2011年度 金沢大学 集中講義 「宇宙物理概論」 講義ノート JAXA宇宙科学研究所 海老沢 研

February 10, 2012

Contents

1	Intr	oduction	on	5
	1.1	宇宙の	広がり	5
		1.1.1	自然界における最も重要な3つの定数	5
		1.1.2	プランク時間、プランク長、プランク密度	6
		1.1.3	宇宙の年齢と大きさ	6
	1.2	X 線の	吸収	6
		1.2.1	光電吸収の断面積	6
		1.2.2	吸収端のエネルギー	8
	1.3	X 線天	文学の歴史	9
	1.4	X 線観	測装置	10
		1.4.1	X 線光学系	10
		1.4.2	X 線検出装置	10
		1.4.3	エネルギー分解能	13
_	1941			
2	相对	性埋論く	ニフラックホール 	15
	2.1	線形代	数と特殊相対性理論・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	15
		2.1.1	曲がっていない空間 (線形空間) と曲がっている空間	15
	2.2	特殊相	对性埋論	15
		2.2.1	特殊相対性理論が必要になる場合	15
		2.2.2	ローレンツ変換」	16
		2.2.3	固有時間	18
		2.2.4	四元速度	18
		2.2.5	速度の変換則	18
		2.2.6	四元運動量	19
	2.3	一般相	対性理論 ²	20
		2.3.1	局所慣性系	20
		2.3.2	シュワルツシルド時空	21
		2.3.3	シュワルツシルド時空の GPS への応用	23
		2.3.4	ブラックホール	25
		2.3.5	ブラックホールの"密度"	26

¹Jackson, "Classical Electrodynamics"の"第1版"を参考にしています (日本語訳も出ています)。特殊相 対論に関しては、第2版よりも第1版の記述のほうがシンプルでわかりやすいと感じました。 ²この節では、"Exploring Black Holes –Introduction to General Relativity", by Taylor and Wheeler,

²この節では、"Exploring Black Holes –Introduction to General Relativity", by Taylor and Wheeler, Addison Wesley Longman を参考にしています。日本語でも英語でも一般相対性理論の教科書は山のようにあ りますが、僕が見た限り、これが一番直感的でわかりやすい教科書でした (しかし数学的な導出とかは厳密では ありません)。

		2.3.6 観測装置の分解能とブラックホールの直接撮像 26
3	X 線	輻射のメカニズム 29
	3.1	光学的厚み (optical depth) 29
	3.2	輻射輸送 (radiative transfer) 29
	3.3	黒体輻射 (blackbody radiation) 31
		3.3.1 黒体輻射の例
		3.3.2 観測との比較 32
		3.3.3 黒体輻射の特徴
		3.3.4 黒体輻射のエネルギー密度、フラックス 34
		3.3.5 黒体輻射の光子密度 35
4	コン	パクト天体からの X 線放射 37
-	41	重力エネルギーを解放して光っているコンパクト天体の光度 37
	4.2	エディントン限界光度 38
	4.3	中性子星、白色矮星の表面温度
5	降着	円般 41
0	5.1	
	5.2	数学的解としての隆着円盤モデル 42
	5.3	ディスクの厚さ、温度とポテンシャルエネルギーの関係
	5.4	標準降着円盤モデル (standard accretion disk model)
	5.5	回転速度と物が落ちる速度 44
	5.6	X線による標準降着円盤の観測 45
	5.0	降着円盤の最大光度 45
	5.8	標準隆着円盤の温度の半径依存性 47
	5.9	Multicolor disk blackbody $\pm \vec{\tau} \nu$ 48
	5.10	ブラックホールの周りの降着円盤の温度 48
	5.10	

Chapter 1

Introduction

1.1 宇宙の広がり

1.1.1 自然界における最も重要な3つの定数

ニュートン力学では、基礎的な方程式に重力定数Gは入ってきても、光速cは入ってこなかった。これは重力によって生じるモノの速さが光速cに比べてはるかに小さい場合のみを扱ってきたからである。光に近い早さでモノが動く状況を記述するには、特殊相対性理論(特殊相対論)が必要になり、そこには光速cが出てくる。しかし、そこでは重力は扱っていないので、Gは出てこない。重力によって生じるモノの速さが光速cに比べて無視できない場合を扱うのが、一般相対性理論で、その基本方程式には $c \ge G$ の両方が出てくる。一般相対性理論は巨視的な世界を扱う理論なので、そこにはプランク定数hは出てこない。

プランク定数hは、小さなスケールに於ける物理現象を記述する**量子力学**に出てくる。 ただし、シュレディンガー方程式にはhはでてくるが、cもGも出てこない。これは、素粒 子が光速に近い速度で動いていることを考慮せず、また素粒子同士の重力を考慮していない からである。実際には、素粒子は光速に近い速さで運動しているので、シュレディンガー方 程式に特殊相対性理論の効果を考慮したディラック方程式が必要になり、ここには必然的に hとcが出てくる。

その後、素粒子論は発展し、現在では、自然界に存在する四つの力、電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用、重力相互作用のうち、重力相互作用をのぞく三つを統一する可能性がある標準理論(h と c を用いて記述される)が研究されている。そのような理論を検証するには、素粒子をほとんど光速まで加速して衝突させて、とことんばらばらにする必要があり、そのために CERN の Large Hadolon Collider¹のような巨大加速器実験が行われている訳である²。

さらに、素粒子間の重力まで考慮に入れて、4つの相互作用を統一的に説明する理論、 h、c、Gが同時に出てくる理論はあるのだろうか?そのような**量子重力理論**はまだ存在しな い。少なくとも、正しい、と広く受け入れられているものは。また、そのような理論の検証 には、言ってみれば素粒子間に働く重力の測定が必要であり、それは地上ではほぼ不可能で ある。それが実現しているのは、この宇宙ではビッグバンの瞬間にしかないわけで、必然的 に素粒子論の研究は、ビッグバンの起源を探る研究になる³。

いずれにしろ、我々が知っている限り、この宇宙の物理法則は、c,h,Gを用いて記述さ

¹http://lhc.web.cern.ch/lhc/

²素粒子物理学の解説として、おこちゃま向けですが、http://www.kek.jp/kids は良く書かれています。

³東大の数物連携宇宙研究機構 (http://www.ipmu.jp/ja) のテーマですね。

れる。これらの定数から自然に導かれる時間と長さと密度が、物理法則で記述できる最小の 時間(プランク時間)と空間(プランク長)と最大の密度(プランク密度)である。プランク 時間、プランク長が、現在の物理学で考えられる時間と空間の最小単位である。すなわち、 現在知られている物理常数をどう捻っても、これ以上短い時間や空間は作れない。非常に大 雑把に言って、ビッグバンからプランク時間後の宇宙の大きさがプランク長、そのときの宇 宙の密度がプランク密度である。その頃の物理状態を記述するのが量子重力理論である。

1.1.2 プランク時間、プランク長、プランク密度

重力常数、光速、プランク定数の値は以下の通りである。

$$\begin{split} G &= 6.6726 \times 10^{-11} \ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \ (\mathrm{m^3/kg/s^2}) \\ c &= 2.9979 \times 10^8 \ \mathrm{m/s} \\ h &= 6.62607 \times 10^{-34} \ \mathrm{J \cdot s} \quad (\mathrm{kg \cdot m^2/s}) \end{split}$$

ただし、hを2πで割った、ħが良く使われる。

$$\hbar = 1.05457 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})$$

この *G*,*c*,*ħ*の単位(次元)をグッとにらんで、時間、長さ、質量、さらに密度の単位を 作ってみる。これらが、プランク時間、プランク長、プランク質量、プランク密度である。

Planck Time =
$$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.39 \times 10^{-44} \text{ [sec]}$$
 (1.1)

$$Planck \ Length = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.61 \times 10^{-35} \ [m]$$
(1.2)

Planck Mass =
$$\sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.176 \times 10^{-8} \text{ [kg]}$$
 (1.3)

Planck Density =
$$\frac{c^5}{\hbar G^2} = 5.16 \times 10^{93} \text{ [g/cm^3]}$$
 (1.4)

1.1.3 宇宙の年齢と大きさ

宇宙の年齢は約 137 億年と測定されている $(4.3 \times 10^{17}$ 秒)。よって、宇宙の大きさは 137 億 光年と考えられる $(1.3 \times 10^{26} \text{ m})$ 。それぞれ、プランク時間 (1.1)、プランク長 (1.2)と比較 すると、約 61 桁大きい。つまり、我々の物理的考察の対象である宇宙は、約 61 桁にわたっ て時間的、空間的に広がっている。

1.2 X線の吸収

1.2.1 光電吸収の断面積

X線吸収に効くのは、主にC、N、O、Ne、Si、S、FeのK、L、M 殻電子による光電吸収 (photoelectric absorption)である。X線領域ではH、Heの断面積は非常に小さいので、そ の影響はほとんど無視できる。また、ここで示した以外の元素は宇宙には少ないので、それ による吸収も通常は考えなくて良い。図1.1にこれらの元素の光電吸収の断面積を示す。断



Figure 1.1: 主要な元素の光電吸収による吸収断面積。各元素は中性 (電離していない)。NASA/GSFC が提供している heasoft パッケージに含まれている、 \$HEADAS/../ftools/spectral/xspec/manager/mansig.dat から断面積の値を取ってき てプロットした。

面積は各殻に対応する束縛エネルギー (エッジエネルギー) で急に上がり、その高エネルギー 側では E⁻³ に比例して減少していく。

通常 X 線分光観測が可能なのは、 $\sim 0.2 \text{ keV}$ から $\sim 10 \text{ keV}$ のエネルギー範囲で、C-K 吸収端 (エッジ) から Fe-K エッジまでがカバーされる。中性の鉄を例にとると、L_{II} エッジ (0.708 keV) 以下のエネルギーを持つ X 線は M 殻電子によって吸収される。それ以上、K エッジ (7.11 keV) 以下の X 線は L 殻電子によって吸収される。K エッジ以上のエネルギー の X 線は K 殻電子によって吸収される。



Figure 1.2: 電磁波の波長と大気の透過率の関係⁴

1.2.2 吸収端のエネルギー

ボーア半径

単純に電子が陽子の回りで半径 *r_B* の円運動をしていて、角運動量は量子化されていると考える。

$$m_e \frac{v^2}{r_B} = \frac{e^2}{r_B^2}$$
$$m_e v r_B = \hbar$$

これから v を消去して

$$r_B = \frac{\hbar^2}{m_e \, e^2}$$

 $r_B \approx 0.5 \text{\AA}$ と覚えておくと良いが、微細構造定数と $\hbar c$ を覚えておけば、以下のようにしても導ける。

$$\frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx \frac{\hbar c}{m_e c^2} \frac{\hbar c}{e^2} \approx \frac{2000 \text{ eV}\text{\AA}}{511 \text{ keV}} \ 137 \approx 0.5 \text{ Å}.$$

電子を一個だけ残して電離したイオン (hydrogenic-ion) についても、同様の議論ができる。原子番号 Z の時、原子核の正電荷は Ze。一つの e の代わりに Ze としたら良いから、電子の半径はボーア半径の 1/Z となる。(正電荷が強いので、より中心集中する。)

水素のライマンエッジ

水素原子中の電子の結合エネルギー (binding energy) は、

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{r_B} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r_B} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}.$$

電子にこれだけのエネルギーを与えてやれば、陽子から離れられる (無限遠で v > 0)。これ がライマンエッジに対応する。13.6 eV と覚えておくと良いが、以下のように導くこともで きる。

$$\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = \frac{m_e c^2}{2} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 = \frac{511 \text{ keV}}{2} \left(\frac{1}{137}\right)^2 = 13.6 \text{ [eV]}.$$

