

分光・光学ゼミ

Stellar Atmosphere

2017/06/28

2017/09/07 川畑佑典

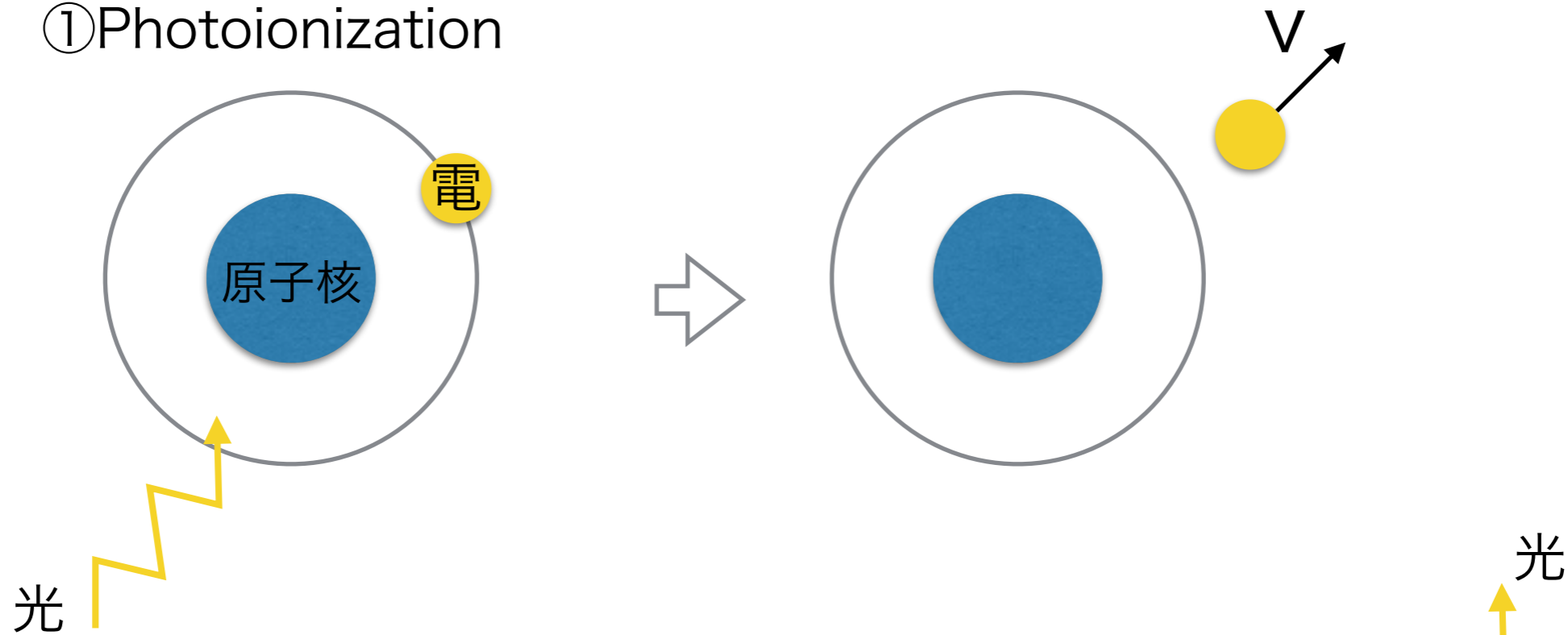
## 今日やること

- Bound-free processに関してアインシュタイン関係式に対応する式を作る。
- Bound-free、free-freeの吸収断面積を求める。
- Bound-free、free-freeの散乱断面積を求める。

