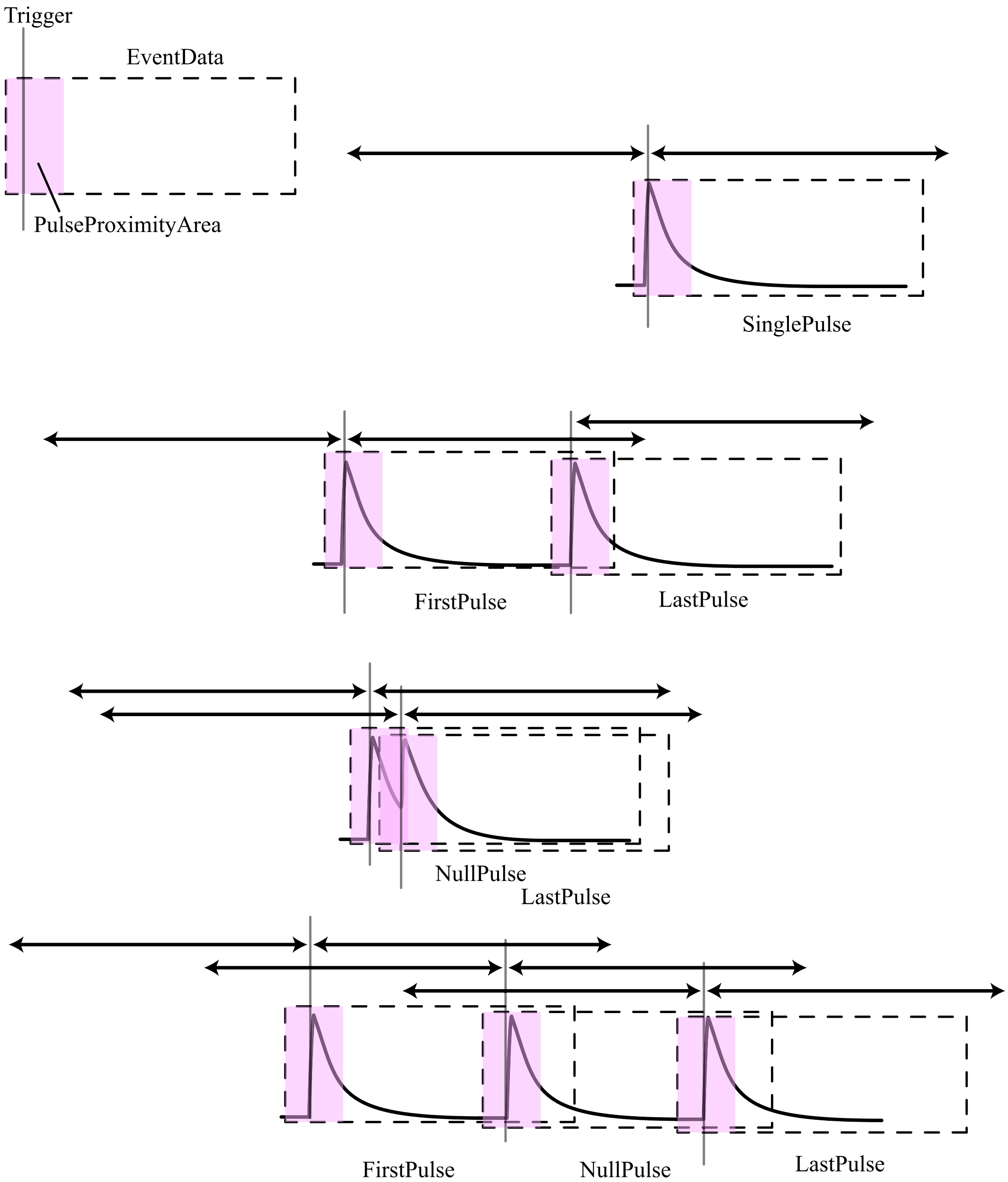


図 5.5: イベントのタイプ

5.1.8 UserFPGA ロジックの設計

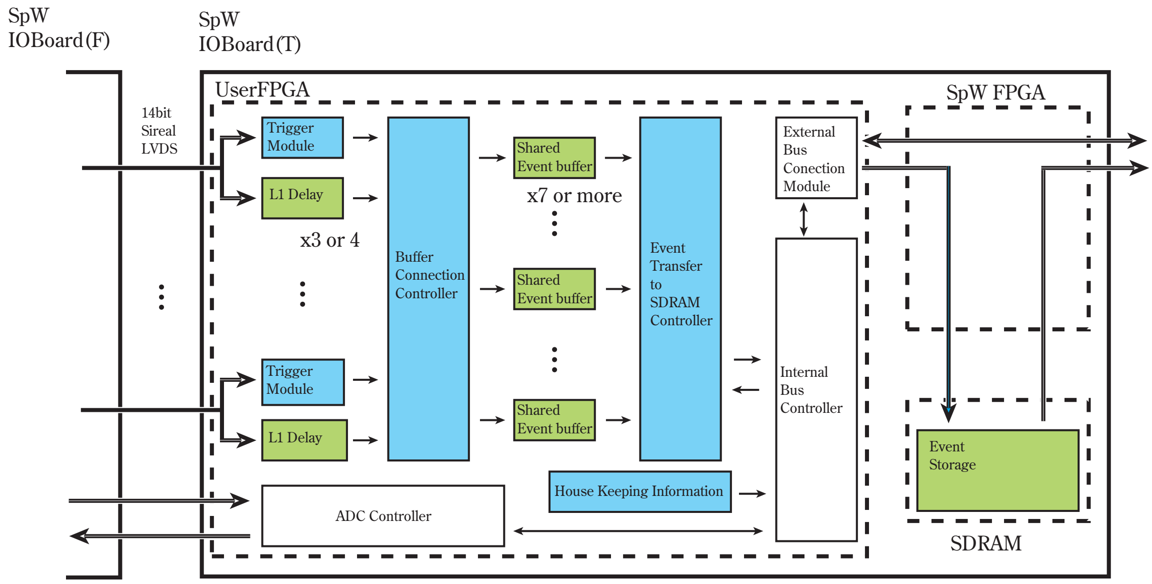


図 5.6: SpWIO ボード UserFPGA ロジック

処理系に与えられた条件をもとに UserFPGA ロジックの設計を行なった。考えた要素は

1. イベントバッファーの種類（各チャンネルで分けるか共通にするか）
2. トリガが立つ前の波形をどのように取得するか（リングバッファか L1 ディレイか）
3. イベントデータに付加すべき情報は何か

である。同様に考慮したトリガロジックについては後述する。

5.1.8.1 イベントバッファ

UserFPGA 内に構築できるブロック RAM は全部で 36kB である。1 イベントあたり 4kB 必要である事を考え、さらにダブルパルス、トリプルパルスの取得を考えると 1 チャンネルあたり 3 つはイベントバッファが必要である。4 チャンネルの入力がある事を考えると、チャンネルごとに独立したバッファを作るとダブルパルス以上の取得が難しくなるため、共有バッファを 7 チャンネル (可能ならばより多く) 作成することとした。どのチャンネルがどのイベントバッファを使用するかの管理はイベントバッファコネクションモジュールが行なう。

5.1.8.2 L1_delay

テンプレートの作成、パルスのベースラインの補正やラストパルスにおいて外挿を行なうために、トリガが立った瞬間より前のデータが必要となる。この要請を満たすためにはイベントバッファをリングバッファとして使う、イベントバッファの前に遅延用のモジュールを置くという方法が考えられる。イベントバッファをリングバッファとして使うとは、次のような状況である。常にデータが書き込まれている 4kB

のバッファを考える。このバッファに書き込まれたデータは新たに 4kB 分のデータが書き込まれる間は保持されるが、その後は上書きされていく。ある瞬間にトリガが立った場合、バッファはそこから 3kB データを書き込んだ後で書き込みを中止する。すると、トリガが立つ前のデータ 1kB と立った後のデータ 3kB が保持される事となる。この方法は一般的ではあるが、今回のようにバッファとしてとれる領域が限られており、さらにチャンネルごとに瞬間的なイベントの発生率が異なる場合には効率的ではない。なぜなら、トリガが立っていないチャンネルも常に一つのバッファを占有することになるため、ダブル、トリプルパルスのために空けておけるイベントバッファが 4 チャンネル分減ってしまうからである。

そこで、イベントバッファの前に遅延モジュール (512kB=256 サンプル) を置く事とした。この遅延モジュールは入力されたデータを 256 サンプル経過後に出力するというシンプルなロジックである。

5.1.8.3 付加情報

最低限必要なものは、時刻及びそのパルスにいかなる最適フィルター処理を施せばよいかが判断するための情報である。最適フィルター処理は前述のように大きく 3 種類に分けられ、その分類のために必要な情報は一番近い同一チャンネルのトリガまでのサンプル数である。よって時刻、最近のトリガまでのサンプル数 (前と後の 2 種類) を付加情報とし、イベントデータと合わせてイベントデータフォーマットとした。

また上記以外に必要となる、デッドタイム見積りのためのトリガカウント数などを格納するための House-Keeping 領域を設定した。

5.2 試験処理系

2007.1.5 現在の環境では ADC 及びアナログ回路系が完成されていないため前述の処理システムを構築する事が不可能である。そこで、トリガーロジックや転送速度の検証のために図 5.7 のような処理系を構築した。

この処理系は次のように動作する。まず SpaceCube で疑似パルスデータを作り、それを SpWIO ボード (F) に送る。SpWIO ボード (F) のバッファーに格納されたデータは LVDS を通じて SpW IO ボード (T) に転送される。この SpWIO ボード間のシリアル転送形式は使用予定の ADC のシリアル転送形式と同じにしてあるため SpWIO ボードから先はの処理は図 5.2 の処理系と同じものを構築することができる。SpaceWireIO ボード上でのロジックやデータの流れについては後述する。

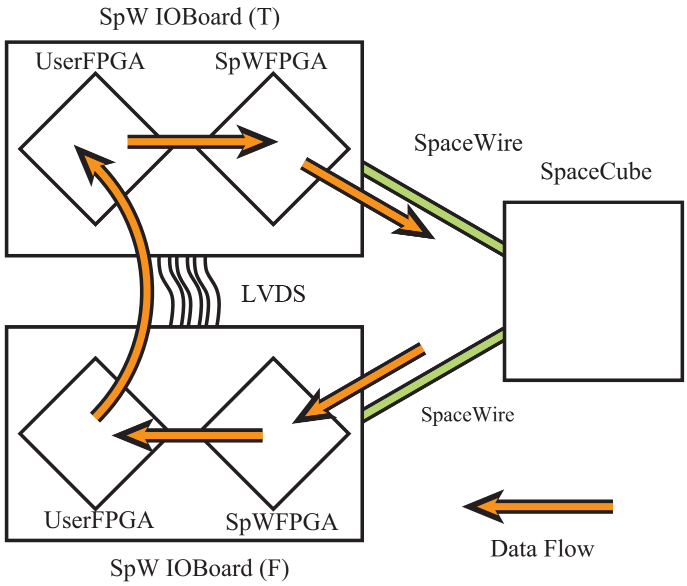


図 5.7: 試験処理系 (模式図)