また、波長にすると、12.4 [keV Å]/13.6 eV = 911 Å も覚えておこう。

Hydrogenic-ion のライマンエッジ

水素原子の結合エネルギーは

$$E = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r_B}$$

であったが、原子番号 Z の原子が電子一つだけを残して電離したとき (hydrogenic-ion) は、 r_B は 1/Z になり (上記参照)、ひとつの e の代わりに Ze とすればよい。よって、Fe 26 の K エッジのエネルギーは、13.6 [eV] × 26 × 26 ≈ 9.2 keV。hydrogenic-ion のときは水素の場 合と同じく単純な議論から、エッジのエネルギーが、

$$E_{edge} = \frac{m_e e^4 Z^2}{2\hbar^2} \tag{1.5}$$

8

となることを導ける。特に X 線天文学で良く観測されるのは、鉄 (Z = 26)の K 吸収端構造。hydrogen-like Fe XXVIのエッジエネルギーは、13.6 eV × $26^2 \approx 9.2$ keV である。

0.3 keV と 10 keV の間に、C から Fe に至るまでの元素の K 吸収端構造および K 殻電子の関与する輝線、吸収線が存在し、これらを X 線で精密に観測することによって、天体の物理状態を知ることができる (X 線天体分光学)。

1.3 X線天文学の歴史

X線は大気によって吸収されるので、宇宙からのX線は大気圏外で観測する必要がある (図 1.2)。これが初めて可能になったのは、1962 年である。

- 1962年、Giacconi らが、ロケットで偶然 Sco X-1 を発見 (全天でもっとも明るい X 線源)。 もともとの狙いは月で反射された太陽 X 線の観測 (1990年になって ROSAT 衛星で検出された)。「X 線天文学」の誕生。これにより、Giacconi は 2002年のノーベ ル物理学賞を受賞
- 1960年代、気球、ロケットによる X 線観測の時代
- 小田稔の「すだれコリメーター (modulation collimator)」により、X線天体の位置が正確に決まり、可視光による同定が可能になった
- •明るい銀河系内 X 線の多くは、ブラックホール または 中性子星
- 1960年代、1970年代のX線天文学は、「実験物理学」
- 1970年、Uhuru 衛星の打ち上げ、本格的な X 線天文学の幕開け
- 1970年代、多くの X 線天文衛星が欧米から打ち上げられた
- 1979 年 「はくちょう」、日本で最初の X 線天文衛星
- 1979 年 Einstein 衛星、最初のイメージング衛星。X 線天文学の成熟
- 1980 年代 EXOSAT、「てんま」、「ぎんが」
- 1980年代後半、アメリカ、ヨーロッパのX線天文学は冬の時代
- 「**ぎんが**」は当時では、2 keV 以降で最高感度。アメリカ、ヨーロッパの X 線天文衛 星が寿命を終えたのち、世界で唯一の X 線衛星として大活躍
- 1990年代 ROSAT, CGRO, ASCA, RXTE, BeppoSAX
- ROSAT は全天サベイを行い、詳細なカタログを作成
- ASCA は、2 keV 以上の硬 X 線で初めてイメージング。初めて X 線 CCD カメラを 搭載、エネルギー分解能にすぐれた観測
- 2000年代 大型 X 線天文衛星の時代。Chandra, XMM-Newton, Suzaku。相補的な性格。どれも世界に観測時間を解放。データアーカイブスを自由に使える。
- Chandra 衛星の位置分解能は ~ 0.5″。究極の位置分解能。これを越える位置分解能 を持った衛星の計画はまだ存在しない。

- 2000 年代 硬 X 線、ガンマ線ミッション、INETGRAL, HETE2, Swift
- 2005年、Suzaku X 線マイクロカロリメーターの失敗。世界最高のエネルギー分解能 を誇るはずだった。
- 日本のASTR0-H (2014年)。X 線マイクロカロリメーターの再挑戦 (世界で初めて)、 ~70 keV までの硬 X 線イメージング
- アメリカ、ヨーロッパの大型 X 線天文衛星将来計画は、まだ認可されていない

1.4 X 線観測装置

天体からやってくる X 線光子ひとつひとつの入射方向、エネルギー、到達時刻をできるだけ正確に測定することが、X 線観測装置の目的である。実際には観測装置の性能限界により、これらの物理量の測定には、位置分解能、エネルギー分解能、時間分解能の不定性が伴う。いずれにしろ、ひとつひとつの光子の物理量を測定できることが、X 線天文学の特徴である⁵。

人工衛星に塔載する X 線観測装置は、X 線を集光したり分散させたりする「X 線光学系」 と、X 線光子を検出する「X 線検出装置」からなる。

1.4.1 X 線光学系

X 線鏡

軌道上天文台としては、1979年の Einstein **衛星**で初めて実現した。同じ焦点を持つ、**放物** 面と**双曲面**を組みあわせた、Wolter Type1 ミラー。

ガラスを研磨したミラー (Chandra) は面精度は良いが、非常に重く、高価で、多層化が 困難。反射面を円錐近似し、アルミ多層膜を重ねたミラー (あすか、すざく) は軽く、有効 面積を稼げるが、位置分解能に劣る。

ミラーの表面をニッケル (Einstein)、金 (あすか、XMM)、イリジウム (Chandra) 等で コーティングする。これらの金属に X 線が非常に 90° に近い入射角 (=小さな仰角 [grazing angle]; ほぼ金属面と平行)で入射したとき、全反射が起きる。**全反射を起こす臨界角 (critical angle) は、3 keV のときに 約**1°。臨界角はエネルギーが高いほど**小さく**なるので、エネ ルギーの高い X 線を反射するには、より**長い**焦点距離が必要になる (??節参照)。

1.4.2 X 線検出装置

X線検出原理(マイクロカロリメーター以外)

エネルギー *E* を持ったひとつの X 線光子が検出器内のガスや半導体中で、Xe や Si 原子の内 殻 (多くの場合 L 殻なので、ここではそれを仮定; binding energy を $-E_L$ とする $(E_L > 0)$) に光電吸収されると、エネルギー $E - E_L$ を持った光電子 (photoelectron) が発生する。L 殻 に穴があいた原子は基底状態よりエネルギーが E_L だけ高く、不安定である。この原子に M 殻から電子が落ちてきて、エネルギー $E_L - E_M$ の励起光 (fluorescent light) か、エネルギー $E_L - 2E_M$ のオージェ電子 (Auger electron) を発生する。前者の場合、M 殻にひとつ穴が

⁵さらに、重要な物理量に偏光がある。天体からの X 線偏光の観測は少数ながら存在し、次世代 X 線偏光計の開発も進められているが、それは X 線天文学の主流とは言い難い。

空いて、原子のエネルギーは基底状態より *E_M* だけ高くなり、後者の場合は、M 殻にふたつ 穴が空いて、原子のエネルギーは基底状態より 2*E_M* だけ高くなる。一部の励起光は検出器 の外に逃げてしまう (escape) が、それ以外は原子に外殻電子により再吸収される。オージェ 電子も原子にエネルギーを与える。基底状態よりエネルギーが高い原子は不安定で、さらに 外殻からの励起光やオージェ電子の放出を繰りかえし、最終的には基底状態に落ちつく。



最終的に、検出器に吸収された入射光子の持っていたエネルギーは (エスケープしてカ ウンターから逃げた分を除くと)、検出器中のたくさんの Xe や Si 原子から電子を剥ぎとる のに使われたことになる。吸収物質の平均電離エネルギーを w、入射 X 線エネルギーを E とすると、一次電子の数 N は、

$$N = E/w \tag{1.6}$$

で与えられる。比例計数管や蛍光比例計数管によく用いられる Xe については w =21.5 eV、 CCD に用いられる Si については w = 3.65 eV である。その一次電子群をなんらかの方法 で増幅して、X 線光子一つに対応する電気パルス信号として検出する。パルス信号の波高 (pulse-height) がX 線エネルギーに対応し、波高のゆらぎ (不定性) がエネルギー分解能を決 める。

比例計数管 (Proportional Counter) X 線天文学の伝統的な検出装置。XeやAr などのガ ス中で吸収された X 線による光電子を高電圧で増幅し、芯線から電気信号として取りだす。 最近では、「ぎんが」塔載 Larege Area Counter(LAC)、RXTE 塔載 Proportional Counter Array (PCA) など。「電子なだれ」を起こすので、それによって生成される電子数 (≈パル スハイト) がまちまちで、エネルギー分解能が悪い (1.4.3 節参照)。

位置検出型比例計数管

Einstein, ROSAT の焦点面検出器。芯線を二次元に張り、X 線の入射位置が測れるようにする。やはりエネルギー分解能が悪いので、Einstein, ROSAT はイメージング性能に優れていたが、精密なエネルギースペクトル観測はできなかった。

蛍光比例計数管 (Gas-Scintillation Proportional Counter; GSPC)

「てんま」、EXOSAT に塔載。X 線の光電吸収によって発生した一次電子を加速し、ガスを 励起させて発生した紫外線を、光電子増倍管などで測定する。「電子なだれ」を起こさない ので、エネルギー分解能が比較的良い。GSPC により 6.4 keV (中性)、6.7 keV (He-like)、 7.0 keV (H-like) の3本の鉄輝線を、はじめて分解することができ、X 線スペクトルの研究 が進んだ。

位置検出型蛍光比例計数管

ASCA の焦点面検出器、GIS (Gas Imaging Sensor) 位置検出型の光電子増倍管を使用し、 撮像と分光が同時にできた。

CCD に比べてエネルギー分解能は劣るが、時間分解能に優れているので、「あすか」では SIS (X線 CCD) では不可能なパルサーの観測などで活躍した。

Microchannel Plate

主に X 線 CCD 出現以前に、高精度の位置検出型検出器として使われた。Einstein, ROSAT, Chandra に塔載。位置検出型比例計数管よりも位置分解能 (従って空間分解能) が良い。パ イルアップの問題がないので、明るいソースの早い時間分解能の観測が可能。エネルギー分 解能はほとんどない。

半導体検出器

Si 等の半導体に X 線が吸収されたときにできる電子・正孔対を利用する。気体検出器に比べ て平均電離エネルギーが小さいので、エネルギー分解能が良い (1.4.3 節)。「すざく」Hard X-ray Detector 塔載の HXD-PIN 等。

$\mathbf{C}\mathbf{C}\mathbf{D}$

X線天文衛星としては「あすか」の SIS (Solid-state Imaging Spectrometer; SIS) が最初。 たくさんの Si 半導体検出器をピクセル化して並べたようなものだと思ってよい。エネルギー 分解能、位置分解能に優れ、2006 年の時点では X線天文学の標準的な検出器。読み出し時 間内に、ひとつのピクセルに二つ以上の X線光子が入ると分別できない (パイルアップ)。読 み出し時間が時間分解能になり、通常は数秒。よって明るい天体のスペクトル観測や、早い 時間分解能を要するタイミング観測には向かない。

マイクロカロリメーター

非常に低温に保った吸収体に X 線光子一つが入ってきたときの微少な温度上昇 (これがエネ ルギーに比例) を測定。Grating よりも格段に効率が良く、CCD に比べエネルギー分解能に 優れている。

X線のエネルギーE、吸収物質の熱容量Cとして、温度上昇

$$\Delta T = E/C \tag{1.7}$$

を測定する。すざく XRS では、 $C \approx 0.18 \text{ pJ/K}$ 。よって、1 keV $\approx 1.6 \times 10^{-16} \text{ J}$ のX 線光 子による温度上昇は、~ 0.9mK。すざく XRS は ~65 mK まで冷却することによって、これ ほど僅かな温度上昇でも測定できた。

一つの X 線光子が入射して吸収体の温度が上昇、元に戻るまでにレスポンス時間 (数ミ リ秒)が生じる。その間に別の X 線光子が入力すると、正確な温度 (エネルギー) が測れな い。よって、明るい天体の観測の際には、フラックスを減少させるためのフィルターを使う。

Astro-E1,「すざく」に塔載した XRS (X-Ray Spectrometer) が最初だった。冷却系 (cryogenics) が技術的に非常に難しい (すざく XRS の失敗も冷却系に起因する)。

ピクセル化が困難。XRS は ~ 30 ピクセル足らずで、精密な画像は取得できなかった。 ピクセル化は次世代のカロリメーターの課題。

吸収体の温度測定の精度が、エネルギー分解能を決める。XRS はサーミスタを使い、温 度変化を抵抗の変化として測定。次世代のマイクロカロリメーターとして、超伝導と常伝導 の境で温度によって急激に抵抗が変ることを利用した Transition Edge Sensor (TES)の開 発が進められている。高ピクセル化した TES マイクロカロリメーターが、現在考えられる 最高の X 線検出装置と言える (X 線の位置とエネルギーを正確に測れる)。