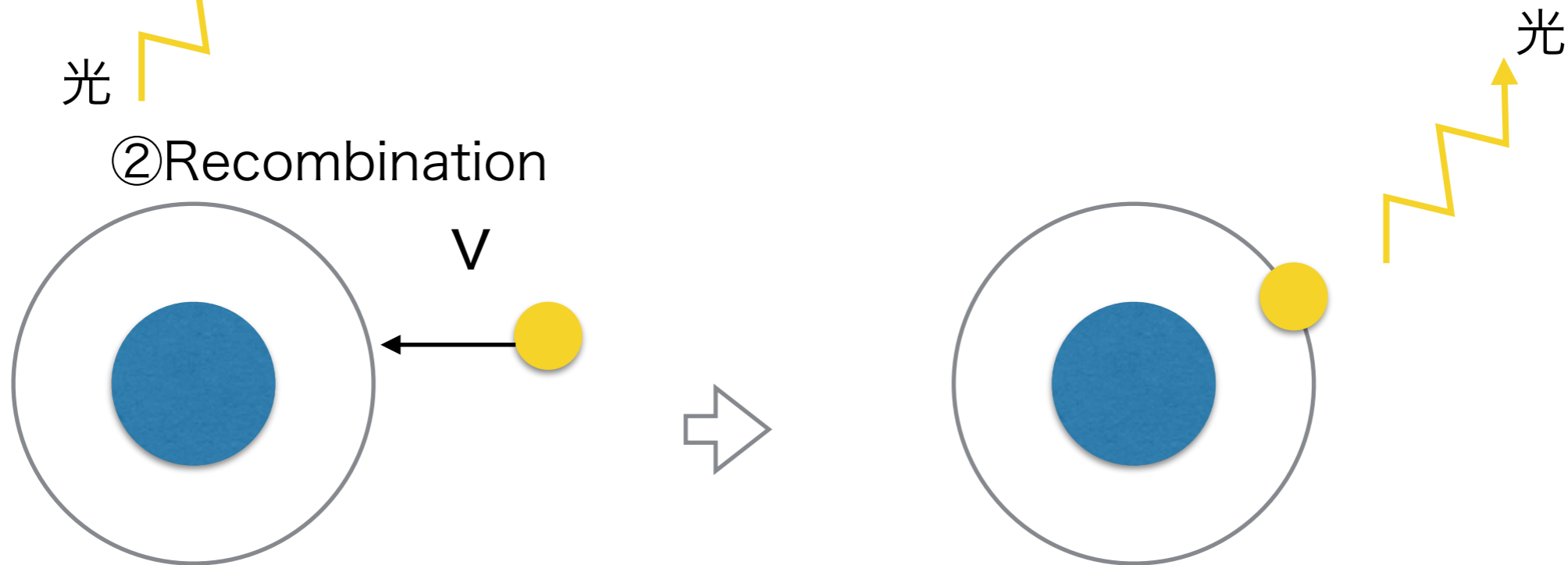
# 4-3 The Einstein-Milne Relations for the Continuum

## Bound-free process

① Photoionization



② Recombination



知りたいこと：Bound-Boundでやったようなアインシュタイン関係式に対応する関係式  
(4-8), (4-9)式

Photoionizationの数

$$n_0 p_\nu I_\nu d\nu dt$$

← アインシュタイン係数でいう  $B_{ij}$   
 (一つの原子の  $d\nu$  の範囲の光子による photoionization の確率)

Recombinationの数

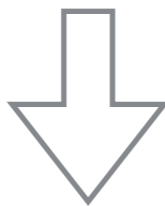
$$n_1 n_e [F(\nu) + G(\nu) I_\nu] \nu d\nu dt$$

← アインシュタイン係数でいう  $A_{ji}$  と  $B_{ji}$

熱力学的平衡を仮定すると

- (Recombinationの数) = (Photoionizationの数)
- $I_\nu \equiv B_\nu$

$$n_0^* p_\nu B_\nu = n_1^* n_e(\nu) [F(\nu) + G(\nu) B_\nu] (h/m) \quad (4-89)$$



$$B_\nu = [F(\nu)/G(\nu)] \{ [n_0^* p_\nu m / n_1^* n_e(\nu) h G(\nu)] - 1 \}^{-1} \quad (4-90)$$

Note

- $n_0$  : 原子の密度
- $n_1$  : イオンの密度
- $n_e(\nu) d\nu$  : ( $\nu, \nu+d\nu$ ) の範囲にいる電子密度

\*は熱力学的平衡時の値

$$h\nu = \chi_I + \frac{1}{2} m v^2 \quad (4-88)$$

↑  
電離ポテンシャル

$$\alpha_\nu \equiv p_\nu h\nu$$

$$B_\nu = [F(\nu)/G(\nu)] \{ [n_0^* p_\nu m / n_1^* n_e(\nu) h G(\nu)] - 1 \}^{-1} \quad (4-90)$$

と

$$B_\nu = (2h\nu^3/c^2) [e^{h\nu/kt} - 1]^{-1}$$

exp()の形にうまく  
書き換えたい

を比較する(Bound-boundの時と同じ手法)

マクスウェル分布から

$$n_e(\nu) d\nu = n_e (m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-m\nu^2/2kT) 4\pi\nu^2 d\nu \quad (4-91)$$

$n_0^*$  と  $n_1^*$  の熱力学的平衡の関係は(Chapter 5でやる)

$$(n_0/n_1)^* = n_e (g_0/2g_1) (h^2/2\pi m kT)^{3/2} \exp(\chi_I/kT) \quad (4-92)$$

(4-88), (4-91), (4-92)式から

$$n_0^* p_\nu m / n_1^* n_e(\nu) h G(\nu) = (h^2 g_0 / 8\pi m^2 g_1 \nu^2) [p_\nu / G(\nu)] e^{h\nu/kt}$$

(4-93)

(続き)