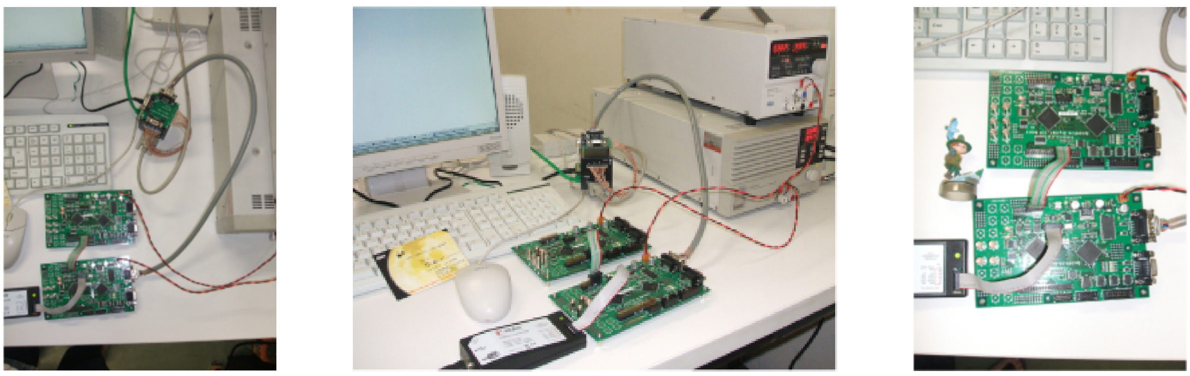


図 5.8: 試験処理系 (実際の写真)

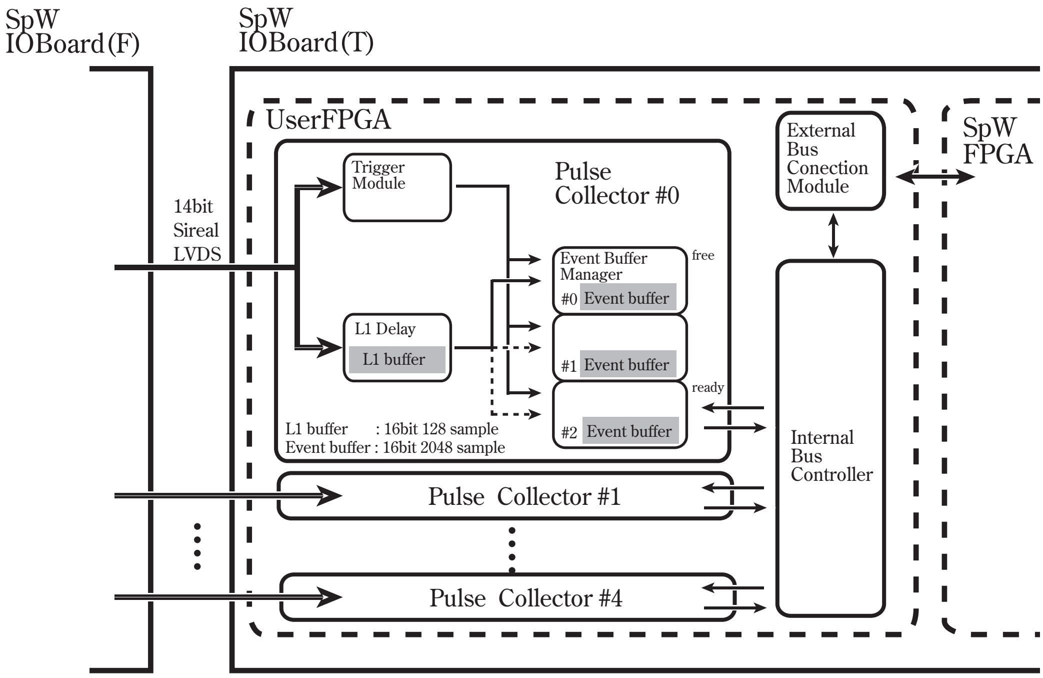


図 5.9: 試験処理系 SpWIO ボード UserFPGA の内部ロジック

5.2.1 UserFPGA ロジックの設計

SpWIO ボード (F) から LVDS を通じて入力された信号は、パラレルシリアル変換を経てそれぞれ L1_delay 及び TriggerModule に入力される。L1_delay は遅延のためのバッファーであり、入力されたデータはあるサンプル数経過後（この試験では 128 サンプル）に出力される。Trigger はパルスに対してトリガーをかけ、イベント判定を行なう。ここで用いるトリガーロジックについては後述する。イベント判定がされた場合、L1_delay の出力はイベントバッファーに書き込まれる。あるイベントバッファーに書き込んでいる最中に再度イベント判定がなされた場合（ダブルパルスやトリプルパルスなどの場合）は次のバッファーにも書き込みが始まる。書き込みが終了すると、イベントバッファーの ready フラグが立ち、イベントバッファーは SpaceCube によりデータが読み出されるまで書き込み禁止状態になる。

5.2.2 トリガロジック

信号中からイベントを検出するためには、何らかの値を信号から計算し、その値が一定値（しきい値）を上回った時（もしくは下回った時に）にパルスと判定するトリガロジックが必要となる。オシロスコープ等では通常、信号の大きさそのものに対してしきい値を適用するが、ダブルパルスを判定する必要があるため、そのようなトリガロジックを単独では使用できない。また、リアルタイム処理の要請からパルスの立ち上がりがなるべくそろっていることが望ましい。

ノイズの影響を除くためには数 Sample 分積分した値を使う必要がある。また、ダブルパルス判定の要請から信号の絶対値ではなく信号の微分に対してしきい値を適用することが考えられる。これらを満たす最

も単純なロジックは以下のように、現在のサンプルから過去 N サンプルまでを足し、それから過去 N+1 サンプルから 2N サンプルまでを引く、というロジックである (ロジック１：図 5.11 左)。

しかし、このロジックでは、ダブルパルス時におけるファーストパルスの立ち下がりの影響を除けないため、セカンドパルス判定が難しいことが分かった。

立ち下がりは Aexp(-t/τ) なので Δt を時間分解能（1/SamplingRate）としてある時刻 t_1 の周りの微小時間で展開すると

$$A\exp(-\frac{t_1+n\Delta t}{\tau}) = A\exp(-\frac{t_1}{\tau})\exp(-n\frac{\Delta t}{\tau}) \tag{5.13}$$

$$= A\exp(-\frac{t_1}{\tau})(1-n\frac{\Delta t}{\tau}+O((\frac{\Delta t}{\tau})^2) \quad \Delta t \ll \tau \tag{5.14}$$

となる。これを利用すると

$$A\exp(-\frac{t_1+3\Delta t}{\tau}) - A\exp(-\frac{t_1+2\Delta t}{\tau}) - A\exp(-\frac{t_1+\Delta t}{\tau}) + A\exp(-\frac{t_1}{\tau}) = A\exp(-\frac{t_1}{\tau})\times O'((\frac{\Delta t}{\tau})^2) \tag{5.15}$$

のように立ち下がり波形の影響を Δ/τ の 1 次の項まで落とすことができる。この性質を利用して先のトリガロジックに改良を加えたものが図 5.11 右である（ロジック 2)。このトリガロジック１、２をダブルパルスに対して適用したものが図（5.11）である。ファーストパルスに対しては両方のロジックともパルスと同じタイミングで立ち上がっている事が分かる。しかし、ファーストパルスの立ち下がり中に入ったセカンドパルスに対してはトリガロジック１と２とも同じタイミングで立ち上がっているものの、しきい値 (ここでは 1000) をまたぐタイミングが異なりロジック 1 ではパルスの立ち上がりを捉えきれない事が分かる。

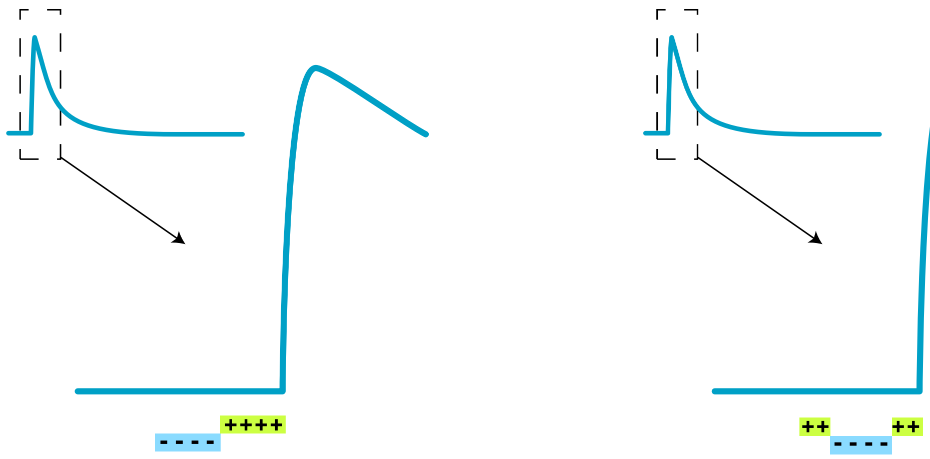


図 5.10: 左： トリガロジック１、N=4 の時、右：トリガロジック 2、N=4 の時

5.2.3 シリアル-パラレル変換

14bit,1MS/s といった大量の情報を高速で送る場合、1bit につき 1 回線を使用するパラレル転送では配線数が多くなるとともに、各信号の同期をとることが難しくなるため、1 つの配線を時間で分割するシリアル転送が用いられる。実際に FPGA 内で処理を行なう場合はこのシリアル信号をパラレル信号に変換する必要がある。このような機能を持ったアナログ回路は市販されているが、FPGA の IO ピン数が限られているため、FPGA に信号が入力される以前にシリアル―パラレル変換を行なってしまうと IO ピンが足りなく

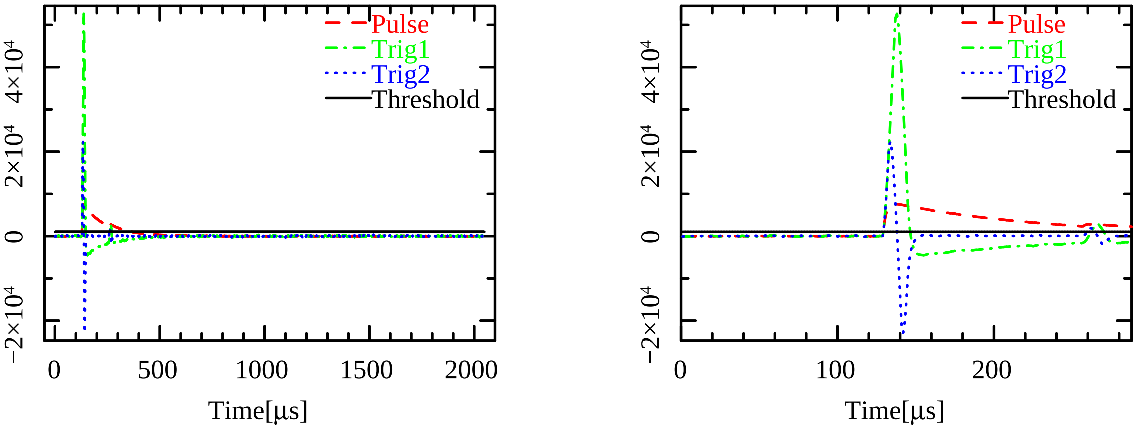


図 5.11: トリガロジックをダブルパルスに対して適用。左：全体 (2048 サンプル)、右：左図の 0-288μs を拡大したもの。(パルスの立ち上がりはそれぞれ 128μs 及び 256μs)

なってしまう可能性がある。そのため FPGA 内部のロジックにてシリアル－パラレル変換を実現する必要がある。図 (5.12) はシリアル信号の変換に伴うクロック信号のダイアグラムである。このダイアグラムにそってシリアルパラレル変換及びパラレルシリアル変換を行なうモジュールを作成した。