1.4.3 エネルギー分解能

半値幅

X 線検出器に細いラインが入射してきても、それは検出器のエネルギー分解能でなまされて しまい、観測されるラインプロファイルは、ガウシアンで近似される。多くの場合、検出器の エネルギー分解能はラインプロファイルの**半値幅** (Full-Width at Half Maximum; **FWHM**) で表わされる。下図からただちにわかるように、FWHM と標準偏差σの間には、

 $FWHM = 2.355 \times \sigma$

という関係がある。



光電吸収や電子・正孔対を利用した検出器

式 (1.6) で与えられる一次電子群をなんらかの方法で増幅、パルス信号として検出し、その 波高 (pulse-height) *P* が X 線エネルギーに対応し、波高のゆらぎ (不定性)σ_P がエネルギー 分解能に対応している。

FWHM で表わしたエネルギー分解能は以下のように書ける。

$$\Delta E/E = 2.355 \times \sigma_P/P = 2.355 \times \sqrt{(\sigma_N/N)^2 + (\sigma_S/P)^2}$$
(1.8)

ここで、 σ_N^2 は一次電子数 N の統計ゆらぎで決まり、 σ_S^2 はそれ以外のシステマティックな原因によるパルス波高の不定性でよる。たとえば比例計数管の場合は電子なだれによる増幅過程、CCD の場合は信号読み出しノイズが σ_S^2 に寄与し、エネルギー分解能を悪化させる。

一次電子の数がポアソン分布に従うならば、 $\sigma_N^2 = N$ である。しかし、実際には、1.4.2 節で述べたように、一次電子の生成過程は互いに独立ではないので、一次電子数のゆらぎは ポアソン分布の場合よりも小さくなり、平均電離エネルギー wを使って、

$$\sigma_N^2 = NF = \frac{E F}{w} \tag{1.9}$$

と書ける。F はファノファクターと呼ばれ、Xe 等を使った比例計数管の場合は ~0.17、Si を使った CCD の場合は ~0.1 である。

エネルギー分解能が一次電子数の統計的ゆらぎだけで決まる、理想的な場合を考えよう。 式 (1.8) と (1.9) から、

$$\Delta E/E = 2.355 \times \sigma_P/P = 2.355 \sqrt{\frac{Fw}{E}}.$$
(1.10)

光電吸収を利用した検出器の場合、種類によらずエネルギーが高いほどエネルギー分解能が良くなる ($\Delta E/E \propto E^{-1/2}$) ことを覚えておこう。

Xe (w = 21.5 eV; F = 0.17) と Si (w = 3.65 eV; F = 0.1) について具体的な値を求めると、

$$\Delta E/E = 14 \% \sqrt{\frac{1}{E[\text{keV}]}} \text{ for Xe}$$
$$\Delta E/E = 4.5 \% \sqrt{\frac{1}{E[\text{keV}]}} \text{ for Si.}$$

上記の理想値を実際の検出装置のエネルギー分解能と比較しよう。「あすか」衛星塔載のGIS、 SIS は、それぞれ Xe を使った蛍光比例計数管、Si を使った CCD である。GIS の実際のエネ ルギー分解能は ~14 % @ 1.5 keV (理想値は 11 %; 以下同様)、~7.7 % @ 6 keV (5.7 %)、 SIS については ~5 % @ 1.5 keV (3.7 %), ~2 % @ 6 keV (1.8 %) であり⁶、数々のノイズ削 減機構が効果的に働いているお陰で、理想値に近いエネルギー分解能を実現していることが わかる。

マイクロカロリメーター

気体検出器や半導体検出器と同様、マイクロカロリメーターのエネルギー分解能は統計的ゆ らぎ (カロリメーターの場合は電子でなくフォノン) とシステマティックエラーからなる。式 (Eres) と同様に、フォノン数 N のゆらぎだけで決まる原理的なエネルギー分解能を見積っ てみる。吸収体の動作温度を T とすると、式 (1.7) に出てきた比熱 C を使って、内部エネル ギーは ~ CT と見積もられる。一方、フォノン一個あたりのエネルギーは、~ kT なので、 フォノンの数は、N ~ CT/kT = C/k である。よって、フォノン数のゆらぎによるエネル ギーのゆらぎ (FWHM) は、

$$\Delta E \sim 2.355 \sqrt{N} kT \sim 2.355 \sqrt{kT^2C}.$$

カロリメーターの ΔE (検出器の分解能による幅) は入射エネルギーによらないことに注意。 XRS の値、T ~ 65 mK、C~ 0.18 pJ/K を用いると、この値は ~ 1.5 eV になる。実際に は、すざく XRS のエネルギー分解能は 6 ~ 7 eV。

⁶Tanaka, Inoue and Holt 1994, PASJ, 46, L37

Chapter 2

相対性理論とブラックホール

2.1 線形代数と特殊相対性理論

2.1.1 曲がっていない空間 (線形空間)と曲がっている空間

仮に重力が存在しない時間と空間 (**四次元時空**) を考えよう。そのような時空は曲がってい ない (線形空間)。そのような時空に四本の直交する座標軸を立てたとしよう。もう一つ、別 の座標軸を考える。どちらの座標系で測っても、四次元時空中の距離は同じであり、二つの 座標系のあいだの変換は回転で表される (**ローレンツ変換**)。変換を記述する回転行列は、場 所によらずに同じである。そのような、重力が存在せず、曲がっていない時空を記述するの が特殊相対性理論である。

重力が存在する時空は曲がっている。座標系によって四次元時空間の距離は違い、二つ の座標系のあいだの変換は回転で表せない。変換を記述する行列は場所に依存する。そのよ うな、重力が存在し、曲がっている時空を記述するのが**一般相対性理論**である。

2.2 特殊相対性理論

2.2.1 特殊相対性理論が必要になる場合

ここでは直交変換の応用として、特殊相対性理論について学んでみよう。等速運動する二つ の座標系 (慣性系¹) のどちらでも物理法則が全く同じように記述できる、というのが特殊相 対性原理である (この宇宙に特別な慣性系は存在しない)。光速はどちらの座標系でも同じ値 を取るし、どちらの系からも相手の系が同じように見える。その間の座標変換は**ローレンツ** 変換で与えられ、以下に示すように、それは四次元時空における直交変換と考えても良い。 しかし、ほとんどの場合、力学の問題を解くときに、私たちはローレンツ変換や相対論的力 学を知らなくても良い。それは何故だろうか?その答えは簡単で、多くの場合扱っている速 度が光速 $c(2.997925 \times 10^8 \text{ m/s})$ に比べてはるかに小さいからである²。

自然現象を記述する際に、どうしても特殊相対論が必要になってくる場合が二つある。 一つは光速に近い運動が巨視的に起こりうる宇宙現象を扱う場合で、もう一つはミクロの世 界でほぼ光速で運動している素粒子を扱う素粒子物理学の世界である。たとえば、CERNの LHC (Large Hadron Collider)において、陽子は光速の0.999999991倍の速度まで加速され

¹重力の影響は無視できるということ。

²高校の物理や大学一年レベルの力学で扱う式に*c*はでてこなかったはず。それらの式は、以下に出てくる相対論的な式において光速を無限大としたときの近似になっている。

るそうだ。以下で示すように速度 v で運動している物体のエネルギーは $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ 倍になるから、LHC の場合、これは約 7400 倍である。陽子の静止エネルギーは 0.938 GeV なので、LHC で加速された陽子(と反陽子) は約 7 TeV のエネルギーを持つことになる。LHC では陽子と反陽子を合わせて 14 TeV のエネルギーで正面衝突させてそれらを破壊し、陽子、反陽子が宇宙に誕生する以前、ビッグバン直後の状態を再現することによって、素粒子の起源、宇宙の起源に迫る。

2.2.2 ローレンツ変換³

これまでに、3次元の直交変換が、天球座標の間の変換や人工衛星の姿勢に応用されること を学んだ。さらに1次元を加えて4次元時空を考えると、同様の直交変換が、特殊相対性理 論にも使えることを見てみよう。

4次元空間における直交変換を考える。あるベクトルを元の基底で表したときの成分が (x_1, x_2, x_3, x_4) 、新しい基底ベクトルで表わしたときの成分を (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) とする。ベクトルの長さは不変なので、

$$s^{2} \equiv x_{1}^{2} + x_{2}^{2} + x_{3}^{2} + x_{4}^{2} = x_{1}^{\prime 2} + x_{2}^{\prime 2} + x_{3}^{\prime 2} + x_{4}^{\prime 2}$$
(2.1)

である。変換行列を a_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4) と書くと、3 次元のとき (??, ??) と全く同じように、

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \ a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \tag{2.2}$$

$$x'_{i} = a_{ij} x_{j}, \quad x_{i} = a_{ji} x'_{j}$$
 (2.3)

が成立する。ここで、??節で述べたように、同じ添字については1から4までの和を取る。 (x,y,z)を空間座標成分、tを時間とする。ある事象をある座標系Kで表わした「世界点」

の座標を (x, y, z, t) する。下図のように、時刻 t = t' = 0 で原点が K と一致し、K と相対 的に速度 v で移動している座標系 K'を考え、その事象を K' で表わした座標を (x', y', z', t') とする。



cを光速として、 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$ としよう (x_4 が形式的に「虚時間」に 対応していることに注意)。

³Jackson, "Classical Electrodynamics"の"第1版"を参考にしています (日本語訳も出ています)。特殊相 対論に関しては、第2版よりも第1版の記述のほうがシンプルでわかりやすいと感じました。

このとき、式 (2.1) は、

$$s^{2} \equiv x^{2} + y^{2} + z^{2} - (ct)^{2} = x'^{2} + y'^{2} + z'^{2} - (ct')^{2}$$

$$(2.4)$$

となり、これは相対的に等速運動をしている二つの座標系において、 s^2 で定義される「世界間隔」が不変量であることを示している。式 (2.3) で表わされる (x, y, z, t) と (x', y', z', t') の間の変換がローレンツ変換で、式 (2.1) で表わされるのがローレンツ不変量である。一般 に、式 (2.1) で示されるように「長さ」が不変で、式 (2.3) のローレンツ変換に従うベクト ルを四元ベクトルと呼ぶ。

特に、時刻 t = t' = 0 で両系の原点を出発した光を考える。光の波面は球面上に拡がっていくわけだが、時刻 t,t' における波面上の座標はそれぞれの系で、(x,y,z), (x',y',z') で、式 (2.4) は、

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, (2.5)$$

$$x'^{2} + y'^{2} + z'^{2} = (ct')^{2}$$
(2.6)

を意味している。つまり、 *K* 系と *K*′ 系がどのような相対速度で動いていようとも、どちらの系から見ても、光速は *c* である、という**光速度一定の原理**が得られた。

具体的な例を見てみよう。下図のように、 $K 系 o z = (x_3 = w) o \gamma = 0$ 、 速度 $v \sim w$ で動いている場合を考える。

この場合のローレンツ変換は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$
(2.7)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\gamma\beta \\ 0 & 0 & i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}.$$
 (2.8)

ここで、

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},\tag{2.9}$$

cは光速である。この変換行列が、直交条件、(2.2)を満たしていること、転置行列が逆行列になっていること $(a_{ij}^{-1}=a_{ji})$ を確認しておこう。

式 (2.7),(2.8) より、

$$x_3' = \gamma(x_3 + i\beta x_4), \tag{2.10}$$

$$x_3 = \gamma (x'_3 - i\beta x'_4) \tag{2.11}$$

である。K'系の原点は $x'_3 = 0$ 、K系の原点は $x_3 = 0$ であるが、これらを代入すると、

$$x_3 = v t,$$
 (2.12)

$$x'_{3} = -v t' \tag{2.13}$$

が得られる。(2.12)は、K'系の原点をK系で表わしたときの関係式、(2.13)は、K系の原 点をK'系で表わしたときの関係式で、どちらも自明である。

2.2.3 固有時間

式 (2.4) で示されるように、(x, y, z, ict)の長さはローレンツ不変量であるから、微少なベクトル (dx, dy, dz, ic dt)の長さもローレンツ不変である。すなわち、

$$-c^2 d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \qquad (2.14)$$

$$-c^{2}d\tau'^{2} = dx'^{2} + dy'^{2} + dz'^{2} - c^{2}dt'^{2}$$
(2.15)

