

分光・光学ゼミ
Stellar atmosphere

2017/10/5

2017/10/12

阿部 仁

5 The Equations of Statistical Equilibrium

- Introduction

恒星大気は高温・低密

→ガスを理想気体として扱える。

→各エネルギー状態に存在する粒子の個数が全てわかれば、
ガスの状態が特定できる。

ガスの状態が特定するための一つの方法→局所熱力学的平衡(LTE)を仮定

* LTE:局所的に温度や圧力の分布が一様で熱力学的平衡が成り立っている状態
系全体が熱力学的平衡になっている必要はない。

実際にはLTEが成り立っていない場合も多いが、
とりあえず今回はLTEの場合を扱う。

5-1 Local Thermodynamic Equilibrium

- LTEでは、2つの変数（ここでは温度 T と総数密度 N ）で、ガスの状態を特定することができる。

この章では、与えられた T, N に対して、各エネルギー状態に存在する粒子の個数がどのように記述されるかを扱う

マクスウェル分布

- 熱力学平衡の状態では、速度はマクスウェル分布に従う。

速度のマクスウェル分布

$$f(\mathbf{v})dv_xdv_ydv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp[-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT]dv_xdv_ydv_z \quad (5-1)$$

速さの形式

$$f(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-mv^2/2kT) 4\pi v^2 dv \quad (5-2)$$

分布を特徴づける速度：熱速度(最も粒子が多く存在する速度)

$$v_0 = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} = 12.85(T/10^4 A)^{1/2} \text{km/sec} \quad A:\text{原子量} \quad (5-3)$$

その他の速度：二乗平均速度 $\langle v^2 \rangle = 3kT/m$

一成分のとき $\langle v_x^2 \rangle = kT/m$

Boltzmann excitation equation

- 束縛状態にある粒子の分布は、Boltzmann excitation equationで与えられる。

ある状態にある粒子の数密度： n_{ijk} i :励起レベル
 j :電離階数
 k :化学種
原子の基底状態からの励起エネルギー： χ_{ijk}
統計的重み(縮退度)： g_{ijk}

ボルツマン則に従うと、励起状態の数密度は以下のように表される。

$$(n_{ijk}/n_{0jk})^* = (g_{ijk}/g_{0jk})\exp(-\chi_{ijk}/kT) \quad (5-4)$$

異なる2準位間(l, m)では、

$$(n_{mjk}/n_{ljk})^* = (g_{mjk}/g_{ljk})\exp[-(\chi_{mjk} - \chi_{ljk})/kT] \\ (g_{mjk}/g_{ljk})\exp(-h\nu_{lm}/kT) \quad (5-5)$$

$h\nu_{lm}$ は2準位間のエネルギー差に等しい光子のエネルギー

Boltzmann excitation equation

- i について全てを足し合わせると、特定の電離状態にある粒子の総数 N_{jk}^* がわかる。(これは電離平衡の計算などに用いられる。)

$$\begin{aligned} N_{jk}^* &= \sum_i n_{ijk} = (n_{0jk}^*/g_{0jk}) \sum_i g_{ijk} \exp(-\chi_{ijk}/kT) \\ &= (n_{0jk}^*/g_{0jk}) U_{jk}(T) \end{aligned} \quad (5-6)$$

ここで、 $U_{jk}(T)$ は分配関数

$$U_{jk}(T) \equiv \sum_i g_{ijk} \exp(-\chi_{ijk}/kT) \quad (5-7)$$

(5-4)と(5-6)を用いると、

$$(n_{ijk}/N_{ij})^* = g_{ijk} \exp(-\chi_{ijk}/kT) / U_{jk}(T) \quad (5-8)$$

(5-8)は古典的な吸収増加曲線解析に用いられる。(10-3,10-4参照)

The Saha Ionization Equation

- Boltzmann excitation equationを非束縛状態まで拡張して、The Saha Ionization Equationを導く

化学種 k の粒子が基底状態からイオン化する時を考える。

そのために必要なエネルギーは

イオン化エネルギー $\chi_{I,0,k}$ + 電子の運動エネルギー $-\frac{1}{2}mv^2$

また、統計的重みはイオンと電子両方を考えて、 $g(v) = g_{0,1,k} \times g_{electron}$
これらを、(5-4)に代入すると、

$$[n_{0,1,k}(v)/n_{0,0,k}]^* = (g(v)/g_{0,0,k}) \exp \left[- \left(\chi_{I,0,k} + \frac{1}{2}mv^2 \right) / kT \right] \quad (5-9)$$