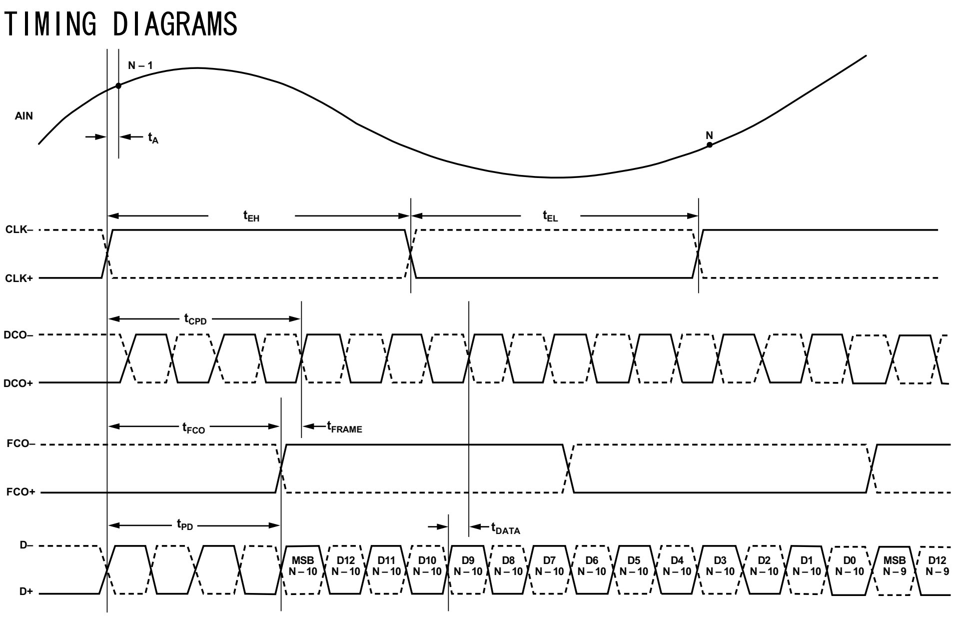


図 5.12: ADC-DIO シリアル転送用のタイミングダイアグラム (14bit)

5.2.4 バッファ方式

共有バッファ方式は同一トリガの例外処理などが入るためロジックが複雑になる。今回の試験処理系の目的である LVDS 転送からイベントデータ取得までの一連の流れについては単純なバッファ方式を使用しても本質は変わらないので、Ch 毎に独立したバッファを構築した。

5.3 試験処理系の評価

ここまでのロジックを元に図 5.7 の処理系を実際に作成しその評価を行なった。ADC クロック (イベントデータを扱う際のクロック) は 1MHz、内部クロックは 96MHz である。

5.3.1 SpaceCube 内での処理

SpaceCube に移植したプログラムを用いて最適フィルター処理にかかる時間を見積もった。使用したパルスファイル、及びテンプレートファイルはそれぞれヘッダー 256Byte(double 16 + char 192) とデータ部からなる。データ部にはパルスファイルの場合は short 型（2Byte)、テンプレートファイルの場合は double 型 (4Byte) のデータがサンプル数分だけ格納されている。ここでのデータ型は実際の波形情報が 2Byte で送られてくる事を考慮している。今回の最適フィルタープログラムは以下のような処理工程から成っている。

1. テンプレートファイルの読み込み
2. パルスファイルヘッダーの読み込み
3. パルスファイルの読み込み
4. 最適フィルター処理
5. まだパルスデータが存在する場合 2 に戻る、なければ終了

最適フィルター処理はプログラム上ではテンプレートとパルスファイルのクロスコリレーションとして表される。計算内容はサンプル一つにつき double 同士の積とその和をとるというものであり、トリガーがずれている可能性を考慮して bin をずらした計算も行なう。そのためサンプル数が大きくなると単純な計算としてはこの部分に最も時間が割かれる事となる。

今回のシミュレーションではファイルからの読み込み時間があるため上記プログラム中の最適フィルター処理を省いたプログラムも作成し、シフトを 0、カウント数を 1000 で固定しサンプル数を変えて処理時間を計測してみた。結果を表 5.1 に示す。

表 5.1: 最適フィルター処理にかかる時間の計測値 (カウント数は 1000)

サンプル数	2048		4096	
最適フィルター処理	なし	あり	なし	あり
処理時間 [ms]	1010	1320	1950	2650
	970	1340	1880	2660
	970	1240	2020	2660
	1050	1290	1960	2640
	970	1250	1940	2470
	990	1360	1930	2720
	960	1210	1970	2530
	990	1290	1910	2610
	1000	1250	2000	2750
	1030	1240	1930	2610
平均	990	1280	1950	2630

この結果から 2048 サンプル、1000 カウントのクロスコリレーションにかかる時間はおよそ 300ms と計算される。１カウントあたりシフト 0,±1 の計 3 回クロスコリレーションをとると仮定すると、1000 カウントの処理に 900ms の時間がかかることとなり、現在想定しているカウントレートでは処理が追い付かない。そのため

1. 最適フィルタープログラムの改善
2. SpaceCube の台数を増やす

といった改善が必要となることが分かる。なお、リングバッファが実装された場合は SpaceCube 内のメモリから直接データを 読み出すことができるようになるためファイルの読み込み時間はほとんど考慮しなくてよくなる。

5.3.2 SpWIO ボード (F) へのデータ転送

SpWIO ボードへのデータ転送を行ない、バッファに格納されている事を確認した。図 5.13 は SpaceCube で生成したシミュレーションパルス、及びそのパルスを SpWIO ボードに転送したのち、バッファから読みだした波形、およびその両方を重ねたものである。両者は完全に重なっており転送およびバッファへの格納が問題なく行なわれている事が分かる。

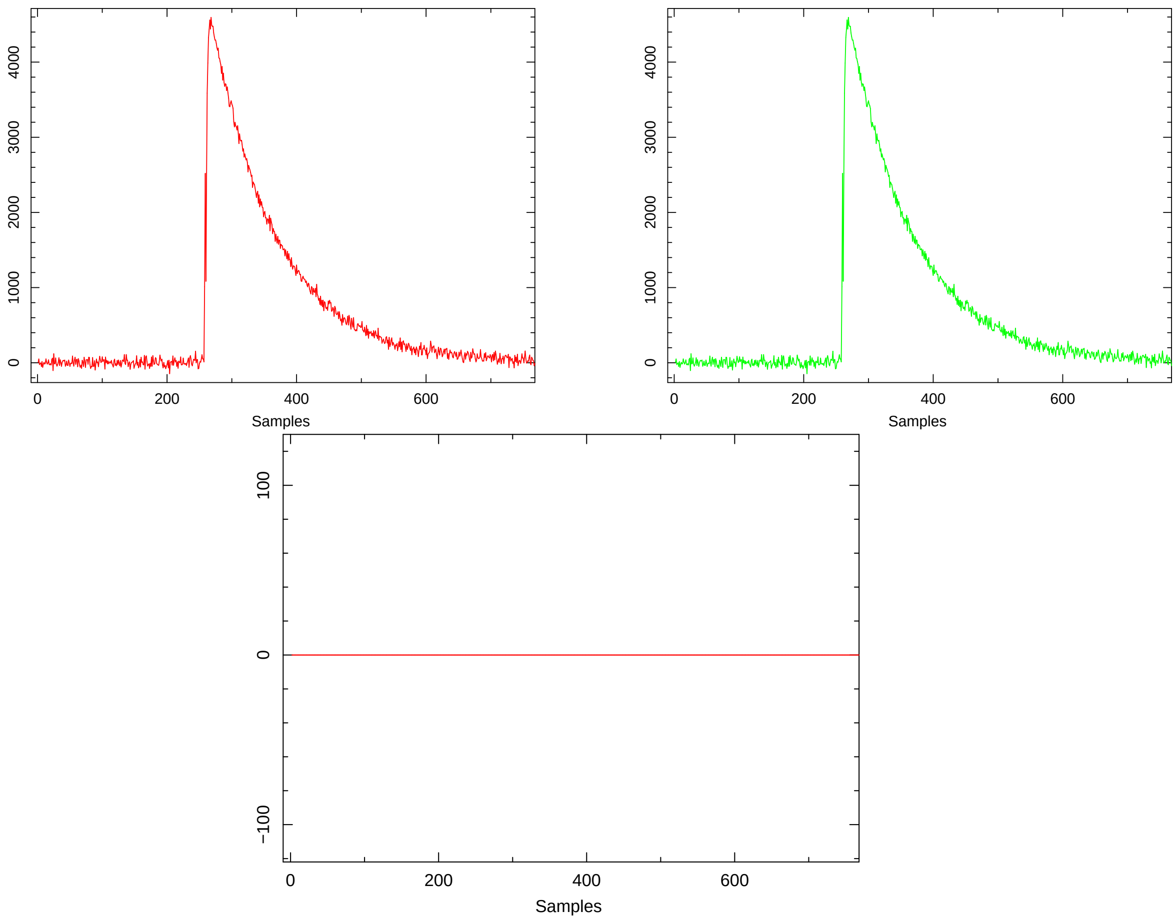


図 5.13: 左上：シミュレーションパルス (SpaceCube 内)、右上：バッファ格納後のシミュレーションパルス、下：左上図と右上図の差分をとったもの。

5.3.3 シリアル転送

図 5.12 のタイムダイアグラムに沿ったシリアル転送を 1MHz で行ない、データが転送されシリアルパラレル変換がなされていることを確認した。なお、この 1MHz のクロックは実際の ADC クロックと同じ周波数である。

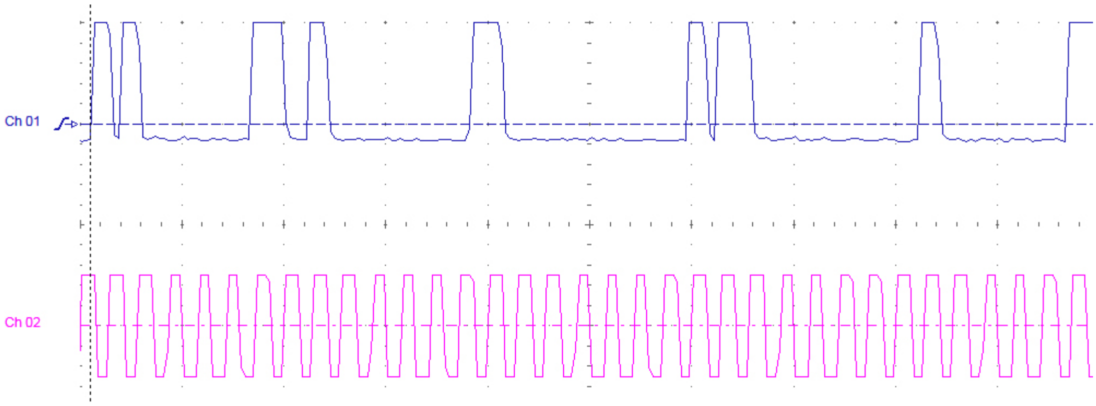


図 5.14: シリアル転送信号を LVCMOS からオシロスコープで読んだ。Ch1(上段) がシリアル信号、Ch2(下段) が図 5.12 中の DClock。

5.3.4 トリガーロジックの検証及びイベントデータの取得

LVDS 転送後のデータに対してトリガが立ちイベントデータを取得できているかを確認した。トリガの値を変更した時のイベントデータを図 5.15 に示す。トリガのしきい値が低い時はノイズの影響でトリガがかかってしまっているため、パルスの立ち上がりをとらえられていないが、しきい値を変更する事により、立ち上がりを捉える事ができる。