と書いたとき、 $d\tau = d\tau'$ である⁴。 $d\tau$ は、K系の時計でdtの間に (dx, dy, dz)移動する物体とともに動く (dx = dy = dz = 0)観測者の測る時間、 $d\tau'$ は、K'系の時計で、dt'の間に (dx', dy', dz')移動する物体とともに動く (dx' = dy' = dz' = 0)観測者の測る時間である。 つまり、物体とともに動く時計で測った時間は不変量であり⁵、この τ を**固有時間**と呼ぶ。 式 (2.14) を、

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$
(2.16)

と書くと、これは動いている時計はゆっくり進んでいるように見えることを示している。

2.2.4 四元速度

すでに見たように、時空点の座標 (x, y, z, ict) やその微少変化量 (dx, dy, dz, ic dt) は四元ベクトルの一つである。これを不変量 $d\tau$ で割った

$$\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, ic\frac{dt}{d\tau}\right)$$
(2.17)

も四元ベクトルであり、これを四元速度と呼ぶ。これを式(2.16)を使って、

$$\gamma(v_x, v_y, v_z, ic) \tag{2.18}$$

と書ける。

四元速度の長さがローレンツ不変量であることを確認しておこう。

$$\gamma^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - c^2) = \frac{v^2 - c^2}{1 - (v/c)^2} = -c^2.$$
(2.19)

2.2.5 速度の変換則

先に考えた *K* 系で運動する物体を *K*′ 系で見たときの速度を考えよう。*K* 系における物体の速度、*K*′ 系における物体の速度、*K* 系と *K*′ 系の相対速度を区別する必要があることに 注意。

先と同じく、K'系はK系の+z軸方向に、Kに対して速度vで動いているとする $\left(\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}\right)$ 。物体の運動も、K系から見て+z軸方向とし、その速度をuとする $(u_x = u_y = 0, u_z = u)$ 。 K'系から見た物体の速度をu'とする。また、 $1/\sqrt{1 - (u/c)^2} = \gamma_u, 1/\sqrt{1 - (u'/c)^2} = \gamma_{u'}$ とする。

⁴自明ではあるが、式 (2.7) について、これが成立することを確認しておこう。

⁵だから、例えば1秒の絶対的な長さというものを定義することができる。



ローレンツ変換の式 (2.7) と、四元速度の定義 (2.18) から、

$$\begin{pmatrix} \gamma_{u'}u'_{x} \\ \gamma_{u'}u'_{y} \\ \gamma_{u'}u'_{z} \\ \gamma_{u'}ic \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_{u}u \\ \gamma_{u}ic \end{pmatrix}.$$
 (2.20)

これから、

$$u'_x = u'_y = 0 (2.21)$$

$$\gamma_{u'} u'_z = \gamma \gamma_u (u - v) \tag{2.22}$$

$$\gamma_{u'} = \gamma \gamma_u \left(1 - \frac{v}{c^2} u \right). \tag{2.23}$$

(2.22) と (2.23) から、

$$u'_{z} = \frac{u - v}{1 - v \, u/c^{2}}.\tag{2.24}$$

x', y'方向の速度成分がないことがわかったので、単純に、 $u'_z = u'$ と書くことにする。上式 を解釈してみよう。まず、u = 0のとき、u' = -vであるが、K系に静止しているものをK'系から見たら、-z'方向に速さvで遠ざかることは自明である。

日常生活においては、物体の移動速度は光速に比べてはるかに小さいので、 $vu/c^2 = 0$ と近似してよい。すると上式はu' = u - vと言う、見慣れた式になる⁶。

u = cのときには、vの値には関わらず、u' = cになる。これは光速度不変の原理に他ならない。u = -0.9c, v = 0.9cとしてみよう。非相対論的に考えると、K'系から見て、物体はu - v = -1.8cで遠ざかっていくことになるが、そんなことは実際にはありえない。式(2.24 は、-0.9945cを与える。物体の運動の速度が光速を越えることはありえないのだ。

2.2.6 四元運動量

四元速度に質量*m*を書けたものを四元運動量と呼ぶ。すなわち、

$$m\gamma(v_x, v_y, v_z, ic) \tag{2.25}$$

$$\equiv (p_x, p_y, p_z, iE/c). \tag{2.26}$$

ここで、相対論的には運動量は

$$p = m\gamma v \tag{2.27}$$

で、エネルギーは、

$$E = m\gamma c^2 \tag{2.28}$$

で表されることを用いた。 $v/c \ll 1$ のとき、 $\gamma \approx 1 - \frac{1}{2}(v/c)^2$ を用いて、(2.28)は、

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.29}$$

と近似できる。最初の項が静止エネルギー、二番目の項が、ニュートン力学における通常の 運動エネルギーである。

(2.19)より、四元運動量の長さの二乗は $-m^2c^2$ だから、良く知られたエネルギーと運動量の間の関係式、

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \tag{2.30}$$

が得られる。

特に、光子など質量がゼロである素粒子の場合は、

$$E = p c. (2.31)$$

光の波長を λ , 振動数を ν とするとき、h をプランク定数として、光子のエネルギーは $E = h\nu$, 運動量は $p = h/\lambda = h\nu/c$ で表わされることを思いだそう。あたりまえだが、光子について、 (2.30) が成立している。

2.3 一般相対性理論⁷

ローレンツ変換は四次元時空における回転として、表現される事を見てきた。この変換は、 空間が歪んでいないので (=線形空間)、ベクトルの長さは保存され、回転行列は場所にはよ らなかった (=変換行列に、x,y,z,ctが含まれていない)。ここまでは歪んでいない世界を扱っ ていたので、このように簡単な数学で物事が済んだ訳だが、現実の世界では、重力の影響で 空間が歪んでくるので (=非線形空間)、変換行列が場所に依存し (=変換行列に、x,y,z,ct が含まれている)、数学的に複雑になってくる。物理的には、これは、重力が存在する場合 を扱うには、特殊相対性理論ではなくて**一般相対性理論**が必要、ということに他ならない。

2.3.1 局所慣性系

互いに等速運動している座標系の間では、式 (2.4) で与えられる四次元時空中の二点間の「世 界間隔」は不変量であった。二つの系の間の座標変換 (ローレンツ変換) は、ベクトルの長さ を変えない、四次元時空における回転を表す「直交変換」と考えても良いことを見てきた。 実は、これは重力を及ぼすモノが存在せず、系が加速度運動をしていない場合にのみ成立す る。この条件が成立している座標系を**慣性系**と呼ぶ。慣性系では「時空が平坦」なので、世

20

⁷この節では、"Exploring Black Holes –Introduction to General Relativity", by Taylor and Wheeler, Addison Wesley Longman を参考にしています。日本語でも英語でも一般相対性理論の教科書は山のようにあ りますが、僕が見た限り、これが一番直感的でわかりやすい教科書でした (しかし数学的な導出とかは厳密では ありません)。

界間隔は不変である。慣性系においては、ニュートンの第一法則が成立し、「静止している モノは静止しつづけ、等速運動しているモノは等速運動しつづける」。例えば、慣性系で両 手にボールを持って、そっとそれを離してみよう。二つのボールの距離は不変で、それは静 止しつづける。

いったいそんな系は現実に存在するのだろうか?現実の世界には完全な慣性系は存在し ないが、加速度運動による慣性力と重力は区別できないという等価原理によって、重力と 慣性力を打ち消しあった、局所慣性系を定義することができる。局所慣性系を作るもっとも 手っ取り早い方法は、重力に身を任せてしまうことである。たとえば、宇宙空間に浮かん で、加速、減速はせず、いろいろな天体からの重力に身を任せている宇宙船の中や、綱の切 れたエレベーターの中は局所慣性系である(いわゆる「無重力状態」)。宇宙に行くと重力が なくなる、と言うことはないことに注意。重力は宇宙のどこにでも存在する(万有引力の法 則!)。重力に身を任せて自由落下することにより、重力の効果を打ち消すことはできる、と

たとえば、宇宙空間に漂っている (=加速も減速もしていない) 巨大な宇宙船を考えて、 その中に互いに等速運動している局所慣性系を考えると、そのあいだの座標変換はローレ ンツ変換で与えられる。慣性系は局所的にしか存在できないことは、以下の思考実験でわ かる。遠方から地球に向かって自由落下する宇宙船を考えよう。あるいは、綱の切れたエレ ベーターの中でも良い。ボールを4つ等間隔に配置する。もしこれが完全な慣性系で空間が 歪んでいないならば、ボールの間隔は変化しないはずだが、それぞれのボールは地球の中心 に向かって落ちていき、地球の中心に近いほうが重力加速度は大きいので、やがてボール間 の横方向の間隔は縮み、縦方向の間隔は伸びる。

このように、一つの系の中で場所によって重力が異なることによって見かけ上生じる力 を**潮汐力**と言う。潮汐力によって4つのボールの配置が変化した、と考えても良いし、重力 の影響で、時空が平坦でなくなったと考えても、全く同じ事である(等価原理により、両者 は区別できない)。潮汐力の影響が無視できるほど小さな領域で局所慣性系 K を定義するこ とができ、それに相対運動する局所慣性系 K' との間の座標変換はローレンツ変換で与えら れる。一方、潮汐力の影響が無視できないほど大きな空間を含んだ系 L を定義すると、そ こではニュートンの第一法則がなりたっていないので、これは慣性系ではない。

一般に、グローバルな慣性系は定義できない (時空は一様でない) ので、(2.4) は成立せず、代わりに、二つの局所慣性系座標の間に、

$$ds^{2} \equiv dx^{2} + dy^{2} + dz^{2} - (c \, dt)^{2} = dx'^{2} + dy'^{2} + dz'^{2} - (c \, dt')^{2}$$
(2.32)

が成立する。*ds*² をメトリック (計量) と呼ぶ。一般相対性理論によれば、任意の座標変換に 対して、局所的な世界間隔は不変である。

2.3.2 シュワルツシルド時空

質量 M を持ち、回転していない球対称な天体を考えよう。重力の影響により、その周りの 時空は平坦ではない。それを、シュワルツシルド時空と呼ぶ⁹。その名前は、そのような状

⁸地上で「無(微小)重力実験」を行っている研究者は、実験カプセルを自由落下させる際に無重力を実現す る「微小重力実験塔」や、飛行機のエンジンを切って放物線飛行(パラボリックフライト)する際に実現する微 小重力状態を使っています。日本無重量総合研究所のウェブサイト(http://www.mglab.co.jp)には、無重力 実験の動画がいろいろあって面白いです。また、「無重力の町」北海道上砂川町には、世界で最大規模の無重力 実験施設があったのですが、2003年に惜しまれながら閉鎖されたそうです(http://www.noobowsystems.com/ scenes/0108-zerogravity/zerogravity.html)。

⁹回転している天体の周りの時空がカー時空である。



Figure 2.1: ある系において、左側のようにボールが配置されていたのが、しばらく時間が たつと、右側のようになった。これは、地球の中心に向かって落下していくエレベーターの 中を模式的に示したもの。

況を一般相対論で記述する**アインシュタイン方程式**の解を、シュワルツシルドが発見した事 による。

球対称だから、世界間隔を表わすのに、極座標を用いると便利である。天体の近く、動 径座標 r の球殻上の観測者が計る時間を dt_{shell}、r に沿って直接測る距離を dr_{shell} とすると、

$$ds^{2} = dr_{shell}^{2} + r^{2} d\phi^{2} - c^{2} dt_{shell}^{2}$$
(2.33)

である。ここで、動径座標rは円周を 2π で割った量として定義される¹¹。 十分遠方の観測者が乗っている座標を $r.\phi.t$ とすると、メトリックは

$$ds^{2} = \frac{dr^{2}}{1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}} + r^{2} d\phi^{2} - c^{2} \left(1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}\right) dt^{2}$$
(2.34)