The Saha Ionization Equation

$g_{electron}$ は位相空間での要素の数なので、

$$g_{electron} = 2(dx dy dz dp_x dp_y dp_z) / h^3$$

電子のスピン
 n_e^{-1}

$$dp_x dp_y dp_z = 4\pi p^2 dp = 4\pi m^3 v^2 dv$$

これらを(5-9)に代入して、

$$\begin{aligned}
 & [n_{0,1,k}(v)/n_{0,0,k}]^* \\
 & = 8\pi m^3 h^{-3} (g_{0,1,k}/g_{0,0,k}) n_e^{-1} \exp\left[-\left(\chi_{I,0,k} + \frac{1}{2}mv^2\right)/kT\right] v^2 dv
 \end{aligned} \tag{5-10}$$

全ての速度に渡って積分すると

$$\begin{aligned}
 & [n_{0,1,k} n_e / n_{0,0,k}]^* \\
 & = 8\pi m^3 h^{-3} (g_{0,1,k}/g_{0,0,k}) \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \exp[-\chi_{I,0,k}/kT] \int_0^\infty e^{-x^2} x^2 dx
 \end{aligned} \tag{5-11}$$

積分を実行して

Sahaの式

$$n_{0,0,k}^* = n_{0,1,k}^* n_e^* \frac{1}{2} (h^2 / 2\pi m k T)^{3/2} (g_{0,0,k} / g_{0,1,k}) \exp[\chi_{I,0,k} / k T] \tag{5-12}$$

The Saha Ionization Equation

(5-12)は初期の状態によらず成り立つと考えられるので

$$n_{0jk}^* = n_{0,j+1,k}^* n_e^* \frac{1}{2} (h^2 / 2\pi m k T)^{3/2} (g_{0jk} / g_{0,j+1,k}) \exp[-\chi_{Ijk} / kT] \quad (5-13)$$

(5-4)をさらに適用すれば、 j 階のイオンの任意の状態が表せる。

$$\begin{aligned} n_{ijk}^* &= n_{0,j+1,k}^* n_e^* (g_{ijk} / g_{0,j+1,k}) C_I T^{-3/2} \exp[-\chi_{Ijk} / kT] \\ &\equiv n_{0,j+1,k} n_e \Phi_{ijk}(T) \end{aligned} \quad (5-14)$$

ここで、 $C_I = 2.07 \times 10^{-16}$ in cgs

(5-14)は今後、LTEの定義として用いられる。

The Saha Ionization Equation

(5-14)に(5-6)を適用すると、

$$n_{i,j,k}^* = N_{j+1,k}^* n_e [g_{0,j+1,k}/U_{j+1,k}(T)] \Phi_{ijk}(T) \equiv N_{j+1,k}^* n_e \widetilde{\Phi}_{ijk}(T) \quad (5-15)$$

また、すべての*i*を足し合わせると、

$$(N_{jk}/N_{j+1,k}^*) = n_e [U_{j,k}(T)/U_{j+1,k}(T)] C_I T^{-\frac{3}{2}} \Phi_{ijk}(T) \equiv n_e \widetilde{\Phi}_{jk}(T) \quad (5-16)$$

(5-15)を再帰的に用いると、化学種*k*において*j*階電離のイオンが全体の粒子のうちどれぐらい存在するか求めることができる。

$$\begin{aligned} f_{jk}(n_e, T) &\equiv (N_{jk}/N_k)^* \\ &= \frac{(N_{J-1,k}/N_{Jk}) \dots (N_{j,k}/N_{j+1k})}{1 + \left(\frac{N_{J-1,k}}{N_{Jk}}\right) + \left(\frac{N_{J-1,k}}{N_{Jk}}\right) \left(\frac{N_{J-1,k}}{N_{Jk}}\right) + \dots + \left(\frac{N_{J-1,k}}{N_{Jk}}\right) \dots \left(\frac{N_{0,k}}{N_{1k}}\right)} \quad J_k: \text{化学種}k \text{が} \text{できる} \text{最大の} \text{電離数} \\ &= \prod_{l=j}^{J_k-1} [n_e \widetilde{\Phi}_{lk}(T)] / \sum_{m=0}^{J_k} \prod_{l=m}^{J_k-1} [n_e \widetilde{\Phi}_{lk}(T)] \equiv P_{jk}(n_e, T) / S_k(n_e, T) \end{aligned} \quad (5-17)$$