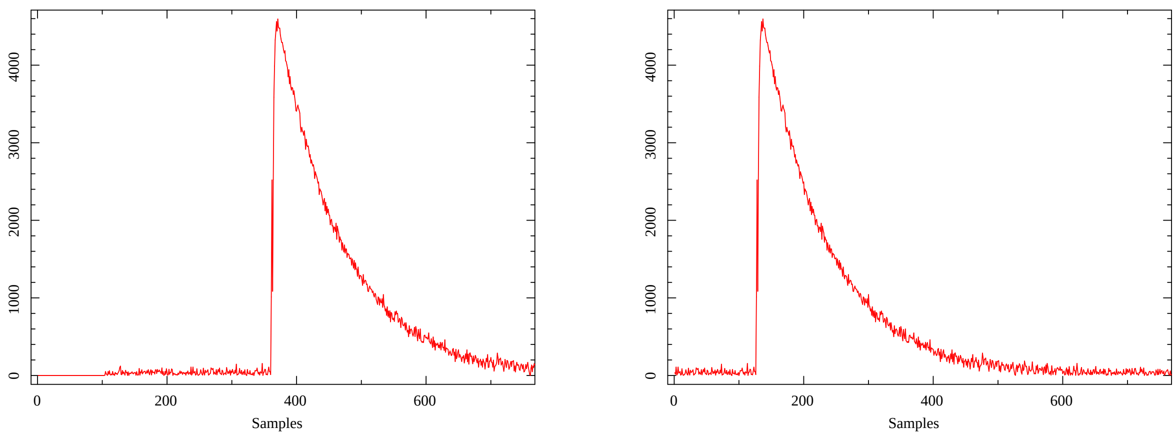


図 5.15: 左：トリガのしきい値 128 で取得したイベントデータ、右：トリガのしきい値 2048 で取得したイベントデータ

表 5.3.4 より、確かにしきい値でトリガがかかっている事と、L1_Delay(128 サンプル) が有効に機能している事が分かる。

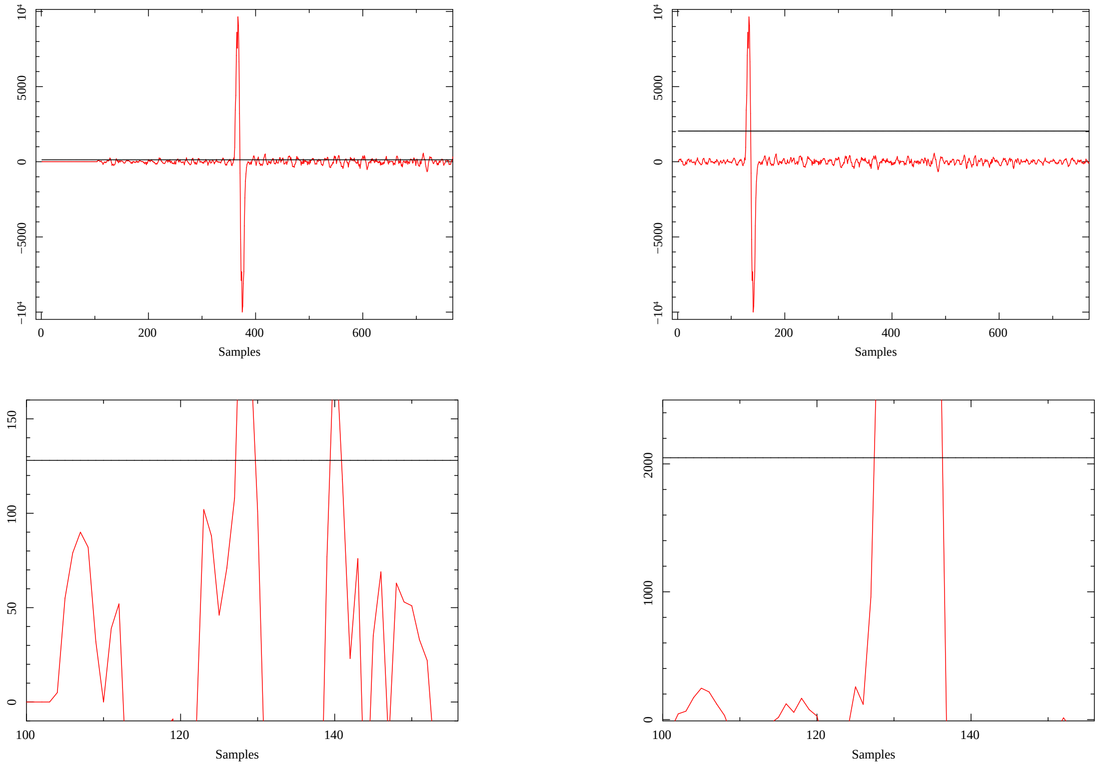


図 5.16: 左：トリガのしきい値 128 で取得したイベントデータ、右：トリガのしきい値 2048 で取得したイベントデータ。図中の横線はしきい値を表す。

表 5.2: 図 5.16 のパルスの値を 128 サンプル付近で抜き出してみた。左：図 5.16 左、しきい値 128、右：図 5.16 右、しきい値 2048。

121	-18	121	-207
122	-19	122	-261
123	102	123	-118
124	88	124	-79
125	46	125	257
126	71	126	119
127	108	127	958
128	253 (>128)	128	3430 (>2048)
129	194	129	4421
130	101	130	7072
131	-50	131	8617
132	-244	132	7554
133	-191	133	9645
134	-150	134	9063
135	-251	135	6653

5.3.5 ダブルパルスに対するトリガロジック及びイベントバッファの動作

ダブルパルスやトリプルパルスに対して、トリガが立つか、またイベントバッファの切替えが有効に機能しているか検証のために図 5.17 のように多数トリガのかかる箇所のあるパルスを作成した。

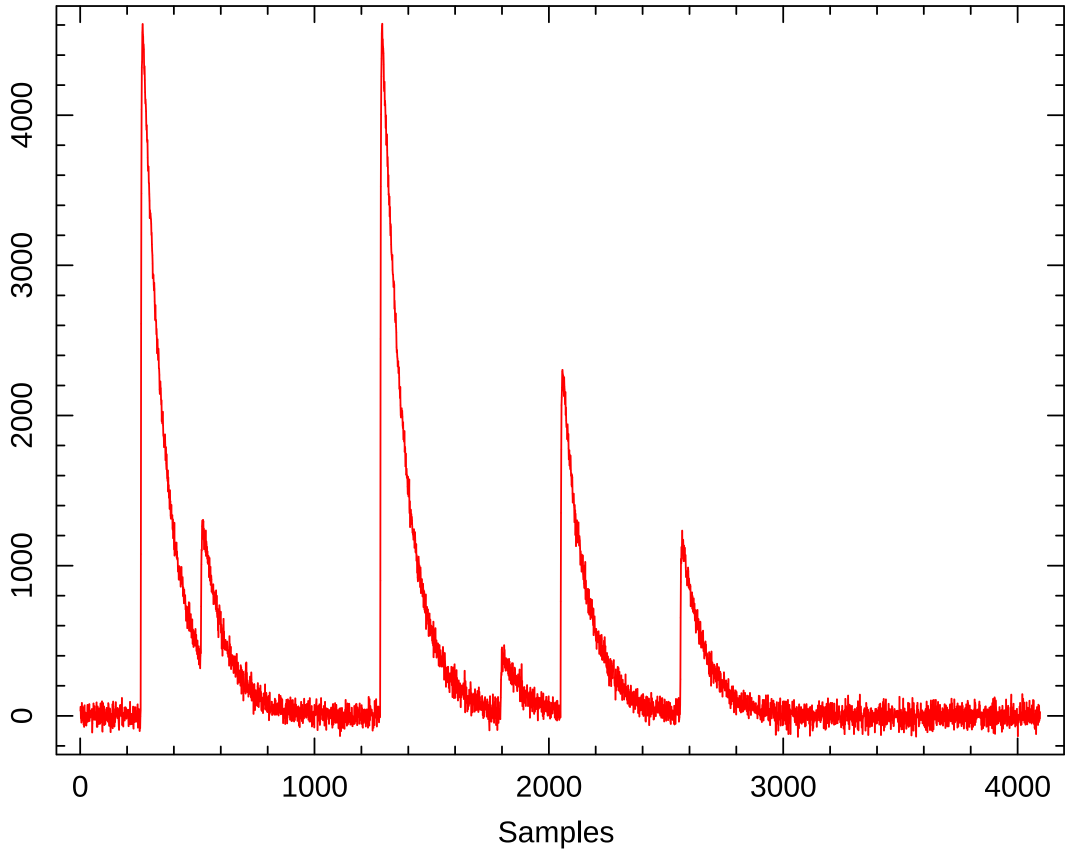


図 5.17: SpWIO ボード (F) のバッファに格納したパルス波形。

このパルスを SpWIO ボード (F) から転送し、トリガのしきい値を変えてイベントデータを取得した (図 5.19, 図 5.20)。図 5.19 を見ると、イベントバッファが想定した通りデータを取り込んでいるが、図 5.20 では同じパルスに対して 2 度トリガが立ってしまっているようにみえるが、これはノイズに対してしきい値が小さ過ぎただけである。