と書けることがわかっている。これをシュワルツシルドメトリックと呼ぶ。cは光速、Gは 万有引力定数である。 $2GM/c^2$ が、質量 Mの天体の**シュワルツシルド半径**である。

太陽と地球のシュワルツシルド半径は覚えておこう。 $G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg/s}^2$ 、 $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、太陽質量= $1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、地球質量 = $5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}$ だから、 太陽のシュワルツシルド半径は、2.95 km、地球のシュワルツシルド半径は 8.87 mm¹²。 (2.33) と (2.34) を比較して、

$$dr_{shell} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}} \ge dr$$
(2.35)

(2.35) は、直接測った動径方向の長さは、円周を 2π で割った長さよりも長いことを示している。具体的な例を考えてみよう。仮に太陽質量のブラックホールがあり (シュワルツシルド半径は 2.95 km)、r = 4 km から r = 5 km までの距離を直接、巻き尺を使って計ってみよう。その長さは、

$$\Delta r_{shell} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{r} \, dr}{\sqrt{r - 2GM/c^2}}.$$
(2.36)

¹¹たとえばブラックホールの場合は、シュワルツシルド半径より内側が見えないので、半径を直接測れない。 ¹²3 km, 9mm と覚えておけば大体事足りる。

ここで、 $r = z^2$ とすると、ちょっと面倒だが積分は計算できて、

$$\Delta r_{shell} = \left| z \sqrt{z^2 - 2GM/c^2} + 2GM/c^2 \ln \left[z + \sqrt{z^2 - 2GM/c^2} \right] \right|_{z_1}^{z_2}.$$
 (2.37)

 $z_1 = 2, \ z_2 = \sqrt{5}, \ 2GM/c^2 = 2.954$ を代入すると、

$$\Delta r_{shell} = 7.036 - 5.313 = 1.723 \text{ km} \tag{2.38}$$

が得られる。歪んでいない (=重力が存在していない) 空間では、当然、この距離は 1 km になるはずだが。

また、(2.33) と (2.34) から

$$dt_{shell} = \sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} dt \le dt \tag{2.39}$$

である。(2.39) は、重力が強いところでは、時間の進み方が遅いことを示している。特にシュ ワルツシルド半径、 $r \approx 2GM/c^2$ においては、 dt_{shell} に対しても dt は無限大になる。よっ て、たとえばブラックホールに一定間隔で光を出しながらモノが落ちていくようすを無限遠 方から眺めると、シュワルツシルド半径に近づくにつれてその間隔は伸びていき、やがて無 限になる (モノがブラックホールに落ちるところは決して観測できない!)。

また、天体の近く r で時間間隔 dt_{shell} の間に N 個の光波が発射されたとき、その場所に おける光の振動数は $\nu_{shell} = N/dt_{shell}$ 、無限遠方で観測した同じ光の振動数は $\nu = N/dt$ で あるが、(2.39) より、

$$\nu = \sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}\nu_{shell} \le \nu_{shell} \tag{2.40}$$

である。これは、強い重力場中から放出された光が、無限遠方で観測すると振動数が小さいほうにずれる (光の波長が長いほうにずれる) ことを示している。これが重力赤方偏移である。

2.3.3 シュワルツシルド時空の GPS への応用

地球の半径はそのシュワルツシルド半径に比べてはるかに大きいから、一般相対性理論の効 果は、日常生活では、ほとんど効いてこない。しかし、非常に精密な測定によって、一般相 対性理論の効果が観測されることがある。その例が GPS (Global Positioning System) であ る。GPS は、地球の周りをそれぞれ 12 時間で周回する 24 個の衛星を用いている。3 個の衛 星からの正確な距離がわかれば、地球上あらゆる場所の位置が正確にわかる。衛星からの距 離は、光の発射時刻と受信時刻の差に光速を掛けて求める。時刻の補正には 4 つめの衛星を 使う。地球上のどこからでも、(視界が開けていれば) 常に 4 つの衛星が受信できるように、 衛星軌道が配置されている。

地球表面で自転運動している観測者とGPS衛星上で公転運動している観測者を考える¹³。 式 (2.14) と同様に一般相対論でも固有時を考えることができる。式 (2.33) から、天体から 動径座標一定 ($dr_{shell} = 0$)の距離で公転運動している座標系に乗った人 ($d\phi = 0$)の計る固 有時間を $d\tau$ とすると、

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 \tag{2.41}$$

¹³地球は回転しているので、厳密にはシュワルツシルドメトリックではなくカーメトリックを使う必要があるが、地球の回転速度は光速に比べて十分小さいので、シュワルツシルドメトリックで十分良い近似になっている。

だから、(2.34)と合わせて、

$$c^{2}d\tau^{2} = c^{2}\left(1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}\right)dt^{2} - \frac{dr^{2}}{1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}} - r^{2}d\phi^{2}$$
(2.42)

となる。十分遠方の観測者がこの運動を見ているとき dr = 0 だから、

$$c^{2}d\tau = c^{2}\left(1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}\right)dt^{2} - r^{2}d\phi^{2}$$
(2.43)

である。よって、

$$c^{2} \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{2} = c^{2} \left(1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}\right) - r^{2} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^{2}$$
$$= c^{2} \left(1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}\right) - v^{2}.$$
(2.44)

ここで、vは、地表の自転速度、または GPS 衛星の速度である。地球表面の観測者の固有時間を dt_{earth} 、人工衛星上の観測者の固有時間を $dt_{satellte}$ とすると、(2.44) を、地表と GPS 衛星について比を取って、

$$\left(\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{satellite}}\right) - (v_{satellite}/c)^2}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{earth}}\right) - (v_{earth}/c)^2}.$$
(2.45)

この式が、地表における時間と、GPS衛星における時間の進み方のずれを表す。*r_{satellite}, r_{earth}*は地球のシュワルツシルド半径に比べてはるかに大きいから、いくつかの近似が可能である。

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx \frac{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{satellite}} - (v_{satellite}/c)^2\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{earth}} - (v_{earth}/c)^2\right)^{1/2}}$$
(2.46)
$$\approx \left(1 - \frac{GM/c^2}{r_{satellite}} - (v_{satellite}/c)^2/2\right) \left(1 + \frac{GM/c^2}{r_{earth}} + (v_{earth}/c)^2/2\right)$$
$$\approx 1 - \frac{GM/c^2}{r_{satellite}} - (v_{satellite}/c)^2/2 + \frac{GM/c^2}{r_{earth}} + (v_{earth}/c)^2/2.$$
(2.47)

ここで、 $v_{satellite}^2$, v_{earth}^2 の項は、特殊相対論だけからも出てくる事に注意しよう。Gが入っている項が、一般相対論の効果、重力による時間の進み方の違いを表す。この式からただちにわかるように、 $(GM/c^2)/r_{earth} \ge (GM/c^2)/r_{satellite}$ はどちらも非常に小さな数であるが、その違いが無視できない、ということが本質的である。

GPS 衛星の周期が 12 時間ということから、*r_{satellite}* と *v_{satellite}* を求めよう。円運動の公 式から¹⁵、

$$\frac{v_{satellite}^2}{r_{sattellite}} = \frac{GM}{r_{satellite}^2},\tag{2.48}$$

$$P_{satellite} = \frac{2 \pi r_{satellite}}{v_{satellite}}.$$
(2.49)

¹⁵この計算には一般相対論を使っていないが、それで精度は十分である。

これを変形して、

$$r_{satellite} = \left(\frac{GMP_{satellite}^2}{4\pi^2 c^2}\right)^{1/3} c^{2/3},$$
 (2.50)

$$v_{satellite} = \left(\frac{2\pi GM}{P_{satellite} c^2}\right)^{1/3} c^{2/3}.$$
 (2.51)

 $GM/c^2 = 4.4 \times 10^{-3}$ m、P=12時間=43200 sec を代入して、 $r_{satellite} = 2.66 \times 10^7$ m (2万 6600km)、 $v_{satellite} = 3.87 \times 10^3$ m/s となる。

 $r_{earth} = 6.37 \times 10^6$ m だから、(2.47) に代入して、運動による $v_{satellite}^2$ 、 v_{earth}^2 の項を無視すると、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx 1 - 1.65 \times 10^{-10} + 6.91 \times 10^{-10} \approx 1 + 5.26 \times 10^{-10}.$$
 (2.52)

重力の効果だけを考慮した場合、この割合で、地表の時間よりも人工衛星上の時間のほう が、速く進むことになる。ただし、すでに特殊相対論で学んだように、「速く進む時計の時 間はゆっくり進む」。よって、さらに人工衛星の速さと地表の速さの違いを考慮すると、こ のずれは小さくなるはずである。

 v_{earth} として赤道上の値を使うと、 $v_{earth} = 4 \times 10^7 \text{ m}/86400 = 463 \text{ m/s}_{\circ} (2.47)$ に $v_{satellite}$ 、 v_{earth} の項も入れて、

 $\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx 1 + 5.26 \times 10^{-10} - 8.32 \times 10^{-11} + 0.12 \times 10^{-11} \approx 1 + 4.44 \times 10^{-10}.$ (2.53)

一日 (86400 秒) で、このずれは、38 マイクロ秒になる。その間に、光は 11km も進む! これを補正しないと、GPS は全く使いものにならないだろう。

2.3.4 ブラックホール

ニュートン力学で考えると、質量 M、半径 rの天体の 脱出速度 v_{escape} は以下の式から決まる。

$$\frac{1}{2}v_{escape}^2 = \frac{GM}{r} \tag{2.54}$$

脱出速度は、星の質量が大きいほど、半径が小さいほど大きくなる。上式より、r が無限に 小さくなると vescape は無限に大きくなるが、それが光速を超える事はあり得ない。だから、 ブラックホールは、その脱出速度が光速であるほど重くて小さい天体、あるいは、同じ事で あるが、無限遠方からモノを落としたとき、落下速度が光速になるほど重くて小さい天体、 と考えてもよい。実際、(2.54)より脱出速度が光速 c となる半径は、

$$r = \frac{2GM}{c^2} \tag{2.55}$$

となり、これは質量 M の天体のシュワルツシルド半径に一致する¹⁶。

通常の星 (主系列星)は、核融合反応による圧力で形を保っていて、その半径はシュワル ツシルド半径よりもはるかに大きい。巨大な星が進化するにつれて核融合反応が進み、星の 芯には鉄のコアができる。星が超新星爆発を起こした後に、圧縮されたコアが残される。そ のコアが太陽質量の約3倍以下であれば、それは**中性子星**になる。中性子星は中性子間の核

¹⁶この導出は一般相対論を使っていないので、厳密ではないことに注意。

カにより形を保っている。もしそのコアが太陽質量の約3倍以上であるばあいは、中性子間 の核力でもその重さを支えられなくなり、**重力崩壊**を起こしてブラックホールになる。回転 していないブラックホールの半径(のようなもの)が、シュワルツシルド半径と考えてよい。

実際、そのようなブラックホール天体が、数多く観測されている。ブラックホールまた は中性子星が通常の星と**連星系**を成しているとき、通常の星からブラックホールまたは中性 性にモノが回転しながら落ちていくときに円盤を作る。これを**降着円盤**と呼ぶ。降着円盤の なかの摩擦により、その温度は数千万度になり、それが**黒体輻射**によって X 線を放出する。 このようにして、中性子星はブラックホールは、明るい X 線源として観測される。

では、中性子星とブラックホールはどのようにして見分けるのだろうか?X線の性質から、中心天体が中性子星かブラックホールか推測はできるのだが¹⁸、天体の質量を求めるの が最も確実な方法である。連星系において、中性子星またはブラックホールと対をなして いる**伴星**のスペクトル線のドップラー効果からその運動がわかり、中性子星またはブラック ホールの及ぼす重力を測定できる。それからその天体の質量に制限がつけられるのである。 それが太陽質量の約3倍以上であれば、ブラックホールである。

もう一種類、太陽の数百万倍以上の質量を持つブラックホールも存在する。それらは多 くの銀河の中心に存在する。やはり、そのまわりの星や円盤の運動を観測することによっ て、中心天体の重力がわかり、そこから質量が計算できる。我々の銀河の中心にあるブラッ クホールの質量は、370万太陽質量である¹⁹。