(4-93)を用いてプランクの式と(4-90)を比較すると

$$F(\nu) = (2h\nu^3/c^2)G(\nu) \quad (4-94)$$

$$p_\nu = (8\pi m^2 \nu^2 g_1/h^2 g_0)G(\nu) = (4\pi c^2 m^2 \nu^2 g_1/h^3 g_0 \nu^3)F(\nu) \quad (4-95)$$

Bound-free版のアインシュタインの関係式

<-この関係式もアインシュタインの関係式と同様、熱力学的平衡を仮定しなくても成り立つ

輻射輸送方程式に適用(吸収係数、放射係数を決める)

$$\mu \left( \frac{\partial I_\nu}{\partial z} \right) = -n_0 p_\nu h\nu I_\nu + n_1 n_e(\nu) [F(\nu) + G(\nu) I_\nu] (h^2 \nu / m) \quad (4-96)$$

上式から誘導放射(負の吸収)を加えた吸収係数は

$$\kappa_\nu = \{n_0 - n_1 n_e(\nu) [hG(\nu) / m p_\nu]\} (p_\nu h\nu) \quad (4-97)$$

(4-88), (4-91), (4-92), (4-95)式を使うことで

$$\kappa_\nu = (n_0 - n_0^* e^{-h\nu/kT}) \alpha_\nu \quad (4-98)$$

LTEを仮定すると  $n_0 \equiv n_0^*$  なので

$$\kappa_\nu^* = n_0^* \alpha_\nu (1 - e^{-h\nu/kT}) \quad (4-99)$$

次に  $F(\nu)$  に関する項を見ていく (放射係数)

$$\eta_\nu = [hn_1n_e(\nu)F(\nu)/mp_\nu]\alpha_\nu \quad (4-100)$$

(4-88), (4-91), (4-92), (4-95)式から

$$\eta_\nu = (2h\nu^3/c^2)n_0^*\alpha_\nu e^{-h\nu/kT} = n_0^*\alpha_\nu(1 - e^{-h\nu/kT})B_\nu = \kappa_\nu^*B_\nu \quad (4-101)$$



## 4-4 Continuum Absorption Cross-Sections

4-2章のbound-boundの時と同じように吸収断面積を出す。

自由電子の波動関数

$$\langle E' | E \rangle = \delta(E' - E) \quad (4-102)$$

(4-65), (4-36)式のアナロジーから

$$g_n \alpha_\nu \Delta\nu = (8\pi^2 / 3\hbar^2 c) \Delta E \langle E | \mathbf{d} | n \rangle^2 (h\nu / 4\pi) \quad (4-103)$$

$$\alpha_\nu = (8\pi^3 \nu / 3c g_n) \langle E | \mathbf{d} | n \rangle^2 \quad (4-104)$$

別の方法(振動子強度)で  $\alpha_\nu$  を表すこともできる。

$$\alpha_\nu = (\pi^2 e / mc) f_{nk} (\Delta k / \Delta\nu) \quad (4-105)$$

この表式は水素の吸収断面積を計算するのに便利

# Quantum defect (量子欠損) method

リュードベリの式(水素原子)←スペクトルの波長がわかる

$$h\nu_{n,n'} = E_n - E_{n'} = \mathcal{R}[(1/n')^2 - (1/n)^2] \quad (4-109)$$

bound-freeやfree-freeに拡張したい!

$$\begin{array}{ccc} \text{主量子数に修正を加える} & \nu_{nl} = n - \mu & \\ & \text{有効量子数} & \text{量子欠損} \end{array}$$

電離した後のエネルギーを  $I_{nl} = Z^2 / \nu_{nl}^2$  とする

よって電離状態の主量子数に対応するものは  $k^2 = Z^2 \epsilon$  但し  $\epsilon \equiv -1/\nu_{nl}^2$

その時吸収断面積は

$$\alpha(nl, k^2) = 8.56 \times 10^{-19} [(I_{nl+k^2})/I_{nl}^2] \sum_{l'=l\pm 1} C_{l'} |g(\nu l; \epsilon l')|^2 \quad (4-106)$$

$$g(\nu l; \epsilon l') = [\zeta(\nu, l)]^{-1/2} G(\nu l; \epsilon l') \cos\{\pi[\nu + \mu'(\epsilon) + \chi(\nu l; \epsilon l')]\} \quad (4-107)$$

$$\zeta(\nu, l) \equiv 1 + 2\nu^{-3} [\partial\mu(\epsilon)/\partial\epsilon] \quad (4-108)$$

# 水素のbound-free吸収断面積

Menzel and Pekeris

束縛状態：実数の量子数、自由状態：虚数の量子数で表す。

通常の場合のbound-boundの場合

$$h\nu_{n,n'} = E_n - E_{n'} = \mathcal{R}[(1/n')^2 - (1/n)^2] \quad (4-109)$$

自由状態で量子数  $ik$  を持つと考える。

$$h\nu_{n',k} = \mathcal{R}[(1/n')^2 + (1/k)^2] = (\mathcal{R}/n'^2) + \frac{1}{2}mv^2 \quad (4-110)$$