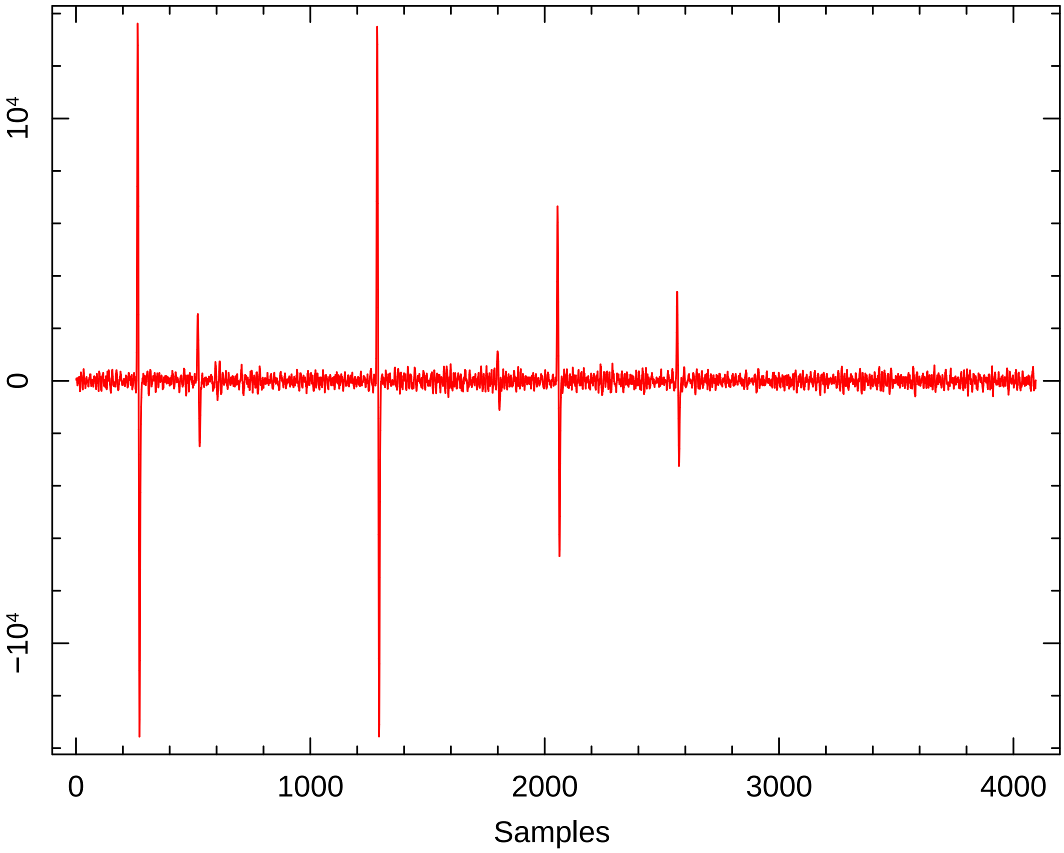


図 5.18: 図 5.17 のパルス波形のトリガ値

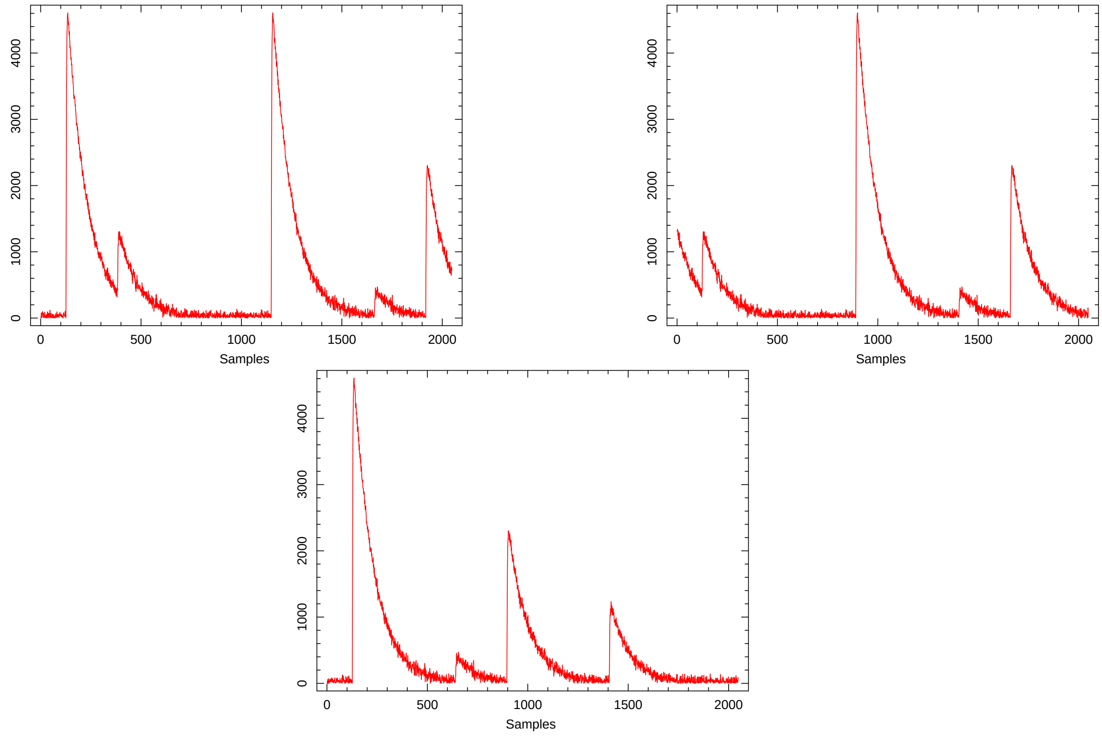


図 5.19: トリガしきい値 1280。左上：イベントバッファ１、右上：イベントバッファ２、下：イベントバッファ３

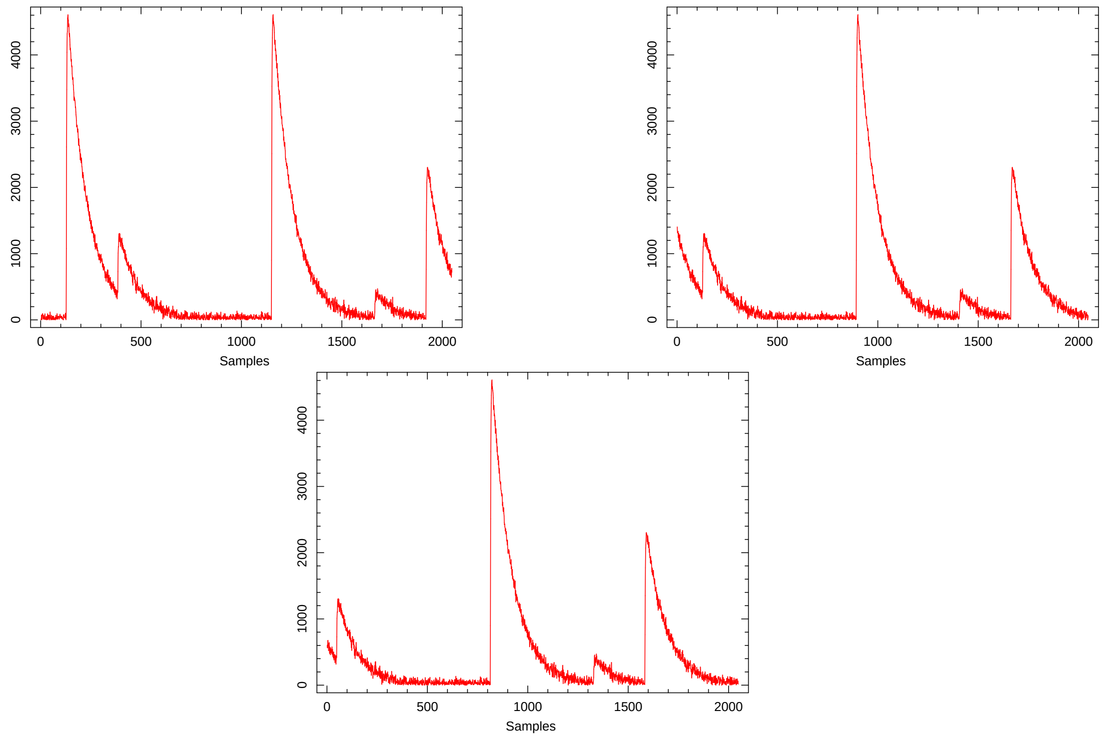


図 5.20: トリガしきい値 512。左上：イベントバッファ１、右上：イベントバッファ２、下：イベントバッファ３

5.3.6 転送速度

今回の試験処理系で使用した SpaceWire 転送は次の 2 種類である。

1. SpaceCube から SpWIO ボードのレジスタ (バッファ) にデータを転送する
2. SpaceCube から SpWIO ボードのレジスタ (バッファ) 上にあるデータを要求し SpWIO ボードから SpaceCube にデータを転送する

現段階では SpWIO ボードを主体とする SpaceCube へのデータ転送ならびに SpWIO ボードを主体とする SpaceCube からのデータ転送は実装されていない。さらに、1 の SpaceCube → SpWIO ボード転送に必要なプログラムにバグが見つかったため (バグの原因は未だ不明)、2 の場合の転送速度の検証のみを行なうこととなった。

データ転送は 2Byte を最少の単位とし、指定されたアドレスからデータを取り出す、またはそのアドレスのレジスタに対してデータを送るという動作が基本となっている。また、大きなデータの転送を想定して、スタートアドレスを指定する事により、データをスタートアドレスから連続したアドレスに格納する、という転送モードが備わっている。このモードでは通信のためのパケット生成を全データまとめて行なうため転送速度が飛躍的に向上する。先のバグはこの一括転送モードが正しく機能しないというものであり、結果 SpaceCube → SpWIO ボード間のデータ転送では通常の 2Byte ずつのデータ転送のみとなっている。

転送の流れは

1. 通信の確立
2. データの送受信
3. 通信の終了

となっている。サンプル数を変えて各段階で必要な時間を見積もったところ、通信の確立に必要な時間が一番多く 200ms ほどであり、2048 サンプルまでのデータの送受信、及び通信の終了に必要な時間は 10ms 以下であった。10ms は時間計算のためにつかっている関数で計測できる最少単位である。

最も時間がかかる部分が通信の確立であり、しかもその時間が 200ms であるため、データを 2Byte ずつ読み出していては処理が間に合わないことはもちろん、イベントデータのフラグを SpaceCube 側から巡回する方式でも処理が間に合わないことが分かる。そのため、SpWIO ボード (UserFPGA) が主体となった通信の実装や、リングバッファの構築が必要である。

第6章 まとめと今後

本修士論文では TES マイクロカロリメータ信号の最適フィルター処理について考察した。また、次世代衛星を見据えたデータ処理装置を用いて地上応用としての TEM 用 TES マイクロカロリメータ処理系の設計を行ない、その試験として処理系を構築しその評価を行なった。

TES マイクロカロリメータの信号処理として特徴的な最適フィルター処理について、解析的な計算とシミュレーションを用いて、十分な分解能を達成するために必要なサンプリングレートやサンプル時間に制限を加えた。また、ダブルパルスなど、通常の最適フィルター処理が行なえない場合に対する処理方法を考え、シミュレーションにより有効性を示した。

次に SpaceCube を用いた TEM 用 TES マイクロカロリメータ処理系の設計を行なった。カウントレートやリアルタイム処理の要請などから、シミュレーションを用いて取得サンプル時間を 2ms とした。また、ダブルパルスやトリプルパルスの発生頻度から、イベントバッファを全チャンネルで共有バッファとし、ダブルパルスやトリプルパルスを格納できるようにロジックを考えた。またダブルパルスにおいてファーストパルスの立ち下がり中にも十分な感度を持ちセカンドパルスを検知できるトリガロジックを考えシミュレーションにより確認を行なった。

TEM 用 TES マイクロカロリメータ処理系の設計と並行に、実際に TEM 用 TES マイクロカロリメータ処理系で使われる SpaceCube 及び SpaceWireIO ボードを使い、試験的な処理系を構築し考案したロジックを UserFPGA 内に作成した。トリガロジック、イベントバッファについては予想通り働く事を確認した。

今後は試験処理系で

- SpWIO ボードでのイベントデータ取得から SpaceCube 内での処理までの一連の流れ
- 共有バッファの構築と多チャンネル入力時の応答

を確認するとともに、今回の処理系を構築する際に発見したバグや問題点を SpaceWire 製作サイドにフィードバックし、より使いやすいシステムを構築したい。

また、最適フィルター処理のより現実的なシミュレーション、例えばフォノンオイズの付加、を行ないたい。

第 7 章 パルススペクトルとノイズスペクトル

パルススペクトルやノイズスペクトル、SN 比スペクトルについては、その定義域や規格化定数の値の定義に自由度がある。ここでは、本論文で用いたこれらのスペクトルの定義を示す。

7.1 フーリエ変換の予備知識

ここでは、デジタルフィルタ処理に必要となるフーリエ変換、パワースペクトルの予備知識について、一般的なものを簡単にまとめる。

7.1.1 フーリエ変換

時間の関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ は

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt \tag{7.1}$$

で定義される[1]。この時、$x(t)$ は $X(\omega)$ を用いて

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega \tag{7.2}$$

と表される。ω が $-\infty$ から $+\infty$ の間で定義されていることに注意が必要である。角周波数 ω のかわりに周波数 f を用いると、

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-2\pi ift}dt \tag{7.3}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\mathrm{e}^{2\pi ift}df \tag{7.4}$$

となる。したがって、

$$X(f) = 2\pi X(\omega) \tag{7.5}$$

という関係があることがわかる。なお、我々が扱うデータでは $x(t)$ は実関数であり、この場合は

$$X(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{i\omega t}dt = X^*(\omega) \tag{7.6}$$

が成り立つ。

式 (7.2) を波と対比させると、フーリエ成分 $X(\omega)$ は角周波数 ω の波の振幅、$|X(\omega)|^2$ はその強さ、すなわちエネルギーを表していると考えることができる。もう少し厳密に書けば、$|X(\omega)|^2d\omega$ が周波数 $\omega \sim \omega + d\omega$ のエネルギーに相当するので、$|X(\omega)|^2$ を「エネルギースペクトル密度」、$|X(\omega)|^2$ によって表されるスペクトルを「エネルギースペクトル」と呼ぶことがある。

[1] 正変換と逆変換の両方に係数 $1/\sqrt{2}$ をかける流儀もある。

$x(t)$ の 2 乗積分

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \tag{7.7}$$

が有限の場合、以下の Parseval の等式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \tag{7.8}$$