2.3.5 ブラックホールの"密度"

仮にブラックホールをシュバルツシルト半径 R_sを持つ古典的な球と思って、その密度 ρ を 質量/球の体積で定義しよう。

$$\rho = \frac{M}{4\pi R_s^3/3} \approx 2 \times 10^{16} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-2} \text{ g/s.}$$

普通の物質の質量は半径の3乗に比例するが、質量が半径に比例するというのがブラックホールの特徴。よって、"密度"は半径 (質量)の2乗に反比例する。≳ 10⁸M_☉のブラックホールの密度は水の密度よりも小さくなる! 「ブラックホールは高密度」というわけではない。

2.3.6 観測装置の分解能とブラックホールの直接撮像

ブラックホール自身は光を出さないわけだが、仮にブラックホールとその周辺の降着円盤を 撮像したらどのように見えるだろうか?おそらく、明るく輝く降着円盤の中心に、ブラック ホールが黒い影として見えるのだろう(「ブラックホールシャドウ」)。2011年現在、技術的 にそれはまだ実現していないが、ブラックホールシャドウとしてどのような画像が観測され るか、多くの計算がなされている²⁰。

電波やX線を放出する降着円盤の内縁がブラックホールにどこまで近づけるか、という 議論があるのだが、ここでは単純に、シュワルツシルド半径をそのようなブラックホール シャドウの半径だと考えてみよう。そして、その見かけの広がりを現在および将来の観測装 置の性能(位置分解能)と比較してみよう。

¹⁸これは私の大学院時代からの研究テーマの一つです。

¹⁹http://www.mpe.mpg.de/ir/GC/res_dance.php などを参考に。

²⁰この分野の第一人者である大阪教育大学の福江先生の資料などを参考に:http://quasar.cc.osaka-kyoiku. ac.jp/~fukue/lecture/bhshadow_2010.pdf

2.3. 一般相対性理論27

まず、天文観測装置の分解能は日常的に用いられる視力と比較するとわかりやすい。視力が1ということは、視力検査で使われる輪っかの1.5mmの切れ目を5m離れたときに認識できる分解能のことである。その切れ目の広がりは1.5mm/5000mm=0.0003 ラジアン。これを分角に直すと、0.0003/ $\pi \times 180 \times 60 \approx 1'$ 。つまり、視力1ということは、位置分解能1分角、視力2ということは位置分解能0.5分角に対応する。

多くの地上望遠鏡の位置分解能は、一秒角、1"程度(視力 60)であり、これはほぼ大気の 揺らぎによって決まっている。しかし、技術的に大気の揺らぎを補正することができて(**補 償光学**)、その場合の位置分解能は以下の原理的な値に近づく。

口径 D の望遠鏡を用いて波長 λ の光で観測したときの原理的な位置分解能は、ほぼ

$$\lambda/D$$
 (2.56)

で与えられる。たとえば、口径 8.2m のすばる望遠鏡を用いて、波長 2.2 ミクロンの赤外線 で天体を観測したときの原理的な位置分解能は、

$$2.2 \times 10^{-6} / 8.2 \approx 2.7 \times 10^{-7} \ radian \approx 0.06$$
"

であるが、(観測環境の良いマウナケア山頂でさえも)大気揺らぎによって、これは約10倍 悪くなってしまう。補償光学の技術を用いて、大気揺らぎを打ち消すように光学系を操作す ることによって、原理的な位置分解能に近い値、0.063"を達成することができる²¹。

さて、ではさらに観測装置の位置分解能を上げるにはどうすればよいだろうか?式 (2.56) からわかるように、望遠鏡の口径を広げて、波長を短くしてやればよい。望遠鏡の口径を大 きくすることには限界があるが、二つ以上の離れた望遠鏡で観測した電磁波を干渉させる、 **干渉計**という技術がある。これによって、たとえば地上の電波望遠鏡と人工衛星に積んだ電 波望遠鏡を用いて、地球よりも大きいサイズの望遠鏡で観測したのと同じ位置分解能を達成 することができる。それを世界で最初に(今のところ最後でもあるが)達成したのが、宇宙 科学研究所のはるか衛星である²²。はるかの基線長は3万 km、主な観測波長は6cm であっ たので、位置分解能は、6/(3×10⁹) = 2×10⁻⁹ radian ≈ 400µ 秒角となる。これが当時で は人類が達成した最高の位置分解能で、視力15万に対応する。

私たちの銀河の中心までの距離は 8kpc であり²³、そこには質量 370 万 M_{\odot} のブラック ホールが存在する。その見かけ上の広がりは、

 $\frac{370 \times 10^4 \times 3 \times 10^5 \text{ [cm]}}{8 \times 10^3 \times 3.09 \times 10^{18} \text{ [cm]}} \approx 4.4 \times 10^{-11} \text{ radian} \approx 9\mu \text{ arcsec.}$ (2.57)

となる。これはおよそ視力 700 万に対応し、「はるか」衛星でもまだまだ分解能が足りない ことがわかるが、さらに電波干渉計衛星の観測波長を短くすれば、この位置分解能を達成 し、ブラックホールシャドウを観測することは原理的に可能である。近年、地上の電波干渉 計で波長の短いミリ波を用い、より高い位置分解能が実現している。それによって、銀河中 心のブラックホールの大きさに制限をつけたという報告もある²⁴。

干渉計は、波長が短くなればなるほど、より精密な制御が必要になるので技術的に難し くなる。2011年現在、地上での光干渉計の観測は始まっているが、宇宙空間での光干渉計

²¹http://subarutelescope.org/Pressrelease/2006/11/20/j_index.html

²²http://www.isas.jaxa.jp/j/japan_s_history/chapter09/02/07.shtm

²³天文学においては、距離の単位として pc (パーセク) が用いられる。それは、地球の公転による見かけ上の 星の位置のふらつき、**年周視差**が 1"となる星までの距離として定義される。地球と太陽までの距離 (**1 天文単** 位) は 1 億 5 千万 km だから、1 pc = 1.5×10^{13} [cm]/(1/60/60/180 × π) $\approx 3.09 \times 10^{18}$ [cm]。

²⁴http://www.nature.com/nature/journal/v455/n7209/abs/nature07245.html

はまだ実現していない。究極的には、宇宙空間で遠く離れた X 線干渉計²⁵が実現できれば、 それが人類が持ち得る究極の位置分解能を持つ観測装置になるだろう。遠い将来、人類は X 線干渉計を用いて、ブラックホールの X 線写真を撮れるようになるのかも知れない²⁶。

²⁵そういう計画はあります:http://maxim.gsfc.nasa.gov

²⁶2058 年に実現したりして;)http://www.isas.ac.jp/j/mailmaga/backnumber/2010/back289.shtml。

Chapter 3

X線輻射のメカニズム

3.1 光学的厚み (optical depth)

光学的厚み τ の物質を輻射が通過すると、強度が $e^{-\tau}$ になる。考えている物質の厚さをL[cm]、水素柱密度を N_H [cm⁻²]、密度を ρ [g/cm³] とすると、

$$\tau = \alpha [\rm{cm}^{-1}] L[\rm{cm}] = \kappa [\rm{cm}^2/\rm{g}] \,\rho [\rm{g/cm}^3] \,L[\rm{cm}] = N_H [\rm{cm}^{-2}] \,\sigma_H [\rm{cm}^2].$$
(3.1)

 α は吸収係数 (absorption coefficient)、 κ は質量吸収係数 (mass absorption coefficient; opacity)、 σ_H は水素原子あたりの吸収断面積 (cross section)。

輻射強度でなく、「光子」ひとつひとつに注目すると、物質中で光子が吸収されずに τ だけ進む確率は $e^{-\tau}$ 、光子が進む光学的距離の平均が $\tau = 1$ 。実際、

$$\int_0^\infty e^{-\tau} d\tau = 1,$$

$$\langle \tau \rangle \equiv \int_0^\infty \tau e^{-\tau} d\tau = 1.$$

 $\tau > 1$ のとき、物質は光学的に厚い (不透明;大部分の光子は吸収されてしまう)、 $\tau < 1$ のとき、物質は光学的に薄い (透明;大部分の光子は透過する)。光子が光学的に薄い物質に吸収される確率は、 $1 - e^{-\tau} \approx \tau$ 。

光子が実際に進む距離の平均をlとすると、 $\tau = \alpha l = 1$ より、

$$l = \frac{1}{\alpha}.\tag{3.2}$$

これが平均自由行程 (mean free path)。式 (3.1) と (3.2) より、

$$\tau = \frac{L}{l}.\tag{3.3}$$

3.2 輻射輸送 (radiative transfer)

輻射輸送 (radiative transfer) の式,

$$\frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu}} = -I_{\nu} + S_{\nu}.\tag{3.4}$$

一般に、 I_{ν} (specific intensity; brightness), S_{ν} (source function) は、振動数、場所、 τ_{ν} (光 学的厚み [optical depth])、その他の諸々の物理量の関数。様々な状況において「輻射輸送」 の問題を解いて I_{ν} を求め、観測と比較するのが、天文学の伝統的な手法。散乱 (scattering) があるとき、S は I に依存し、さらに問題が複雑になる。

輻射輸送の式と、 I_{ν} と S_{ν} の単位 (次元)、erg/s/cm²/Hz/str は覚えておこう。

熱平衡の場合、Source function は温度だけで一意的に決まり、プランク関数 $B_{\nu}(T)$ で 与えられる:

$$B_{\nu}(T) = \frac{2}{c^2} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad [\text{ergs/s/cm}^2/\text{Hz/str}]$$
(3.5)

この標識も覚えておくと何かと便利。次元を合わせ、偏光によって factor 2 が出てくること から思いだせるはず。

式 (3.4) を以下のように直観的に解釈できる:

"I > Sのとき $dI/d\tau < 0$ で、I は減少、I < Sのとき $dI/d\tau > 0$ で、I は増加、すなわち、I は τ に沿って S に近づこうとする。よって、 τ が十分大きい (光学的に厚い) とき、I は S に一致する。"

 $S_{\nu} = B_{\nu}$ を熱的輻射 (thermal emission)、 $I_{\nu} = B_{\nu}$ を黒体輻射 (blackbody emission) という。すべての熱的輻射は、光学的に厚い極限では黒体輻射になる。

 S_{ν} が一定 (auに依らない) のとき、(3.4) を解くことができる。

$$I_{\nu}(\tau) = S_{\nu}(1 - e^{-\tau}) + I_{\nu}(0)e^{-\tau}$$
(3.6)



光学的厚み τ の物質 (プラズマ) に向こう側から $I_{\nu}(0)$ という輻射が入ってきて、我々に 向かって $I_{\nu}(\tau)$ が出てくる、というイメージ。式 (3.6) より、 $\tau \gg 1$ (光学的に厚い) のとき は、すでに見たとおり、

$$I_{\nu}(\tau) = S_{\nu}.\tag{3.7}$$

特に、物質 (プラズマ) が温度 T の熱輻射をしているときは、 $I_{\nu}(\tau) = B_{\nu}(T)$ 。つまり、プラ ズマの組成が何であろうと、それに入射する輻射があってもなくても、そこから出る輻射は 黒体輻射になる。

τ≪1(光学的に薄い)のとき、式(3.6)は、

$$I_{\nu}(\tau) = S_{\nu}\tau + I_{\nu}(0)(1-\tau). \tag{3.8}$$

入射する輻射がないときは、第二項はゼロ。第一項より、光学的厚みに比例した、「光学的 に薄い」輻射が観測される。 特に、ある線スペクトルのところだけで r が大きい場合は、第二項より「吸収線」が観 測される。第一項は輝線を与えるので、輝線が観測されるか吸収線が観測されるかは状況に 依る。

式 (3.7)、(3.8) より、熱的な放射、 $S_{\nu} = B_{\nu}(T)$ を考える限りは、常に $I_{\nu}(\tau) \leq B_{\nu}$. つまり、**熱的な放射の強度は、黒体輻射の強度を越えない。**

3.3 黑体輻射 (blackbody radiation)