連続光の振動子強度は(4-78)、(4-79)を一般化して

$$f_{n',k} = \left( \frac{32}{3\pi\sqrt{3}} \right) \left( \frac{1}{n'^5 k^3} \right) \left( \frac{1}{n'^2} + \frac{1}{k^2} \right)^{-3} g_{\text{II}}(n', k) \quad (4-111)$$

## 水素のbound-free吸収断面積(続き)

(4-110)を $\nu$ で微分して

$$(dk/d\nu) = -(hk^3/2\mathcal{R}) \quad (4-112)$$

(4-111)、(4-112)を(4-105)に代入すると

$$\alpha_\nu = \left(\frac{\pi e^2}{mc}\right) \left(\frac{hk^3}{2\mathcal{R}}\right) \left(\frac{32}{3\pi\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{n'^5 k^3}\right) \frac{g_{\text{II}}(n', k)}{(h\nu/\mathcal{R})^3} \quad (4-113)$$

リュードベリ定数  $\mathcal{R} = 2\pi^2(m_p^{-1} + m_e^{-1})e^4/h$  を代入して

$$\alpha_\nu = \left(\frac{64\pi^4 m e^{10}}{3\sqrt{3} c h^6}\right) \frac{1}{n'^5 \nu^3} g_{\text{II}}(n', \nu) = \mathcal{K} \frac{g_{\text{II}}(n', \nu)}{n'^5 \nu^3} \quad (4-114)$$

$$\mathcal{K} = 2.815 \times 10^{29}$$

準位 $n$ からのbound-free過程は閾値  $\nu_n = (\mathcal{R}/hn^2)$  で始まり、 $\nu^{-3}$  で落ちていく