5-2 The LTE Equation of State for Ionizing Material

- Saha-Boltzmannの関係式で、各々の化学種でイオン化の段階や自由電子の数を計算できる。
- いくつかの化学種は温度に従って、電離度が大きくなる
→2つの電離状態の線の強度比を取ることで温度構造を見ることが出来る
- 通常の星は、水素が一番多く、ついでヘリウムが多い。
($N(He)/N(H) \approx 0.1$)
その他の金属がごく少量しか含まれていない
大気中の電子の供給源は温度によって異なり、
6000K程度では大気中の金属から、10000Kでは水素から、
さらに高温になるとヘリウムの寄与も重要になる。

Charge and Particle Conservation

恒星大気では、静水圧平衡の式からガス圧を求められるので、 T と P_g がわかり、状態方程式から総数密度を計算できる。

$$P_g = NkT = (N_{atoms} + N_{ions} + n_e)kT = (N_N + n_e)kT \quad (5-18)$$

N_N :核子の数密度

粒子種 k の存在比を α_k とすると、 $N_k = \alpha_k N_N$ かつ $\sum_k \alpha_k \equiv 1$ なので、

(粒子保存の式)
$$N_k = \alpha_k (N - n_e) \quad (5-19)$$

さらに、プラズマが中性であるとする、自由電子とイオンの電荷が等しいので

(電荷保存の式)
$$n_e = \sum_k \sum_{j=1}^{J_k} j N_{jk} = \sum_k N_k \sum_{j=1}^{J_k} j f_{jk}(n_e, T) = (N - n_e) \sum_k \alpha_k \sum_{j=1}^{J_k} j f_{jk}(n_e, T) \quad (5-20)$$

n_e, T が分かっているならば N, f_{jk} は直接計算できる。しかし、 N, T しかわからない時は、 n_e を非線形方程式から求めなくてはならない

Charge and Particle Conservation

ガスが水素($\chi_H = 13.6\text{eV}$)と金属”M” ($\chi_M = 4 - 5\text{eV}$)だけでできているとし、水素が金属”M”より非常に多い($\alpha_M \ll 1$)状況を考える。

- ・ 高温→水素が電離→プラズマ中の電子の大半は水素由来
- ・ 低温→水素は中性→ n_e は金属Mの電離状態 f_M によって決まる

全粒子密度は以下の式で表される。

$$N = n_H(1 + f_H) + \alpha_M n_H(1 + f_M) \quad (5-21)$$

また、電子数密度は

$$n_e = n_p + n_{M^+} = n_H(f_H + \alpha_M f_M) \quad (5-22)$$

この2式からガス圧と電子の圧力の比は

$$P_e/P_g = (f_H + \alpha_M f_M)/[1 + f_H + \alpha_M(1 + f_M)] \quad (5-23)$$

高温： $f_H \rightarrow 1, \alpha_M \ll 1$ なので $P_e/P_g \rightarrow 1/2$

中間： $\alpha_M \ll f_H \ll 1, f_M \approx 1$ なので $P_e/P_g \approx f_H$

低温： $f_H \rightarrow 0, f_M/f_H \gg 1$ なので $P_e/P_g \rightarrow \alpha_M f_M$

高温では P_e/P_g の決定に金属は関わらないが、低温では金属の電離状態とその存在比によってきまる。

Charge and Particle Conservation

純粋な水素ガスの場合、(5-16),(5-19),(5-20)を用いると、

$$n_e(H) = \tilde{\Phi}_H^{-1} [(N\tilde{\Phi}_H + 1)^{\frac{1}{2}} - 1] \quad (5-24)$$

電離度が低い時は $n_e \sim N^{1/2}$ となる。

また、金属のみがイオン化している場合 ($f_H \ll \alpha_M$) には、

$$n_e(M) \approx \tilde{\Phi}_M^{-1} \left\{ \left[\alpha_M N \tilde{\Phi}_M + \frac{1}{4} (1 + 2\alpha_M) \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (1 + \alpha_M) \right\} \quad (5-25)$$