さきほどの “たとえ” を用いると、U は信号の「全エネルギー」を表しているので、$x(t)^2$ は各時刻における単位時間あたりの (全) エネルギー、すなわち (全) パワーを表していると考えることができる。このことから、$x(t)^2$ を信号の「(全) パワー」と呼ぶことがある。

7.1.2 パワースペクトル

パルスのように信号が有限の時間しか続かない場合は、全エネルギー U が有限となってエネルギースペクトルが意味を持つが、ノイズのように不規則な変動が無限に続く信号の場合には全エネルギーは発散してしまう。このような場合には単位時間あたりの平均のエネルギースペクトル、すなわち「パワースペクトル」が有効である。

実際のデータのうち、時刻 $-T/2$ から $T/2$ の間だけを切り出したものを改めて $x_T(t)$ とすると、そのパワースペクトルは

$$P(f) = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \right] \tag{7.9}$$

または

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{2\pi}{T} |X_T(\omega)|^2 \right] \tag{7.10}$$

で定義される。両者の間には $P(f) = 2\pi S(\omega)$ という関係がある。$S(\omega)$ や $P(f)$ はさきほどと同じ理由で「パワースペクトル密度」と呼ばれる。もちろん実際の計算では、適当に長いが有限の時間でパワースペクトルを計算している。

パワースペクトル密度を用いると、信号のパワー $x(t)^2$ の時間平均、すなわち「平均パワー」$\overline{x^2}$ は

$$\overline{x^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) df \tag{7.11}$$

となる。式 (7.10) で定義するときに 2π をつけたために、式 (7.8) と違って式 (7.11) には 2π が付かないことに注意せよ。なお、$x(t)$ が実関数の場合は

$$S(-\omega) = S(\omega) \tag{7.12}$$

$$P(-f) = P(f) \tag{7.13}$$

が成り立つ。

7.1.3 両側スペクトルと片側スペクトル

$S(\omega)$、$P(f)$ は ω、f に関して $(-\infty, +\infty)$ の範囲で定義されている。しかし、実際にスペクトルを扱うことを考えると、定義域を $(0, +\infty)$ に限る方が便利である。そこで、定義域を ω の正の範囲に限った場合のパワースペクトルを $G(\omega)$ とすると、

$$\overline{x^2} = \int_{0}^{+\infty} G(\omega) d\omega \tag{7.14}$$

でなければならないから、

$$G(\omega) = 2S(\omega) \tag{7.15}$$

である。$S(\omega)$ は ω の正と負の領域で定義されているので両側 (two-sided) スペクトル、$G(\omega)$ は正の領域だけで定義されているので片側 (one-sided) スペクトルと呼ばれる。$P(f)$ に対しても同様に片側スペクトル $E(f)$ を定義すると、

$$E(f) = 2P(f) = 4\pi S(\omega) \tag{7.16}$$

となる。これらをまとめると表 7.1 のようになる。FFT アナライザで得られるのは、f 空間での片側パワースペクトルである $E(f)$ の平方根である。

表 7.1: スペクトルの定義法

	角周波数 ω		周波数 f	
	one-sided	two-sided	one-sided	two-sided
記号	$G(\omega)$	$S(\omega)$	$E(f)$	$P(f)$
定義域	$(0,\infty)$	$(-\infty,\infty)$	$(0,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$(0,\infty)$ での積分値	$\overline{x^2}$	$\overline{x^2}/2$	$\overline{x^2}$	$\overline{x^2}/2$

7.2 ノイズスペクトル

本論文で用いたデジタルフィルタ処理では FFT アナライザの出力と同様に、f 空間で定義された片側パワースペクトル $E(f)$ の平方根をもってノイズスペクトルとしている。つまり、ノイズスペクトル $\mathrm{NS}(f)$ は

$$\mathrm{NS}(f) \equiv \sqrt{E(f)} = \sqrt{2P(f)} = \sqrt{\frac{2}{T}|X(f)|^2} \tag{7.17}$$

である。したがって、例えば $x(t)$ の単位が [V] であればノイズスペクトルの単位は $[\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}]$ となる。この時、平均ノイズパワー $\overline{x^2}$ は

$$\overline{x^2} = \int_0^{f_\mathrm{N}} \mathrm{NS}(f)^2 df \tag{7.18}$$

で与えられる。ただし、f_N はナイキスト周波数である。もちろんこの値は

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2 dt \tag{7.19}$$

で計算したものと一致する。

なお、式 (7.16) に示したように、f 空間の片側パワースペクトル $E(f)$ と ω 空間の両側パワースペクトルの間には $E(f) = 4\pi S(\omega)$ という関係がある。したがって、ω 空間の両側パワースペクトルの平方根からここで定義したノイズスペクトルを計算するには、$\sqrt{4\pi}$ 倍すればよいことがわかる。ジョンソンノイズのレベルはよく $\sqrt{4kTR}$ であると言われるが、これは f 空間の片側パワースペクトルの平方根の値である。ω 空間の両側パワースペクトルの平方根では $\sqrt{kTR/\pi}$ となる。

7.3 パルススペクトル

エネルギースペクトルに関しては片側スペクトルというものが一般的には使われていないようである[2]。本論文では、パワースペクトルにならって片側のエネルギースペクトルを定義し、その平方根をもってパル

[2] そもそもエネルギースペクトル自体がパワースペクトルほどには広く使われていない。

ススペクトルとしている。つまり、パルススペクトル $\mathrm{PS}(f)$ を

$$\mathrm{PS}(f) \equiv \sqrt{2|X(f)|^2} = \sqrt{2}|X(f)| \tag{7.20}$$

と定義する[3]。したがって、$x(t)$ の単位が [V] であればパルススペクトルの単位は [V/Hz] である。また、その定義により、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{PS}(f)^2 df \tag{7.21}$$

が成り立つ。

以上の定義に従えば、ω 空間の両側で定義されたフーリエ成分 $X(\omega)$ を f 空間の片側で定義したものに変換するには $2\sqrt{2}\pi$ をかければよいことがわかる[4]。例えば理想的な定電圧バイアスの TES カロリメータの場合、パルススペクトル (電流スペクトル) は

$$\mathrm{PS}(f) = \frac{\sqrt{2}E}{V_{\mathrm{b}}} \frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_0 + 1} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 \tau_{\mathrm{eff}}^2}} \tag{7.22}$$

となる。代表的な関数の両側および片側のフーリエ成分を表 7.2 にまとめる。

表 7.2: 両側/片側フーリエ成分の関係

$x(t)$	$X(\omega)$ (two-sided)	$X(f)$ (two-sided)	$X(f)$ (one-sided)
$E\delta(t)$	$E/2\pi$	E	$\sqrt{2}E$
$\exp(-t/\tau)$	$\frac{1}{2\pi}\frac{\tau}{1+i\omega\tau}$	$\frac{\tau}{1+2\pi i f\tau}$	$\frac{\sqrt{2}\tau}{1+2\pi i f\tau}$

7.4 SN 比スペクトル

信号と雑音の比を SN 比と呼ぶ。一般にはそれぞれのパワースペクトルを周波数空間で積分したものの比を SN 比とすることが多いと思われるが、ここではパルススペクトルとノイズスペクトルの比と定義し、SN 比スペクトルと呼ぶことにする。すなわち、

$$\mathrm{SN}(f) \equiv \sqrt{2}\frac{\mathrm{PS}(f)}{\mathrm{NS}(f)} \tag{7.23}$$

とする。$\mathrm{SN}(f)$ の単位は $[\mathrm{Hz}^{-1/2}]$ である。係数 $\sqrt{2}$ は、後述するようにエネルギー分解能の計算で余計な係数を含まないようにするためのもので、片側スペクトルとして定義するための係数と考えてもよい。

SN 比スペクトルはノイズ等価パワー NEP と密接な関係のある重要な量である[5]。responsivity を $S(f)$ とすると[6]、NEP は

$$\mathrm{NEP}(f) \equiv \frac{\mathrm{NS}(f)}{|S(f)|} \tag{7.24}$$

で定義される (単位は $[\mathrm{W}/\sqrt{\mathrm{Hz}}]$)。入射 X 線のエネルギーを E とすると、responsivity の絶対値はパルススペクトルを用いて

$$|S(f)| = \frac{\mathrm{PS(f)}}{\sqrt{2}E} \tag{7.25}$$

[3]この定義ではフーリエ成分の大きさだけを記述しているが、パルススペクトルの場合は位相まで含めて意味がある。

[4]もしもパルススペクトルを $\mathrm{PS}(f) \equiv 2|X(f)|$ で定義すれば、ω 空間両側スペクトルから f 空間片側スペクトルへの変換係数は 4π となりパワースペクトルの変換係数と同じになるが、式 (7.21) で余計な係数が必要になる。

[5]$\mathrm{NEP}(f)$ は一般に f 空間の片側で定義されている。

[6]一般には $S(\omega)$ と書かれることが多いが、responsivity は ω 空間・f 空間、両側・片側によらない量である。

と書けるので、

$$\mathrm{NEP}(f) = \frac{\mathrm{NS}(f)}{\mathrm{PS}(f)/\sqrt{2}E} \tag{7.26}$$
$$= \frac{2E}{\mathrm{SN}(f)} \tag{7.27}$$

という関係があることがわかる。したがって、エネルギー分解能は

$$\Delta E_{\mathrm{FWHM}} = 2.35\left(\int_0^{+\infty}\frac{4df}{\mathrm{NEP}(f)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{7.28}$$
$$= 2.35E\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{SN}(f)^2 df\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{7.29}$$

となる。また、パルスとフォノンノイズの SN 比は

$$\mathrm{SN}(f) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{4kGT^2\Gamma}} = \frac{E}{\sqrt{kGT^2\Gamma}} \tag{7.30}$$

となって、周波数によらず一定の値となる。

7.5 高速フーリエ変換の出力にかけるべき係数

実際のデジタルフィルタ処理の計算ではデータ取得時のサンプリング時間分解能に応じた離散的なデータを扱うこととなる。離散的なデータのフーリエ変換は fftw というライブラリを使用して高速フーリエ変換 (FFT) により行なっているが、このライブラリでは、フーリエ変換の計算にあたってはサンプリングの時間分解能を考慮していないので、FFT によって得た結果を物理的に意味のある値にするためには適当な係数をかける必要がある。これらの値を表 7.3 にまとめる。ただし、Δt はサンプリングの時間分解能、N はサンプル数である。これらを使うと、周波数分解能 Δf は

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} \tag{7.31}$$

Nyquist 周波数 f_{N} は

$$f_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2\Delta t} \tag{7.32}$$

と書ける。

表 7.3: FFT の出力から f 空間のスペクトルを計算する時に必要な係数

種類	電流データに対する単位	両側	片側
フーリエ成分 $X(f)$	A/Hz	Δt	$\sqrt{2}\Delta t$
エネルギースペクトル $\lvert X(f)\rvert^2$	$\mathrm{A}^2/\mathrm{Hz}^2$	Δt^2	$2\Delta t^2$
パルススペクトル PS(f)	A/Hz	Δt	$\sqrt{2}\Delta t$
パワースペクトル $P(f)$, $E(f)$	A^2/Hz	$\Delta t/N$	$2\Delta t/N$
ノイズスペクトル NS(f)	$\mathrm{A}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	$\sqrt{\Delta t/N}$	$\sqrt{2\Delta t/N}$
SN 比スペクトル SN(f)	$/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	$\sqrt{N\Delta t}$	$\sqrt{2N\Delta t}$

第8章 変調多重化用シミュレーション

8.1 Purpose

多重化信号の復調処理の際に、搬送波の位相によりパルスハイトが変化し、そのために分解能が劣化する事が分かった。この劣化の程度は搬送波周波数とパルスの立上り、立ち下がり時定数の比に依存し、現在目標とされている〜100kHz の交流駆動でこの劣化を防ぎ 4eV の分解能を達成するためには何らかの手段で位相を測定し、補正を加える方法が必要となる。現在フーリエ変換を用いて直接的にこの位相を求める方法を検討しており以下が現時点での成果である。