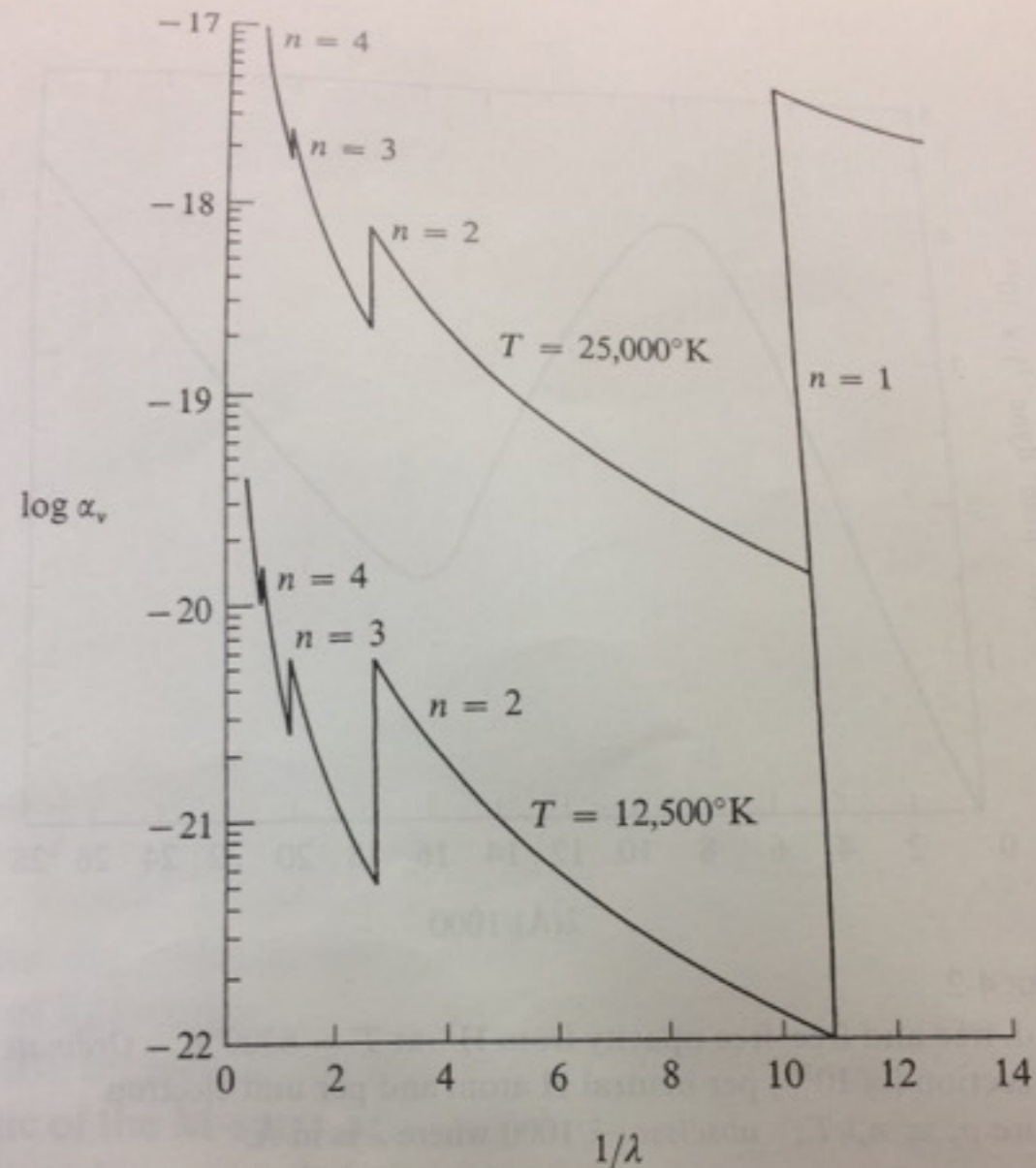


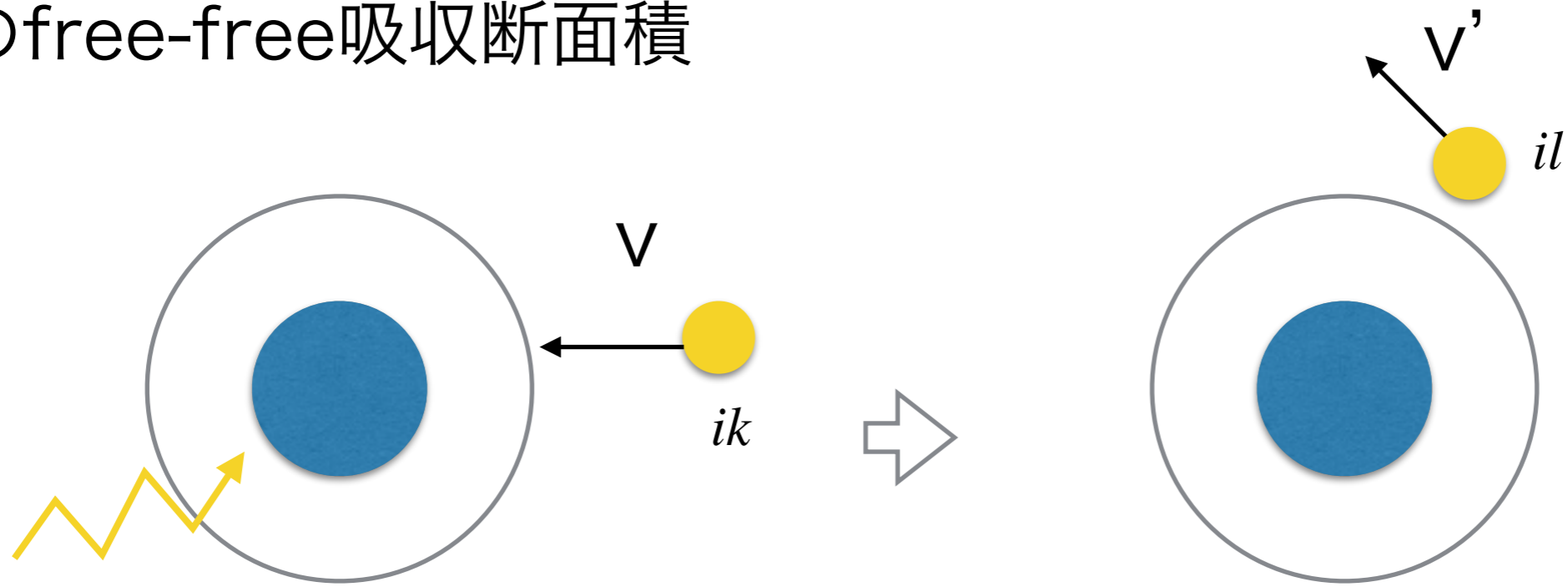
FIGURE 4-1  
 Opacity from neutral hydrogen at  $T = 12,500^\circ\text{K}$  and  $T = 25,000^\circ\text{K}$ , in LTE; photoionization edges are labeled with the quantum number of state from which they arise.  
*Ordinate:* sum of bound-free and free-free opacity in  $\text{cm}^2/\text{atom}$ ;  
*abscissa:*  $1/\lambda$  where  $\lambda$  is in microns.