(5-24),(5-25)から、 $\alpha_M \ll 1$ かつ $\chi_M \ll \chi_H$ の場合には、

$n_e \approx n_e(H) + n_e(M)$ から電子密度を推定できる。

Solution by Linearization

一般化されたNewton-Raphson法を用いて、与えられた (N, T) に対して n_e を決定することを考える。解くべき式は(5-20)。

はじめに電子密度を推定して、iterationをかけることで解を得る。

はじめの電子密度を n_e^0 として、真の値 n_e との差を δn_e とする。

$\delta n_e/n_e^0 \ll 1$ と仮定して、(5-20)に代入し、1次の項まで取り出すと、

$$n_e^0 + \delta n_e \approx [(N - n_e^0 - \delta n_e)\tilde{\Sigma}(n_e^0, T)] + (N - n_e^0)[\partial\tilde{\Sigma}(n_e, T)/\partial n_e]_{n_e^0}\delta n_e \quad (5-26)$$

δn_e について整理すれば、

$$\delta n_e \approx [(N - n_e^0)\tilde{\Sigma} - n_e^0][1 + \tilde{\Sigma} - (N - n_e^0)(\partial\tilde{\Sigma}/\partial n_e)]^{-1} \quad (5-27)$$

$$\text{ここで、}\tilde{\Sigma}(n_e, T) \equiv \sum_k \alpha_k S_k^{-1}(n_e, T) \sum_{j=1}^{J_k} j P_{jk}(n_e, T) \quad (5-28)$$

また、 P, S は以下のように書き直せる。

$$P_{jk}(n_e, T) \equiv \prod_{l=j}^{J_k-1} [n_e \tilde{\Phi}_{lk}(T)] = n_e^{(J_k-j)} \Pi_{jk}(T) \quad (5-29)$$

$$S_k(n_e, T) \equiv \sum_{j=0}^{J_k} P_{jk}(n_e, T) = \sum_{j=0}^{J_k} n_e^{(J_k-j)} \Pi_{jk}(T) \quad (5-30)$$

δn_e が求まったら $n_e^0(\text{new}) = n_e^0(\text{old}) + \delta n_e$ として、繰り返し計算すれば n_e を推定できる。

Solution by Linearization

解の収束次数は2次なので、 n_e^0 が収束範囲に入っていれば速く収束する。
また、 $\partial\tilde{\Sigma}/\partial n_e$ は解析的に評価できる。

$$\left(\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial n_e}\right) = \sum_k \alpha_k \left[S_k^{-1} \sum_j j \left(\frac{\partial P_{jk}}{\partial n_e}\right) - S_k^{-2} \left(\frac{\partial S_k}{\partial n_e}\right) \sum_j j P_{jk} \right] \quad (5-31)$$

一般に線形化で現れる微分は数値的に見積もられるが、解析的な微分を用いた方が計算をコントロールしやすいことが経験的にわかっている。

最後に、得られた n_e と f_{jk} から(5-15)式を用いて、
以下のように n_{ijk} を得ることができる。

$$n_{ijk} = N_{j+1,k} n_e \tilde{\Phi}_{ijk}(T) = \alpha_k (N - n_e) n_e f_{j+1,k}(n_e, T) \tilde{\Phi}_{ijk}(T) \quad (5-32)$$

Solution by Linearization

今までは、 (T, N) は与えられるものと仮定したが、これらの量は一般的にはモデル計算によって近似的にしか得られない。 (T, N) も変数だとすると、(5-20)は

$$n_e + \delta n_e = (N + \delta N - n_e - \delta n_e) + (N - n_e)[(\partial \tilde{\Sigma} / \partial n_e) \delta n_e + (\partial \tilde{\Sigma} / \partial T) \delta T] \quad (5-33)$$

また、 n_e が(5-20)の (T, N) の時の解だとすれば、

$$\delta n_e = [1 + \tilde{\Sigma} - (N - n_e^0)(\partial \tilde{\Sigma} / \partial n_e)]^{-1} [\tilde{\Sigma} \delta N + (N - n_e)(\partial \tilde{\Sigma} / \partial T) \delta T] \equiv (\partial n_e / \partial N)_T \delta N + (\partial n_e / \partial T)_N \delta T \quad (5-34)$$