黒体輻射は物質と輻射場が完全に熱平衡にあるときの放射を記述し、[erg/s/cm²/Hz/str]という単位を持つ (str は立体角)。どんな状況においても熱平衡にあるかぎり黒体輻射は成立 するので、二つの準位を持つ原子と輻射場を考える。

上の準位にある原子が単位時間あたり $A_{21}[s^{-1}]$ の割合で下の準位に遷移し、光子を放射 する。一方、輻射場の強度を J_{ν} として、光子は単位時間あたり、 $B_{12}J_{\nu}$ の割合で、吸収さ れる。また、輻射場の強度に刺激されて起きる放射の割合が、 $B_{21}J_{\nu}$ である。下の準位にあ る原子の密度を n_1 、上の密度にある原子の密度を n_2 とし、系が平衡状態にあることから、

$$n_1 B_{12} J_\nu = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} J_\nu \tag{3.9}$$

である。これを J_ν について解けば、

$$J_{\nu} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}.$$
(3.10)

ここで、熱平衡の式より、

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp(h\nu/kT).$$
 (3.11)

よって (3.10) は、

$$J_{\nu} = \frac{A_{21}/B_{21}}{\exp(h\nu/kT)(B_{12}/B_{21}) - 1}.$$
(3.12)

ここで、一般に Einstein の関係式、

$$B_{12} = B_{21},$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}$$
(3.13)

が成立することがわかっている。前者は、詳細つりあい (detailed balance)を示し、後者では、 $2h\nu^3/c^2$ が、[erg/cm²/s/Hz] という単位を持つフラックスである。係数2は、変更の自由度2を表わしている。式 (3.13)を用いて、(3.12)は、

$$J_{\nu} = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1} \ [\text{erg/s/cm}^2/\text{Hz/str}].$$
(3.14)

これが黒体輻射の式で、通常 $B_{\nu}(T)$ で表す。



Figure 3.1: COBE 衛星が測定した CMBR のスペクトル。四角が測定点、実線は 2.735 K の 黒体輻射。Matehr et al. 1990, Astrophysical Journal, 354, L37 より。後に検出装置の較正 が進み、最終的に COBE チームが 1999 年に発表した CMBR の温度は 2.725 ± 0.002 K で ある。横軸の単位が波数 (=波長の逆数=振動数/光速) であること、横軸、縦軸ともに線型 表示であることに注意。

3.3.1 黒体輻射の例

黒体輻射は宇宙のいたるところで観測されるが、最も普遍的なのが**宇宙背景輻射 (Cosmic** Microwave Background Radiation; CMBR) である。これは、ビッグバンから数十万 年後、宇宙が約 3000 K の黒体輻射に満ちていたときの光が、宇宙が 1000 倍膨張した結果、 温度 (エネルギー) が 1/1000 に下がった (赤方偏移) ものである。NASA の COBE 衛星はそ の温度を正確に 2.725±0.002 K と測定した (図 3.1)。COBE 衛星の業績により、Mather と Smoot の 2 人は 2006 年のノーベル物理学賞を受賞している¹。さらに、CMBR の微少な空 間的ゆらぎを測定することにより、宇宙膨張のパラメーターに制限がつき、宇宙の年齢を知 ることができる。WMAP 衛星の測定によって、それは 137 億年と求められている。

3.3.2 観測との比較

黒体輻射は式 (3.5) で与えられるが、スペクトルフィッティングなどで X 線観測データ (単位 時間、各チャンネルあたりのイベント数) と比較する場合には、黒体輻射の光子数 (photon flux) を用いる必要がある。観測と比べるべき量は (3.5) を $E = h\nu$ で割って、以下のとおり。

$$\frac{B_E(T)}{E} = \frac{2}{h^2 c^2} \frac{E^2}{e^{E/kT} - 1} \quad \text{[photons/s/cm^2/Hz/str]}$$
$$= \frac{2}{h^3 c^2} \frac{E^2}{e^{E/kT} - 1} \quad \text{[photons/s/cm^2/keV/str]}.$$

X線の光子フラックスは通常 [photons/s/keV/cm²] で測るので、Hz⁻¹ から keV⁻¹ への変換で、分母に h が掛かることを忘れないように。

¹http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2006/phyadv06.pdf_o

3.3. 黒体輻射 (BLACKBODY RADIATION)

黒体輻射をしている天体までの距離をd、視線方向に投影した輻射面積を πR^2 とすると、 立体角は $\pi R^2/d^2$ で与えられるので、

$$\frac{B_E(T)}{E} \left(\frac{\pi R}{d}\right)^2 = 3.15 \times 10^{31} \left(\frac{\pi R}{d}\right)^2 \frac{E[\text{keV}]^2}{e^{E/kT} - 1} \quad \text{[photons/s/cm^2/keV]}.$$
 (3.15)

黒体輻射している天体を X 線で観測したとき、スペクトルフィットから温度 T が求められる。これを式 (3.15) に代入するとフラックスが R/dの関数として得られる。つまり、観測したフラックスと (3.15) を比較することにより R/dが求められる。

*R*に制限がついているとき (中性子星の半径など)、*d*に制限がつく。実際、銀河中心付 近にある中性子星の X 線バーストの観測から、銀河中心までの距離に制限がついた (e.g., Ebisuzaki, Sugimoto and Hanawa 1984, PASJ, 36, 551)。

一方、*d* がわかっているときは、*R* を測定することができる。たとえば、こうやってブ ラックホール周辺の光学的に厚い降着円盤の内縁の半径を推定できる。さらに、それをシュ バルツシルト半径の3倍と仮定して、ブラックホールの質量に制限がつく (e.g., Ebisawa et al. 1993, ApJ, 403, 684; 5.6 節参照)。

3.3.3 黒体輻射の特徴

ピークを与える周波数と波長

式 (3.5) に対応して、黒体輻射の単位" 波長" あたりの強度を与える関数 B_λ(T) を考えると、

$$B_{\nu}(T) \ d\nu = -B_{\lambda}(T) \ d\lambda,$$

 $c = \lambda \nu$, $d\nu / \nu = - d\lambda / \lambda \ddagger \vartheta$,

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \quad [\text{erg/s/cm}^2/\text{Å/str}].$$
(3.16)

(3.5) を ν で微分してゼロになるところが、単位周波数あたりの放射のピークを与える周波数 ν_{max} は、

$$h\nu_{max} = 2.82 \ kT.$$
 (3.17)

黒体輻射のエネルギースペクトルのピークが温度の約3倍にくることを覚えておくと便利。 一方、(3.16)を λ で微分してゼロになるところが、単位波長あたりの放射のピークを与える 波長 λ_{max} は、

$$\lambda_{max} = 0.201 \ \frac{hc}{kT}.\tag{3.18}$$

 $\lambda_{max} \nu_{max} = 0.57c \neq c$ 、つまり、単位振動数 (エネルギー) あたりの黒体輻射のピーク を与える振動数 (エネルギー) と単位波長あたりのピークを与える波長は違うことに注意。

低周波数側と高周波数側での近似式

 $h\nu \ll kT \sigma c \delta$, (3.5) $m \delta$,

$$B_{\nu}(T) \approx \frac{2\nu^2 kT}{c^2}.$$
(3.19)

これが古典的な Rayleigh-Jeans の法則。h が現われないこと、T に比例することに注意²。

²エネルギー密度は $4\pi/c$ を掛けて、 $(8\pi\nu^2/c^3)kT$ 。古典的な電磁的固有振動の密度が $8\pi\nu^2/c^3$ であることを思いだして、一固有振動あたり kT のエネルギーが付随していると解釈できる。

 $h\nu \gg kT \mathcal{O} \geq bk$

$$B_{\nu}(T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-kT/h\nu}.$$
 (3.20)

これが Wien の法則。

電波天文では Rayleigh-Jeans 側を扱うことが多いが、X 線観測では、黒体輻射のピーク のあたりから Wien 側からを見ることが多い。典型的な観測範囲は 2-10 keV、X 線バース トは ~2 keV、降着円盤の内縁は ~ 1 keV 等。X 線観測 (2 – 10 keV) が Rayleigh-Jeans 側に対応するほど高温の黒体輻射をしている天体は宇宙に (ほとんど) 存在しない。

3.3.4 黒体輻射のエネルギー密度、フラックス

$$u = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu$$
$$= \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

積分の値は $\frac{\pi^4}{15}$ (Mathematica を使おう!) だから、

$$u = a T^4$$

$$a \equiv \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} = 7.56 \times 10^{-15} \text{ [erg cm}^{-3} \text{ deg}^{-4}]^3.$$
$$= 1.37 \times 10^{14} \text{ [erg cm}^{-3} \text{ keV}^{-4}].$$

ſ

黒体輻射している表面からのフラックスを F とすると、

$$F \equiv \int I \cos \theta \, d\Omega$$

= $2\pi \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu \right\} \cos \theta \sin \theta \, d\theta$
= $\pi \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{c}{4} u = \frac{ac}{4} T^4 \equiv \sigma T^4$, (3.21)
 $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-5} [\text{erg cm}^{-2} \text{ deg}^{-4} \text{ s}^{-1}]$
= $1.03 \times 10^{24} [\text{erg cm}^{-2} \text{ keV}^{-4} \text{ s}^{-1}]$.

これがステファン-ボルツマン定数。

³ 宇宙背景黒体輻射の温度は 2.725 K だから、エネルギー密度は $4.17 \times 10^{13} \text{erg/cm}^3 \approx 0.26 \text{ eV/cm}^3$.

3.3.5 黒体輻射の光子密度

黒体輻射の光子密度をnとすると、

$$n = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B_\nu(T) / h\nu \, d\nu$$
$$= \frac{8\pi k^3 T^3}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx.$$

 $\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2.404$ だから、

$$n = 60.4 \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 = C T^3,$$

$$C = 20.3 \text{ [photons cm}^{-3} \text{ deg}^{-3}\text{]}^4$$
$$= 3.17 \times 10^{22} \text{ [photons cm}^{-3} \text{ keV}^{-3}\text{]}.$$

また、(3.18)を用いて、

$$1/n \approx 2\lambda_{max}^3$$
.

1/nは、光子一つあたりが占める体積だから、典型的な波長 λ_{max} を持つ光子が、空間に詰まっている様子を思い浮かべればよい。

 $^{^4}$ 宇宙背景黒体輻射の温度は 2.725 K だから、光子密度は $\sim 410 \ \rm photons/cm^3.$

Chapter 4

コンパクト天体からのX線放射

4.1 重力エネルギーを解放して光っているコンパクト天体の光度

質量 M、半径 r の天体に質量降着率 M で物質が降着し、その重力エネルギーがすべて輻射 に変換されたとしたときの光度 L は、

$$L \approx \frac{G M \dot{M}}{r}.$$
(4.1)

中性子星の場合

$$L \approx 2 \times 10^{38} \text{ erg/s} \left(\frac{M}{1.4 M_{\odot}}\right) \left(\frac{\dot{M}}{10^{18} \text{ g s}^{-1}}\right) \left(\frac{r}{10 \text{ km}}\right)^{-1}$$

小質量連星系 (Low Mass X-ray Binaries) は、小質量 ($\leq 1M_{\odot}$)の晩期型星と中性子星 の連星系で、ロッシュローブオーバーフローで $\sim 10^{18}$ g s⁻¹の質量降着を引き起こす。 実際に観測されている、Sco X-1 等の明るい小質量連星系 (Low Mass X-ray Binaries) の X 線光度はこの程度である。

ブラックホールの場合

表面がないので、アクリーションディスクでのみ重力エネルギーが解放される。ディ スクの内縁を r_{in} とすると、そこでの重力ポテンシャルは単位質量あたり $-GM/r_{in}$ で あるが、ケプラー回転¹している物体は単位質量あたり $\frac{1}{2}v^2$ の運動エネルギーを持って いるので、無限遠から r_{in} に落ちるまでに円盤中で解放するエネルギーは、単位質量 あたり $GM/r_{in} - \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}GM/r_{in}$. ここで運動方程式、 $v^2/r_{in} = GM/r_{in}^2$ を用いた。 よって、質量降着率が \dot{M} のときディスク中で解放されるエネルギーは、

$$L \approx \frac{1}{2} \frac{G M \dot{M}}{r_{in}}$$

となる²。残り半分の運動エネルギーは *r_{in}* より中に持ちこまれ、(標準降着円盤モデ ルを考える限りは) 観測されることはない。中性子星の場合は、*r_{in}* より内側に持ちこ まれたエネルギーもすべて中性子星表面で解放されることに注意。

¹光学的に厚い標準円盤中の物質は、中心天体の回りでケプラー回転していると考えてよい。

²ビリアル定理からファクター 1/2 が出てくると考えても良い。一般にビリアル定理は、閉じた粒子系 (k =

シュバルツシルトブラックホールの場合、 $r_{in} = 3r_s = 6GM/c^2$ なので、

$$L \approx \frac{1}{12} \dot{M} c^2.$$

上の見積りは Newtonian でやっているので、正確ではない。ちゃんと一般相対論で計 算すると、シュバルツシルトブラックホールの場合、

 $L = 0.057 \dot{M}c^2$

である。カーブラックホール (回転しているブラックホール) の場合、角運動量が大き いほどディスクの内縁は小さくなり、重力エネルギー解放の効率は高くなる。最も早 く回転しているとき、内縁の半径はシュバルツシルト半径の半分程度、効率は~0.4.