8.2 Problem

8.2.1 Numarical Expression

交流駆動により変調されたパルス $f_m(t)$ は、パルスの入射した時の位相を θ とすると

$$f_m(t) = f(t)\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{8.1}$$

となる。ここで f(t) は変調をかける前のパルスで、今の場合

$$f(t) = N(-e^{-\omega_r t} + e^{-\omega_d t}) \tag{8.2}$$

のような形をしていると考えられる。ここで ω_r, ω_d はそれぞれパルスの立ち上り、立ち下がりの時定数、$\tau_r \tau_d$ の逆数である。$f_m(t)$ を $\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)$ で復調した

$$f_c(t) = f(t)\cos(\omega_0 t + \theta)\cos(\omega_0 t) \tag{8.3}$$

$$f_s(t) = f(t)\cos(\omega_0 t + \theta)\sin(\omega_0 t) \tag{8.4}$$

をフーリエ変換して周波数空間で表すと

$$\begin{aligned}
\hat{F}_c(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega_0 t + \theta)\cos(\omega_0 t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{4}[\cos\theta(2\hat{f}(\omega) + \hat{f}(\omega - 2\omega_0) + \hat{f}(\omega + 2\omega_0)) + i\sin\theta(\hat{f}(\omega - 2\omega_0) - \hat{f}(\omega + 2\omega_0))] \\
\hat{F}_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega_0 t + \theta)\sin(\omega_0 t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{4}[\sin\theta(-2\hat{f}(\omega) + \hat{f}(\omega - 2\omega_0) + \hat{f}(\omega + 2\omega_0)) - i\cos\theta(\hat{f}(\omega - 2\omega_0) - \hat{f}(\omega + 2\omega_0))]
\end{aligned} \tag{8.5}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\omega_d - \omega_r}{(\omega^2 + \omega_d^2)(\omega^2 + \omega_r^2)}\{\omega_d\omega_r - \omega^2 - i\omega(\omega_r + \omega_d)\} \quad \text{（}f(t)\text{ の具体形を式 2 と仮定）} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\omega_d - \omega_r}{(\omega^2 + \omega_d^2)^{\frac{1}{2}}(\omega^2 + \omega_r^2)^{\frac{1}{2}}} \quad e^{i\phi(\omega)}
\end{aligned} \tag{8.6}$$

8.2.2 Phase

上式より $\omega = 0$ の時

$$\hat{F}_c(0) = \frac{1}{8\pi}\left[2\cos\theta\frac{\omega_d-\omega_r}{\omega_r\omega_d} + 2\frac{\omega_d-\omega_r}{(4\omega_0^2+\omega_d^2)(4\omega_0^2+\omega_r^2)}\left\{\cos\theta(\omega_r\omega_d-4\omega_0^2)-\sin\theta(4\omega_0(\omega_r+\omega_d))\right\}\right]$$
$$\hat{F}_s(0) = \frac{1}{8\pi}\left[2\sin\theta\frac{\omega_d-\omega_r}{\omega_r\omega_d} + 2\frac{\omega_d-\omega_r}{(4\omega_0^2+\omega_d^2)(4\omega_0^2+\omega_r^2)}\left\{\sin\theta(\omega_r\omega_d-4\omega_0^2)+\cos\theta(4\omega_0(\omega_r+\omega_d))\right\}\right] \tag{8.7}$$

$\omega_0 = 2\pi \times 100[\mathrm{kHz}], \omega_r = 500[\mathrm{kHz}], \omega_d = 10[\mathrm{kHz}]$ とすると第２項は第１項の 1/1000 程度になり無視できるので、以下の式で位相を近似できる。

$$\theta' \approx tan^{-1}\left(\frac{\hat{F}_s(0)}{\hat{F}_c(0)}\right) \quad \text{or} \quad tan^{-1}\left(\frac{\hat{F}_s(0)}{\hat{F}_c(0)}\right) + \pi \quad (\sin\cos \text{の符合に依存}) \tag{8.8}$$

8.3 Simulation

上記結果を基に復調プログラムに手を加えて位相を求める部分を追加し、変調周波数、立ち上り時定数、ノイズレヴェルのパラメータを変化させて、シミュレートパルス作成時の位相（x 軸）と復調時に求めた位相（y 軸）を比較した。

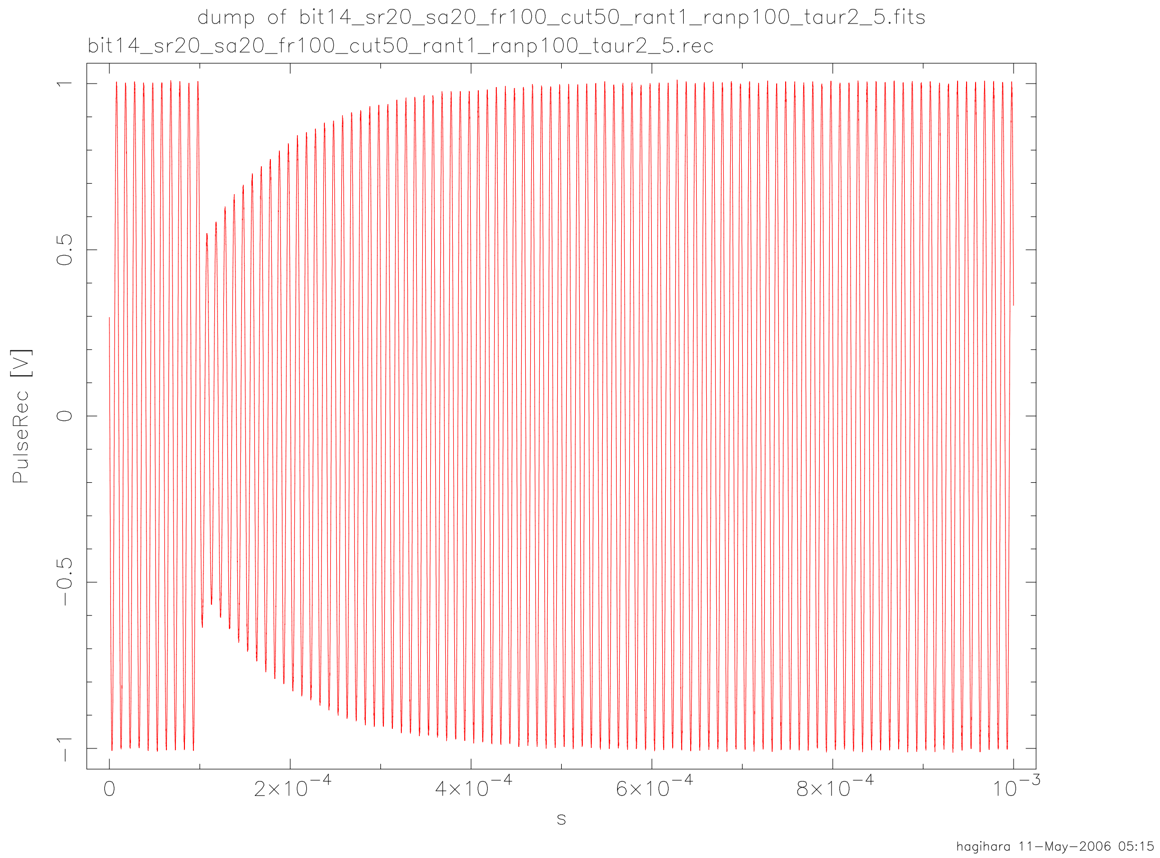


図 8.1: パルス波形 変調波振幅 ±1000mV

8.4 Phase-Compensatation Program

上記プログラムで求めた位相 θ を用い位相補償を行なうプログラムを作成した。基本的な動きは

1. 上記近似式 (8) に沿って位相を求める
2. その位相を用い参照用の $\sin\cos$ の位相をずらす
3. ずらした参照信号を用いフーリエ変換を行なう
4. 算術的な操作を施し、その後逆フーリエ変換を行なう

というものである。

8.4.1 Numarical Expression

$\theta' = \theta + \Delta\theta(\Delta\theta \ll 1)$ とすると

$$f'_c(t) = f(t)\cos(\omega_0 t + \theta)\cos(\omega_0 t + \theta + \Delta\theta) \tag{8.9}$$

$$f'_s(t) = f(t)\cos(\omega_0 t + \theta)\sin(\omega_0 t + \theta + \Delta\theta) \tag{8.10}$$

フーリエ変換を行なって

$$\begin{aligned}
\hat{F'}_c(\omega) &= \frac{1}{4}\left[2\cos\Delta\theta\hat{f}(\omega) + e^{i(2\theta+\Delta\theta)}\hat{f}(\omega - 2\omega_0) + e^{-i(2\theta+\Delta\theta)}\hat{f}(\omega + 2\omega_0)\right] \\
&= \frac{1}{4}\Big[2\cos\Delta\theta\hat{f}_r(\omega) + \cos(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{r-} - \sin(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{i-} + \cos(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{r+} + \sin(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{i+} \\
&\quad + i(2\cos\Delta\theta\hat{f}_i(\omega) + \sin(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{r-} - \cos(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{i-} - \sin(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{r+} + \cos(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{i+})\Big] \\
\hat{F'}_s(\omega) &= \frac{1}{4}\left[2\sin\Delta\theta\hat{f}(\omega) + e^{i(2\theta+\Delta\theta)}\hat{f}(\omega - 2\omega_0) - e^{-i(2\theta+\Delta\theta)}\hat{f}(\omega + 2\omega_0)\right] \\
&= \frac{1}{4}\Big[2\sin\Delta\theta\hat{f}_r(\omega) + \sin(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{r-} - \cos(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{i-} + \sin(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{r+} - \cos(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{i+} \\
&\quad + i(2\sin\Delta\theta\hat{f}_i(\omega) - \cos(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{r-} + \sin(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{i-} + \cos(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{r+} + \sin(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{i+})\Big]
\end{aligned} \tag{8.11}$$

となる ($\hat{f}_{r\pm} + i\hat{f}_{i\pm} = \hat{f}(\omega \pm 2\omega_0)$)。
上式の $\hat{F'}_c(\omega)$、$\hat{F'}_s(\omega)$ の実部と虚部をそれぞれ $\hat{F'}_{cr}(\omega), \hat{F'}_{ci}(\omega), \hat{F'}_{sr}(\omega), \hat{F'}_{si}(\omega)$ とすると以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
P_r(\omega) &= 2(\hat{F'}_{cr}(\omega) + \hat{F'}_{si}(\omega)) = \cos\Delta\theta\hat{f}_r(\omega) + \sin\Delta\theta\hat{f}_i(\omega) + \cos(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{r+} + \sin(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{i+} \\
P_i(\omega) &= 2(\hat{F'}_{ci}(\omega) - \hat{F'}_{sr}(\omega)) = \cos\Delta\theta\hat{f}_i(\omega) - \sin\Delta\theta\hat{f}_r(\omega) - \sin(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{r+} + \cos(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{i+} \\
M_r(\omega) &= 2(\hat{F'}_{cr}(\omega) - \hat{F'}_{si}(\omega)) = \cos\Delta\theta\hat{f}_r(\omega) - \sin\Delta\theta\hat{f}_i(\omega) + \cos(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{r-} - \sin(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{i-} \\
M_i(\omega) &= 2(\hat{F'}_{ci}(\omega) + \hat{F'}_{sr}(\omega)) = \cos\Delta\theta\hat{f}_i(\omega) + \sin\Delta\theta\hat{f}_r(\omega) + \sin(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{r-} + \cos(2\theta' - \Delta\theta)\hat{f}_{i-}
\end{aligned} \tag{8.12}$$