また、 δn_{ijk} は、(5-32)と(5-34)を使うと、 $\delta T, \delta N$ の2変数で表せることがわかるので、

$$\delta n_{ijk} = (\partial n_{ijk} / \partial N)_T \delta N + (\partial n_{ijk} / \partial T)_N \delta T \quad (5-35)$$

(5-34), (5-35)は7-2で $(\delta N, \delta T)$ に対するopacityとemissivityの変化 $(\delta \chi, \delta \eta)$ を調べるのに用いる。

5-3 The Microscopic Requirements of LTE

- Detailed Balance

熱力学平衡では、全ての過程の頻度とその逆過程の頻度が等しい。
(Detailed Balance)

粒子の状態を変える過程は大きく2つに分類される (衝突と放射)

Detailed Balanceが成り立つ時

衝突：粒子の速度分布がMaxwell分布になる。(恒星大気ではけっこう成り立つ)
衝突的な性質を持つfree-bound放射再結合,free-free放射なども同様

放射：放射過程(photoexcitation, photoionizationなど)は放射場に依存
放射場が等方的でプランク分布の時のみ成立。(あまり成り立たない)

LTEは、高密で衝突率が大きくなり、光子が熱化する前にいなくならないぐらい
光学的深さが深いところで成立。(i.e.,星の内部)

The Nature of The Radiation Field

恒星大気は単一温度の閉じた系ではなく、表面からの放射は何もない宇宙に出て行く→放射場は等方ではなく温度勾配を持つ

ある点の放射場は、その点からの放射が届く点全体の放射・吸収を積分することで得られる。→表面や宇宙を含むので、intensityが弱まる。
→放射場は、非局所的な性質を持つ
→放射率は平衡の時の値から離れ、LTEが成り立たなくなる。

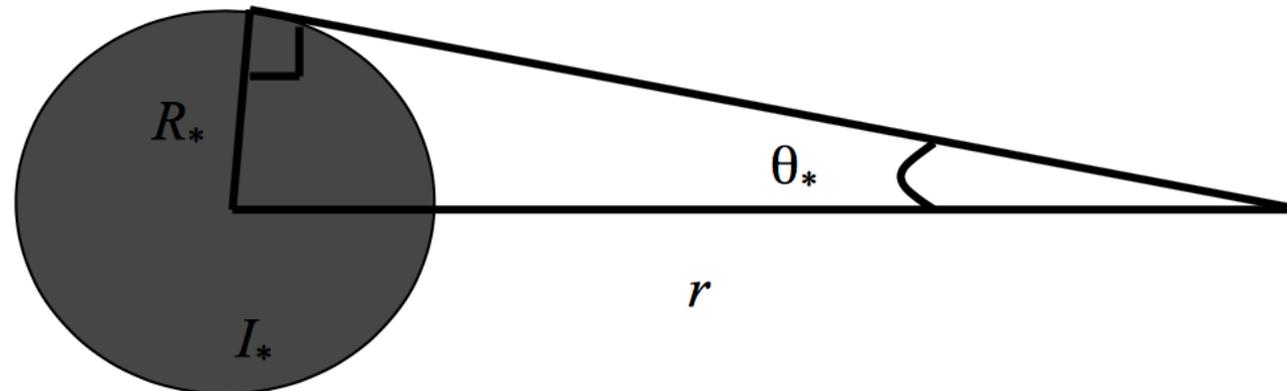
The Nature of The Radiation Field

放射の表面に対する立体角は 4π より小さい→放射場は非等方

Dilution factor W : 放射エネルギーが幾何学的な要因で薄められる分の因子

$$W \equiv \frac{\omega_*}{4\pi} = \frac{1}{2} \{1 - [1 - (r_*/r)^2]^{1/2}\} \quad (5-36)$$

ω_* : 恒星に対する立体角
 r_* : 放射表面の半径
 r : 観測者の位置



The Nature of The Radiation Field

星表面では $W=1/2$ (実際はlimb-darkeningの影響で小さくなる)