オパシティは吸収断面積に水素の数密度を掛けて準位で積分すれば出る

例)図4-1

- ぎざぎざしている
  - hottest starでなければ、ほとんどの水素は基底状態( $n=1$ )にある。
  - >吸収は $912\text{\AA}$  が強い
  - $912\text{\AA} < \lambda < 3647\text{\AA}$ では基底状態からの吸収は起こらない(バルマー-continuum, from  $n=2$ )
  - $3647\text{\AA} < \lambda < 8206\text{\AA}$ ではパッシェン continuum (from  $n=3$ )
- A型星やB型星では水素のBound-freeが支配的

# 水素のfree-free吸収断面積



bound-freeの時と同様に虚数の量子数  $ik$  と  $il$  を使う

$$\mathcal{R}k^{-2} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4-115)$$

$$\mathcal{R}k^{-2} + h\nu = \mathcal{R}l^{-2} \quad (4-116)$$

吸収が  $dk$  から  $dl = (dl/d\nu)\Delta\nu$  の幅で起きる時、(4-105)式の  $f_{nk}$  を  $f_{kl}dk$  に、 $\Delta k$  を  $dl$  に置き換えると

$$\alpha(\nu, \nu) = (\pi e^2 / mc) f_{kl} dk (dl/d\nu) \quad (4-117)$$

## 水素のfree-free吸収断面積(続き)

bound-boundでやった(4-78), (4-79)式を一般化して

$$f_{kl} = \frac{64}{3\pi\sqrt{3}} \frac{1}{g_k} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{l^2} \right)^{-3} \frac{g_{\text{III}}(k, l)}{k^3 l^3} \quad (4-118)$$

$g_k$  は自由電子の統計的重みで、量子統計から得られる

$$g_k = (2h^{-3})(4\pi m^3 v^2 dv) = (16\pi \mathcal{R} m^2 v / h^3 k^3) dv \quad (4-119)$$

これを(4-117)式に代入して

$$\alpha(\nu, \nu) = \left( \frac{\pi e^2}{mc} \right) \left( \frac{64}{3\pi\sqrt{3}} \right) \left( \frac{h^3 k^3}{16\pi \mathcal{R} m^2 v} \right) \left( \frac{\mathcal{R}}{h\nu} \right)^3 \frac{g_{\text{III}}(\nu, \nu)}{\nu^3 v} \left( \frac{dl}{d\nu} \right) \quad (4-120)$$

$k$  を固定して(4-116)式を $\nu$ で微分して得られる関係式 $(dl/d\nu) = (hl^3/2\mathcal{R})$

を用いて

$$\alpha(\nu, \nu) = \left( \frac{2\mathcal{R}he^2}{3\pi\sqrt{3}m^3c} \right) \left( \frac{g_{\text{III}}(\nu, \nu)}{\nu^3 v} \right) \quad (4-121)$$

## 水素のfree-free吸収断面積(続き)

(4-121)式をMaxwell分布(4-91)を過程して速度で積分すると

$$\alpha(\nu, T) = \left( \frac{4e^6}{3ch} \right) \left( \frac{2\pi}{3km^3} \right)^{1/2} T^{-1/2} \nu^{-3} \bar{g}_{\text{III}}(\nu, T) \quad (4-122)$$

ここで

$$\bar{g}_{\text{III}}(\nu, T) \equiv \int_0^\infty g_{\text{III}}(\nu, v) e^{-u} du \quad (4-123)$$
$$u \equiv (mv^2/2kT)$$

(4-122)に数値的に得られた値を入れて、電子とイオンの密度を掛けるとオパシティが得られる

$$\kappa_\nu(\text{free} - \text{free}) = 3.69 \times 10^8 \bar{g}_{\text{III}}(\nu, T) \nu^{-3} T^{-1/2} n_e n_p (1 - e^{-h\nu/kT}) \quad (4-124)$$