ここで $(\Delta\theta \ll 1)$ のため $\cos\Delta\theta \sim 1, \sin\Delta\theta \sim 1/1000$ である。このことを用いて既知の θ' を使い自己撞着的に変形を行なう。（計算が煩雑であるため 1 式のみ）

$$\begin{aligned}
P_r^1 &= P_r(\omega) - \cos 2\theta' P_r(\omega + 2\omega_0) - \sin 2\theta' P_i(\omega + 2\omega_0) \\
&= \cos\Delta\theta\hat{f}_r(\omega) + \sin\Delta\theta\hat{f}_i(\omega) + 2\sin\Delta\theta(\sin 2\theta'\hat{f}_r(\omega + 2\omega_0) - \cos 2\theta'\hat{f}_i(\omega + 2\omega_0)) \\
&\qquad + \cos\Delta\theta(-\cos 4\theta'\hat{f}_r(\omega + 4\omega_0) - \sin 4\theta'\hat{f}_i(\omega + 4\omega_0)) \\
&\qquad + \sin\Delta\theta(-\sin 4\theta'\hat{f}_r(\omega + 4\omega_0) + \cos 4\theta'\hat{f}_i(\omega + 4\omega_0))
\end{aligned} \tag{8.13}$$

これを順次施すことにより、$\sin\Delta\theta \times \hat{f}(\omega+2\omega_0)/\hat{f}(\omega)$ 程度にまで第 3 項以下の成分を押えることが出来る。$\hat{f}(\omega)$ の周波数特性に依るが上式第 3 項以下で $\cos\Delta\theta \times 4\theta'$ 成分が最大の場合、下記の操作によりさらに高周波成分の洩れ込みを少なくすることが出来る。

$$\begin{aligned} P_r^2 = P_r(\omega) - \cos 2\theta' P_r(\omega+2\omega_0) - \sin 2\theta' P_i(\omega+2\omega_0) \\ + \cos 4\theta' P_r(\omega+4\omega_0) + \sin 4\theta' P_i(\omega+4\omega_0)) \end{aligned} \tag{8.14}$$

また、$\omega = 0$ の成分に対して上式と同じ操作を施すことにより式 8 で決定した θ' の精度を上げることが可能となる。$\cos\Delta\theta$ に依存する項は上の操作で消していく事が可能な為、最終的には θ' の精度による $\sin\Delta\theta$ の大きさが補正限界を決める事となる。

最終的には

$$\begin{aligned} P_r^n(\omega) &= \cos\Delta\theta \hat{f}_r(\omega) + \sin\Delta\theta \hat{f}_i(\omega) + \cos\Delta\theta F_1(\omega+2(n+1)\omega_0) + \sin\Delta\theta O_1(\omega+2\omega_0) \\ P_i^n(\omega) &= \cos\Delta\theta \hat{f}_i(\omega) - \sin\Delta\theta \hat{f}_r(\omega) + \cos\Delta\theta F_2(\omega+2(n+1)\omega_0) + \sin\Delta\theta O_2(\omega+2\omega_0) \\ M_r^n(\omega) &= \cos\Delta\theta \hat{f}_r(\omega) - \sin\Delta\theta \hat{f}_i(\omega) + \cos\Delta\theta F_3(\omega+2(n+1)\omega_0) + \sin\Delta\theta O_3(\omega+2\omega_0) \\ M_i^n(\omega) &= \cos\Delta\theta \hat{f}_i(\omega) + \sin\Delta\theta \hat{f}_r(\omega) + \cos\Delta\theta F_4(\omega+2(n+1)\omega_0) + \sin\Delta\theta O_4(\omega+2\omega_0) \end{aligned} \tag{8.15}$$

を得る。ここで $F_n(\omega+2(n+1)\omega_0)$ は $\hat{f}_r(\omega+2(n+1)\omega_0), \hat{f}_i(\omega+2(n+1)\omega_0)$ の適当な関数であり、$O_n(\omega+2\omega_0)$ は $\hat{f}_r(\omega+\omega'), \hat{f}_i(\omega+\omega') \quad (\omega' > 2\omega_0)$ の適当な関数である。上式３項以下が２項に比べて十分小さければ

$$\begin{aligned} P_r^n(\omega) &\sim \cos\Delta\theta \hat{f}_r(\omega) + \sin\Delta\theta \hat{f}_i(\omega) \\ P_i^n(\omega) &\sim \cos\Delta\theta \hat{f}_i(\omega) - \sin\Delta\theta \hat{f}_r(\omega) \\ M_r^n(\omega) &\sim \cos\Delta\theta \hat{f}_r(\omega) - \sin\Delta\theta \hat{f}_i(\omega) \\ M_i^n(\omega) &\sim \cos\Delta\theta \hat{f}_i(\omega) + \sin\Delta\theta \hat{f}_r(\omega) \end{aligned} \tag{8.16}$$

と近似でき逆フーリエ変換により容易に $\hat{f}(t)$ を求めることが可能となる。

以上より位相補償の必要なパラメータとその際に必要なサンプリングレートをまとめると以下となる。

	limit value	Sanpring Rate(Min)
PhaseComp needed	$\tau_r f_0 < 1$	4(n+1)f_0+2f_c
PhaseComp unneeded	$\tau_r f_0 \geq 1$	$2f_0$

($2\pi f_0 = \omega_o$,f_c=cut off frequency)

8.4.2 Simulation

各段階での PHA スペクトル及びその θ 依存性を示す。なお、pha の算出には digfilt パッケージによる最適フィルターを用いた。また、また RMS1[mV] のホワイトノイズが入れてあり位相補償が完全な場合のエネルギー分解能は E/ΔE=5000 程度となる（図２上段)。

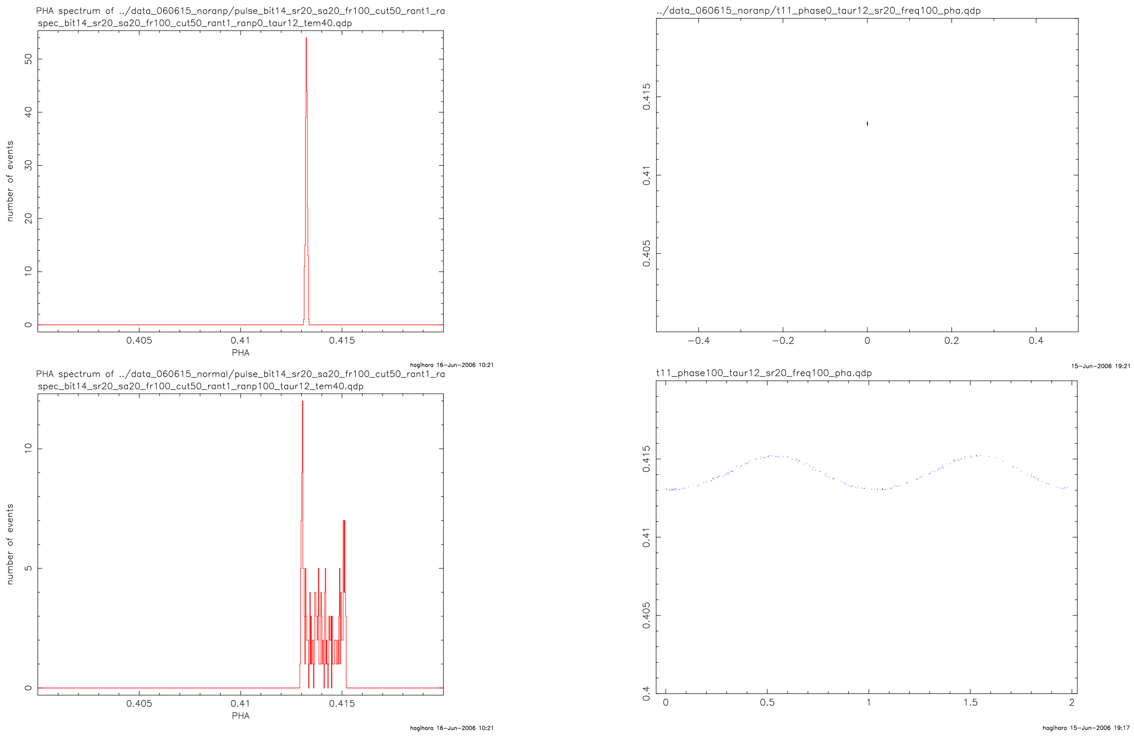


図 8.2: 上段：搬送波の位相ランダマイズ off 下段：搬送波の位相ランダマイズ on 位相補償無し , 左列：pha 、右列：pha を位相に対してプロット

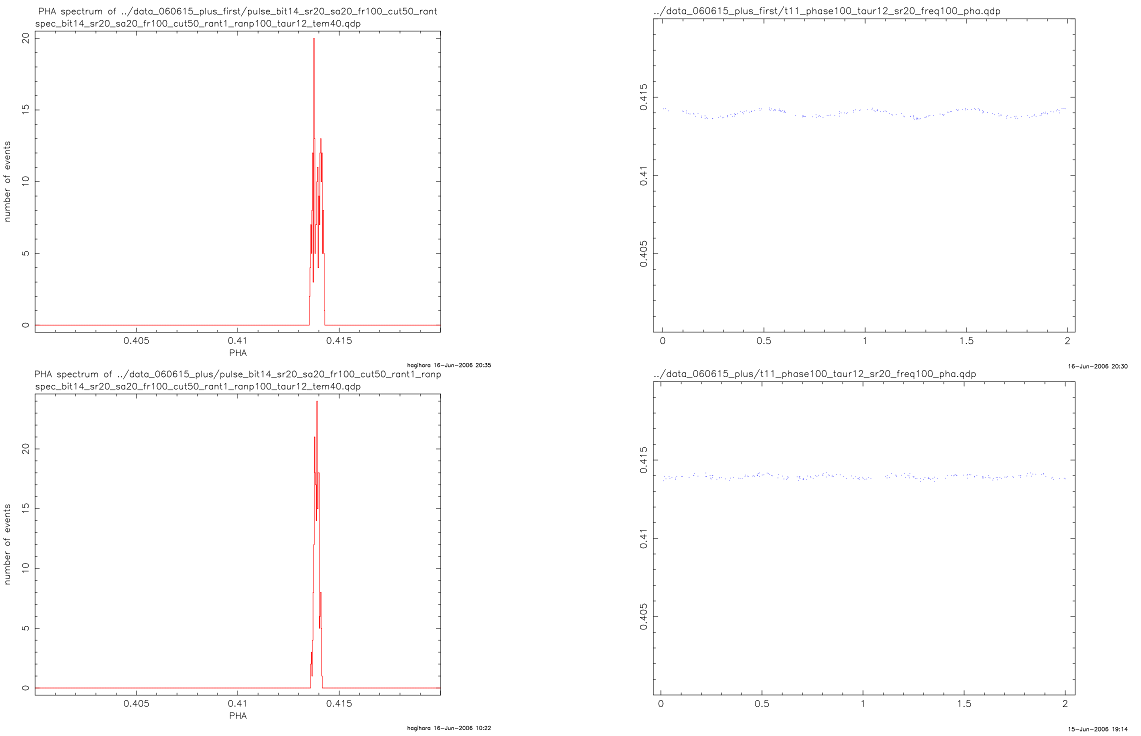


図 8.3: 上段：搬送波の位相ランダマイズ on 位相補償１次下段：搬送波の位相ランダマイズ on 位相補償２次 , 左列：pha 、右列：pha を位相に対してプロット -$2\theta'$ に依存する成分が消え、次数が上がるに従い $4\theta' 8\theta'$ 成分が見える。