エンベロープでは $W \ll 1$

熱力学平衡では $W \equiv 1$ になるべき

→恒星大気では、放射で遷移が起きる時はDetailed Balanceは成り立たない

さらに、恒星の放射場はプランクの周波数分布とは異なる。

物質は周波数によって異なる高さ (温度) を見ている。

→放射場は異なる放射温度の合成

放射場は複雑な振る舞いをするので、LTEを仮定するのは注意が必要

The Electron Velocity Distribution

恒星大気では、自由電子は、
Photoionizationとcollisional ionizationによって供給され、
Radiative recombinationとthree-body collisionによって失われる。

電子同士の衝突→弾性衝突
→エネルギーを再分配
→平衡に達する（速度がMaxwell分布になる。）

電子とイオン・原子の衝突→非弾性衝突や再結合
→電子の速度を変え、衝突も起こりにくくなる
→速度がMaxwell分布になるのを妨げる

どちらの過程が速いかで、平衡に達するかどうかが決まる。

The Electron Velocity Distribution

熱平衡に達する時間→relaxation time

$$t_c = m^{\frac{1}{2}}(3kT)^{3/2} / \left[17.9n_e e^4 Z^4 \ln \left(\frac{D}{p_0} \right) \right] sec \quad (5-37)$$

$p_0 = e^2/mv^2:90^\circ$ の衝突の時のimpact parameter
 $D = (kT/8\pi e^2 n_e)^{1/2}$:Debye radius

Recombinationが起こる時間

$$t_r = (N\sigma \langle v \rangle)^{-1} = N^{-1}\sigma^{-1}(\pi m/8kT)^{1/2} sec \quad (5-38)$$

考えるRecombination

(a) $H + e \rightarrow H^-$ at $T=6000K \rightarrow t_r/t_c \sim 10^5$

(b) $H^+ + e \rightarrow H$ at $T=10000K \rightarrow t_r/t_c \sim 10^7$

Recombinationより弾性衝突の方が非常に多く起きているので、
RecombinationによってMaxwell分布に達するのを妨げられることはない

The Electron Velocity Distribution

非弾性衝突の頻度と弾性衝突の頻度を比較する。

- ・水素と電子の衝突

水素の励起エネルギーは10eV vs 電子の熱エネルギーは1eV

→電子のうち 3×10^{-5} しか十分なエネルギーをもたない

→(10000Kの時) recombinationと同じオーダー

→Maxwell分布に影響を与えない

- ・その他の物質と電子の衝突

(a) アルカリ金属:高い衝突断面積・低い存在比(10^{-6})

(b) Fe:たくさんの低い準位・並みの存在比(4×10^{-5})

(c) C,N,O:小さい衝突断面積・高い存在比(10^{-3})

準安定状態

→非弾性衝突による励起の大半は脱励起でキャンセルされる。

Böhmの計算では(弾性衝突/非弾性衝突) $\sim 10^3$

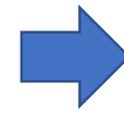
→Maxwellの速度分布でよい

The Electron Velocity Distribution

純粋な水素ガス中でMaxwell分布から離れる時

(a) 電離度が非常に低い ($n_e/n_H \leq 0.01$)

(b) 基底状態の数が平衡時の値から離れている



彩層でこの状況になりうる

・ 大気中の原子・イオンはMaxwell分布になっているかある解析では、

$n_e > 10^{10}$ かつ $5 \times 10^3 < T_e < 10^5$ の時は、

$$|T_k - T_e| \leq 10^{-3} T_e$$

→ 恒星大気の大半の場所では、粒子はMaxwell分布になっていて、電子と原子・イオンは同じ温度である。

The Ionization Equilibrium

イオン化の割合

Photoionization
collisional ionization

VS

radiative recombination
three-body collisional recombination

① photoionizationとcollisional ionizationの比

• photoionization

$$n_i R_{ik} = n_i \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi J_{\nu} \alpha_i(\nu)}{h\nu} d\nu \quad (5-39)$$

遷移確率 $n_i R_{ik}$ 状態*i*の粒子が周波数*ν*で吸収するエネルギー $4\pi J_{\nu} \alpha_i(\nu)$ 光子1個のエネルギー $h\nu$