free-freeは低振動数、高温で重要(O型星など)。



# 水素化物イオン(陰イオン)の吸収断面積

太陽型星や冷たい星において重要。束縛状態のエネルギーは0.754eV

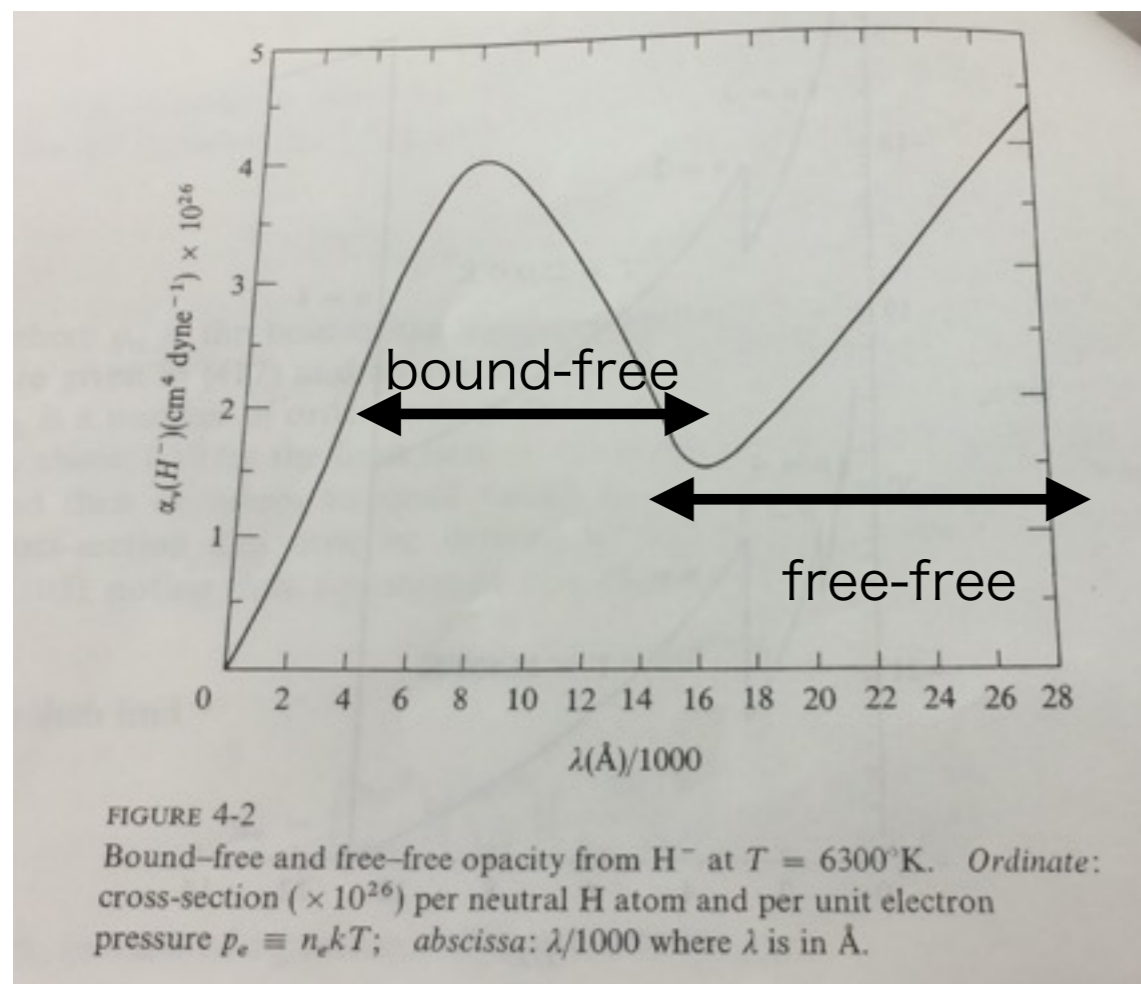
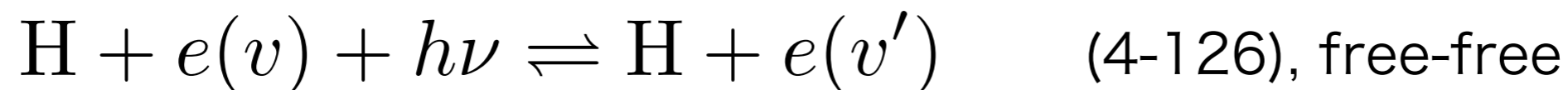


図4-2 水素化合物の吸収断面積

- ・ bound-free : 閾値が16500Åあたりに存在し、8500Åでピークを持つ。
- ・ free-free : 15000Åでbound-freeと同等になり、その後増加する。

**吸収断面積を計算するのは難しい!!**

**<-かなり精密な波動関数が必要**

Chandrasekhar and Breenが計算した

->太陽大気では主要なオパシテイ源

# 水素化物イオン(陰イオン)の吸収断面積(続き)

水素化物イオンの数密度の計算

LTEであればサハの式で計算ができる

$\Phi(T)$  : イオン化平衡の温度依存性

$$n^*(\text{H}^-) = n(\text{H})p_e\Phi(T)$$

よってオパシティは

$$\kappa_\nu^*(\text{H}^-) = \alpha_\nu(\text{H}^-)n(\text{H})p_e\Phi(T)(1 - e^{-h\nu/kT})$$