$\alpha(\nu) = (\pi e^2 / mc) f_c (2\nu_0^2 / \nu^3)$: 水素原子の断面積 f_c : 積分した振動子強度

$$J_{\nu} = W B_{\nu}(T_R) = (\pi e^2 / mc) f_c (2h\nu^3 / c^2) \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-nh\nu / kT_R)$$

これらを用いると、

$$R_{ik} = (16\pi^2 e^2 \nu_0^2 / mc^3) f_c W \sum_{n=1}^{\infty} E_1(nh\nu_0 / kT_R) \quad (5-40)$$

ただし、 $E_1(x) = \int_{\nu_0}^{\infty} \exp(-x) / x dx$

The Ionization Equilibrium

- collisions ionization

$$n_i C_{ik} = n_i n_e \int_{v_0}^{\infty} \sigma(v) f(v) v dv \quad (5-41)$$

遷移確率

準古典的なトムソンの式

電子の運動エネルギー $-\frac{1}{2}mv^2$

$$\sigma(v) = 3f_c \pi e^4 E^{-1} [(h\nu_0)^{-1} - E^{-1}] \quad (5-42)$$

(5-2), (5-42) を (5-41) に代入して、

$$C_{ik} = n_e \left[12\pi^{\frac{1}{2}} e^4 f_c / (2mk^3 T_e^3)^{\frac{1}{2}} \right] u_0^{-1} E_2(u_0) \quad (5-43)$$

ここで、 $u_0 \equiv h\nu_0 / kT_e$

また、 $E_2(u_0) = \int_{u_0}^{\infty} [u - u_0] \frac{\exp(-u)}{u} du$

The Ionization Equilibrium

$h\nu_0 \gg kT_e, h\nu_0 \gg kT_R$ の時を考える。

$x \gg 1$ の時、 $E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow e^{-x}/x$ に注意して、(5-40)と(5-43)の比を取ると、photoionizationとcollisional ionizationの比

$$\frac{R_{ik}}{C_{ik}} \approx \frac{4(2\pi^3 k)^{\frac{1}{2}} h\nu_0^3}{3m^{\frac{1}{2}} e^2 c^3} \left(\frac{W T_R}{n_e T_e^{\frac{1}{2}}} \right) \exp \left[h\nu_0 \left(\frac{1}{kT_e} - \frac{1}{kT_R} \right) \right] \quad (5-44)$$

Photosphereでの R_{ik}/C_{ik} の値(K.H.Böhm)

Star	$\chi_{ion} = 8\text{eV}$	$\chi_{ion} = 1\text{eV}$
Sun	10^3	2
O-star	20	0.2

仮定: $W \sim \frac{1}{2}, T_R \approx T_e$
 太陽: $n_e \approx 3 \times 10^{12}$
 $T \approx 5 \times 10^3 \text{K}$
 O-star: $n_e \approx 3 \times 10^{14}$
 $T \approx 3.2 \times 10^4 \text{K}$

Photosphereでは、放射による電離が支配的



電離平衡の式は、 J_ν が B_ν から離れるとLTEから離れる

ただし、coronaでは Collisional ionizationの方が支配的

The Ionization Equilibrium

- ② radiative recombination と three-body collisional recombination の比
どちらも衝突的な過程なので、LTE の状況を考えて良い
また、これらの比は、(5-44) を $T_R \rightarrow T_e, W \equiv 1$ とすることで適用できる。
よって、

$$\frac{R_{\kappa i}}{C_{\kappa i}} \approx \frac{4(2\pi^3 k)^{\frac{1}{2}} h \nu_0^3}{3m_e^{\frac{1}{2}} e^2 c^3} \left(\frac{T_e^{\frac{1}{2}}}{n_e} \right)$$

この式から、photosphere でも corona でも radiative recombination が
支配的であることがわかる。

(ただし、corona ではもう一つの過程—dielectronic recombination—
の方がより支配的。)

The Ionization Equilibrium

①、②から電離平衡はphotoionizationとradiative recombinationが釣り合っていれば良い。

→ $n_i R_{i\kappa} = n_\kappa R_{\kappa i} = n_i^* R_{i\kappa}^*$ が成り立つ。

よって、基底状態に対して、

$$\begin{aligned} (n_{0j}^*/n_{0j}) &= 4\pi W \int_{\nu_0}^{\infty} (h\nu)^{-1} \alpha_\nu B_\nu(T_R) d\nu / 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} (h\nu)^{-1} \alpha_\nu B_\nu(T_e) d\nu \\ &= W \int_{h\nu_0/kT_R}^{\infty} e^{-x} x^{-1} d\nu / \int_{h\nu_0/kT_e}^{\infty} e^{-x} x^{-1} d\nu \\ &= W E_1(h\nu_0/kT_R) / E_1(h\nu_0/kT_e) \\ &\approx W (T_R/T_e) [\exp(-h\nu_0/kT_R) / \exp(-h\nu_0/kT_e)] \end{aligned} \quad (5-45)$$

(5-13) Sahaの式を使えばイオン化の近似式が得られる

$$(n_e n_{0,j+1} / n_{0,j}) = W \cdot (2g_{0,j+1} / g_{0,j}) (2\pi m k T_R / h^2)^{3/2} \cdot (T_e / T_R)^{1/2} \cdot \exp(-\chi_{Ij} / kT_R)$$

この式は広く用いられている。(ガス星雲など) (5-46)

The Ionization Equilibrium

電離平衡を解析するためには

(a) J_ν の選び方

(b) どの準位が支配的か を決定する必要がある。

Böhmの考え

$4\pi \int (h\nu)^{-1} \kappa_\nu J_\nu d\nu$ と $4\pi \int (h\nu)^{-1} \kappa_\nu B_\nu d\nu$ を比較する。

κ : すべての連続光のopacityの合計 J_ν : LTEモデル大気から計算される平均intensity

これらの値が等しければ、LTEが自己無撞着になる。

例: Fe I \leftrightarrow Fe II の平衡状態の計算

τ	比の値
0.01	2.9
0.05	1.3
≥ 0.1	~ 1

$\rightarrow \tau = 0.1$ より下なら
LTEは妥当?

実際にはいくつかの欠陥がある

- あるレベルが多かったり少なかったりすると、バランスしうる
- $J_\nu = B_\nu(\tau_\nu) + 0(e^{-\tau_\nu})$ で計算されるので、 $\tau \geq 1$ では二つの積分は人工的に同じ値に近づく。

The Ionization Equilibrium

non-LTEの特徴的な性質

- 源泉関数で散乱(局所的な熱平衡のパラメータにあまり関係ない)の項が支配的になり、広い範囲で S_ν が B_ν から大きく外れる。
(→ §7 – 5, Chapter 11, 12で扱う)
- S_ν を B_ν として、 J_ν をもとめ、そこから S_ν を再計算するのは収束性が悪い。
一回iterationをかけたぐらいでは S_ν は B_ν から大きく離れない。
たくさん繰り返すと S_ν は B_ν からはなれ、 J_ν と等しくなる。
→1回iterationをかけて、 S_ν と B_ν の差を調べるのは価値がない。
(→Chapter 7, 11, 12で扱う)

まとめ

電離平衡では衝突より放射が支配的
放射場が非平衡の性質を持っていたらLTEは成立しない
厳密に自己無撞着な解が得られる時だけ、LTEが有効になる。

The Excitation Equilibrium

Transitionはcollisionとradiationのどちらが支配的かを考える。

Radiationによる励起は $B_{ij} \int \phi_\nu J_\nu d\nu$ によって与えられる。また $J_\nu = WB_\nu$ とする。

Collisionには、(5-43)を用いる。ただし、 f_c は $f_{ij} = B_{ij} h\nu mc / 4\pi^2 e^2$ で置き換える。

結果は、

$$\frac{C_{ij}}{R_{ij}} = \left[\frac{3e^2 m^{\frac{1}{2}} \lambda^3}{2h(2\pi^3 kT)^{\frac{1}{2}}} \right] \left(\frac{n_e}{W} \right) E_2(x) (e^x - 1) \quad (5-47)$$

ただし、 $x \equiv h\nu_{ij}/kT$ 。

熱い星の長波長側を除いてradiationが支配的
→statistical equilibriumとtransfer equationを解く必要がある

C_{ik}/R_{ik} の値(K.H.Böhm)

Star	$\lambda(\text{\AA}) = 3000$	4000	5000	6000	7000	8000	9000
Sun	0.003	0.007	0.017	0.035	0.061	0.099	0.15
O-star	0.19	0.44	0.85	1.4	2.1	3.1	4.2