LTEから離れる場合は  $n(\text{H}^-)$  と誘導放射の補正を行わなければならない。

$\kappa^*(\text{H}^-)$  は  $p_e$  に比例しているので、巨星より矮星において重要(電子の縮退圧?)。

## 他の水素イオン

水素には他にも二つの状態がある。

$\text{H}_2^+$  : 一つの電子を二つの陽子で共有。水素原子が半分だけイオン化しているような環境で見られる (A型星など)。1100Åでピーク。

$\text{H}_2^-$  : M型星といった比較的低温の星で見られ、free-freeは長波長側で支配的。

# ヘリウム

恒星において中性、一階電離両方のスペクトルが観測される。

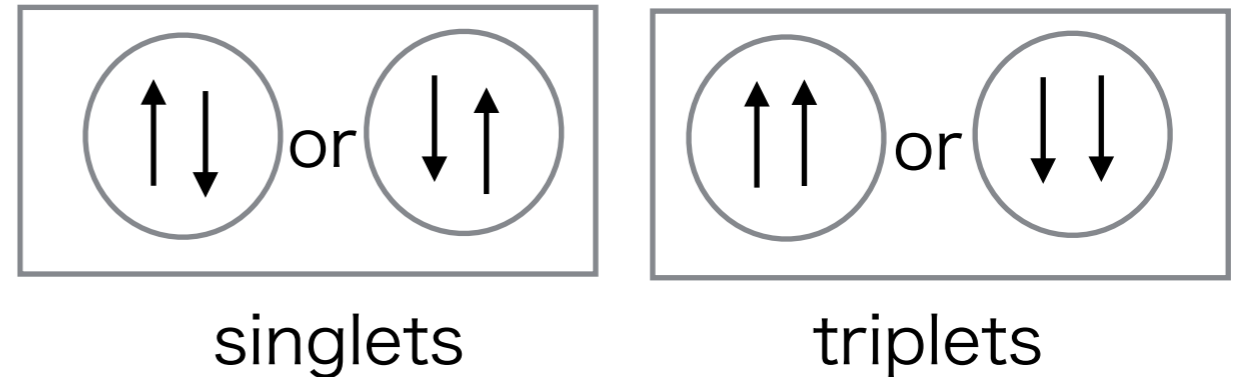
中性ヘリウムの電離ポテンシャルは $24.58\text{eV}$

->B型星まで大丈夫、O型星になると一階電離がメインになる

ヘリウムの励起状態には二種類ある

- singlets: スピン一重項
- triplets: スピン三重項

それぞれで電離エネルギーが異なる



電離エネルギーは同じ主量子数 $n$ で水素とほぼ同じなので、水素と似たような吸収を示す。

ヘリウムは三体問題になるので正確な波動関数は得られない。  
何かしらの近似or量子欠損の手法を使うしかない。

## 4-5 Continuum Scattering Cross-sections

吸収：光子が破壊され、エネルギーはガスに移る。

散乱：光子は破壊されず、角度が変わり、振動数も少し変わる。

この章では二種類の散乱について扱う

- ・トムソン散乱：自由電子-光子の散乱( $\omega \gg \omega_0$ )

O型星のような熱い星で重要

- ・レイリー散乱：原子or分子-光子の散乱( $\omega \ll \omega_0$ )

G型星やK型星といった比較的温度の低い星で重要

# トムソン散乱

光子が自由電子によって散乱される現象

この過程の散乱係数の古典的な表式は(4-32)式から得られる

$$\sigma(\omega) = (8\pi e^4 \omega^4 / 3m^2 c^4) [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]^{-1} \quad (4-32)$$

(4-32)式の共鳴振動数  $\omega_0$  と damping parameter  $\gamma$  を0とする

$$\sigma_e = (8\pi e^4 / 3m^2 c^4) = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (4-127)$$

この散乱係数は振動数に依存しない。この表式は  $h\nu \ll mc^2$  の時正しい。

高エネルギーの光子の場合はKlein-Nishina式を使わなければならない

(散乱断面積は小さくなる)

## 注意点

- ・ (4-32)式を導出する際、角度での平均を行った(角度依存性を無視)  
↳ 恒星大気においては、ほとんどの場合、散乱は等方的と考えられることができる。
- ・ ここでは振動数の変化も無視している(13章で考慮した過程を考える)  
↳ 連続光では無視できる。スペクトル線付近では考慮したほうが良い

# レイリー散乱

原子や分子による散乱であり、典型的な遷移振動数に比べて小さい振動数の光子の散乱  
(散乱体が光の波長よりも小さい場合の散乱)

再び(4-32)式を使う

$$\sigma(\omega) = (8\pi e^4 \omega^4 / 3m^2 c^4) [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]^{-1} \quad (4-32)$$

振動子強度  $f_{ij}$  を用いる。  $\omega \ll \omega_{ij} = \omega_0$  とすると

$$\sigma(\omega) = (8\pi e^4 / 3m^2 c^4) f_{ij} \omega^4 / (\omega_{ij}^2 - \omega^2)^2 = \sigma_e f_{ij} \omega^4 / (\omega_{ij}^2 - \omega^2)^2 \quad (4-128)$$

散乱断面積が  $\omega^4$  に依存→強い振動数依存性。特定の色が強く吸収される。空が青い理由。

連続光の散乱過程では誘導放射のアナロジーはない。