白色矮星の場合
 半径が中性子星の 50 倍ほどなので、重力エネルギーの解放は~1/50 になり、

$$L \approx 3 \times 10^{35} \text{ erg/s} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \left(\frac{\dot{M}}{10^{18} \text{ g s}^{-1}}\right) \left(\frac{r}{5000 \text{ km}}\right)^{-1}.$$

 $50 \approx 100 \text{ eV}$ の温度を持つ "Super-soft Sources" は、Eddington 光度 (~ 10^{38} erg/s) で光っているが (次節参照)、上式よりこのエネルギー源は重力エネルギーではありえないことがわかる。実際、SSS のエネルギー源は白色矮星表面における定常的な核反応と考えられている。

4.2 エディントン限界光度

天体にはその質量から決まる、**エディントン限界** (Eddington limit) と言う限界光度がある。 それ以上明るくなると、輻射圧によって星の大気が飛ばされてしまう。宇宙にある元素の大 部分が水素である。水素の質量を m_H として、重力と輻射圧のつりあいの式は以下のように 書ける。

$$\frac{\sigma_T}{c} \frac{L_{Edd}}{4\pi r^2} = \frac{GMm_H}{r^2}.$$
(4.2)

ここで $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \text{ は}$ トムソン断面積³で、電子が光を散乱する際の断面積である。これから、

$$L_{Edd} = \frac{4\pi cGM}{\sigma_T/m_H} = \frac{4\pi c\ GM}{\kappa_T}.$$
(4.3)

 κ_T はトムソン散乱による**質量吸収係数**で、 $\sim 0.4 \text{ cm}^2/\text{g}$ である。よって、

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c^3}{\kappa_T} \frac{GM_{\odot}}{c^2} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \approx 1.3 \times 10^{38} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \text{ [erg/s]}.$$
 (4.4)

1,2,,,N) について

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} \langle \sum_{k=1}^{N} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k} \rangle.$$

ここで、 $\langle K \rangle$ は運動エネルギーの時間平均、V はポテンシャル、 x_k は k 番目の粒子の座標。ケプラー運動の場合は、単位質量あたりの重力ポテンシャルは V = -GM/r だから、単位質量あたりの運動エネルギーの時間平均は、 $\frac{1}{2}GM/r_o$

³断面積という概念に慣れておこう。文字通り、一つの電子がこれだけの面積をもって、光の道筋に立ちはだ かっていると思ってよい。 白色矮星の最大質量 (チャンドラセカール限界) は $1.4M_{\odot}$ で、それが中性子星の平均質 量に対応している。中性子星の最大質量は ~ $2M_{\odot}$ で、それより重いコンパクト星はブラッ クホールである⁴。ブラックホールについては、(4.4) に従って、質量が大きいほど、明るく 光ることができる。

前節で示したとおり、~ 10¹⁸ erg/s で質量降着している中性子星はほぼエディントン限 界で光っていることに注意。これより質量降着率が大きくなっても、より明るく光ることは できない (物質は降着できずに、輻射圧で跳ねとばされてしまう)。

4.3 中性子星、白色矮星の表面温度

エディントン光度 ~ 10^{38} [erg/s] で光っている、中性子星、白色矮星の表面温度を見積もってみよう。黒体放射を仮定すると、星の半径を *R* とすると、ステファン・ボルツマンの法則 から $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ だから、

$$T \approx \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{1/4} \\ \approx \left(\frac{10^{38} \text{ erg/s}}{4\pi (10 \text{ km})^2 10^{24} [\text{erg/s/cm}^2/\text{keV}^4]} \left(\frac{L}{10^{38} \text{ erg/s}}\right) \left(\frac{10 \text{ km}}{R}\right)^2\right)^{1/4} \\ \approx 2 \text{ keV } \left(\frac{L}{10^{38} \text{ erg/s}}\right)^{1/4} \left(\frac{10 \text{ km}}{R}\right)^{1/2}.$$
(4.5)

よって、半径 10 km の中性子星は、~2 keV の X 線で光っていることがわかる⁵。一方、半径 ~ 5000 km の白色矮星の表面温度は、~90 eV になり、これは軟 X 線源として観測される⁶。実際、このような白色矮星 X 線源が多数観測されており、Super Soft Sources と呼ばれている。

⁴質量以外にブラックホールの観測的証拠はなかなか見つからないのだが、「ブラックホールしかありえない」、 ということ。

⁵1 eV=11604 K だから、~2 keV は、2300 万度と言っても良い。

⁶エネルギーが低い X 線を軟 X 線、soft X-rays、高い X 線を硬 X 線、hard X-rays と呼ぶ。

Chapter 5

降着円盤

5.1 降着円盤の内縁半径とエネルギー効率

中心天体に物質が回転しながらゆっくりと落ちていくとき、降着円盤 (accretion disk)が形成される。降着円盤内で解放された重力エネルギーが摩擦により熱エネルギーに変換され、熱輻射として観測される。重力ポテンシャルが深いほど解放されるエネルギーが大きいので、通常観測対象となるのは、白色矮星、中性子星、ブラックホールのまわりの降着円盤である。

多くの場合、これらのコンパクト天体は連星系を作っており、伴星からの物質は、ロッ シュローブオーバーフローまたは星風によって、コンパクト天体に落ちていく。物質が落ち ていく際に角運動量が保存されるので、降着円盤が形成される。

一般相対論によると、ブラックホールの周りの重力場では、最小安定円軌道半径 (Innermost Stable Circular Orbit; ISCO) が存在し、それはブラックホールのスピンに依存して、 $3r_s$ (シュワルツシルドブラックホールの場合) から 0.5 r_s (最高速で回転しているカーブラックホールの場合) である。円盤の内縁半径 r_{in} は、ISCO によって決まると考えることが妥当である。

質量 M の天体に質量降着率 \dot{M} で物が落ちていくとき、円盤の内縁の半径を r_{in} とすると、円盤の光度は、

$$L \approx \frac{1}{2} \frac{G M \dot{M}}{r_{in}} \tag{5.1}$$

と見積もることができる。

質量降着の場合に限らず、一般に

$$L \approx \eta \dot{M} c^2 \tag{5.2}$$

と書いて、 η をエネルギー効率と呼ぶ (静止質量のうちどれだけが解放されるか)。水素から ヘリウムが生成される核融合では、(わずか) $\eta = 0.007$ である。シュバルツシルトブラック ホールの周辺で安定な最小円軌道は $3r_s = 6GM/c^2$ で、これを円盤の内縁 r_{in} と考えてよ い。そのとき (5.1) から効率を見積ると、 $\eta = 1/12 \approx 0.083$ になる。一般相対論を使った正 しい値は $\eta = 1 - \sqrt{8/9} = 0.057$ である。

ブラックホールが回転している場合 (カーブラックホール)、回転が早いほど、安定な円 軌道 (ディスクの内縁) の半径は小さくなり、重力エネルギー解放の効率は高くなる。最大回 転の場合、 $r_{in} = 0.5r_s = GM/c^2$ 、角運動量は GM^2/c で、 $\eta = 1 - 1/\sqrt{3} = 0.423$ にもなる。

5.2 数学的解としての降着円盤モデル

降着円盤の方程式を立てたとき、その数学的な解として、いろいろな降着円盤モデルが得ら れる。典型的に降着円盤の物理状態は、面密度 Σ [g/cm²] と 質量降着率 \dot{M} [g/s] で決まり、 $\Sigma - \dot{M}$ 平面上で、降着円盤の解曲線を描くことができる。質量降着率が上がると面密度が 上がる動的に安定 (secular stable; 右上がり) な解と、質量降着率が上がると面密度が下が る動的に不安定 (secular instabe; 左上がり) な解が存在する。現実に観測されるのは動的に 安定な解だけであるはずで、実際、これは観測と良く合っている。



Kato, Fukue and Mineshige "Black-hole Accretion Disks" \natural $\mathfrak{h}_{\,\circ}$

上図で、H = rが高さ (H) と半径 (r)が一致するところなので、それに近いほうが幾何 学的に厚く、遠いほうが幾何学的に薄い。また、右側のほうが面密度が高いので光学的に厚 く、左側のほうが面密度が低いので、光学的に薄い。上図中のラベルは、Kato, Fukue and Mineshige の教科書中のセクション名であるが、それに沿って、簡単に各解の説明をする。

§3.2 は"Optically Thick Disks" で、この右上がりになったところが、次節で説明する幾 何学的に薄く光学的に厚い「標準降着円盤」であり、この状態がブラックホール天体の"High state" として X 線で観測されている。§3.2 の左上がりになって部分は動的に不安定な解であ る。§3.3 は"Optically Thin Disks" で、Cyg X-1 等のブラックホールの高温の"Low state" を説明するモデルとして 1970 年代に提案されたが、熱的に不安定であることが難点であっ た (よって、おそらく現実にはありえない)。

§5.1 は"Thermal-Ionization Instability" で、上側のブランチでは水素が電離していて、 下側では電離していない。この間が不安定なので、二つの状態をいったりきたりするリミッ トサイクルが生じる。これが可視光や紫外線で観測される Dwarf-Nova の原因である。§5.3 は"Emission-Line Formation during Quiescence" で、Dwarf-Nova の Quiescence 状態に対 応する。可視光で、ディスクの回転によって赤方偏移、青方偏移した輝線が観測される。

§10.1 が"Radiation-Pressure-Dominated Disks" で、光学的に厚く、移流 (advection) が 優勢な円盤である (Optically thick Advection Dominated Accretion Flow [ADAF])。スリ ムディスクと呼ばれることもある。これは安定な解で、非常に明るいブラックホール連星系 や、Ultra-Luminous X-ray (ULX) sources がこれに対応していると考えられている (まだ 完全に受け入れられているわけではない)。§10.2 が"Optically-Thin One-Temperature"で、 Optically thin ADAF とも呼ばれる安定な解である。光学的に薄く高温のディスクで、ブ ラックホール連星系の Low state を説明する。

§11.3 が"Relaxation Oscillations in Hot Accretion Disks" で、dwarf-novae のリミット サイクルのような準周期変動が起きる。ブラックホール GRS1915+105 から観測される振動 状態は、これで説明される。§11.4 は"Advection-Dominated Flow in X-ray Novae" で、ブ ラックホール連星系の High state と Low state の間の遷移はこれで説明される。

5.3 ディスクの厚さ、温度とポテンシャルエネルギーの関係

ガス圧優勢のディスクを考える。 圧力 P、密度 ρ 、温度 T、粒子の質量 m として、気体の 状態方程式から、

$$P \approx \frac{\rho k T}{m}.\tag{5.3}$$

これと(5.9)より、

$$\frac{kT}{GMm/r} \approx \left(\frac{h}{r}\right)^2. \tag{5.4}$$

左辺は熱エネルギーと重力ポテンシャルエネルギーの比。よって、(1)幾何学的に薄い標 準降着円盤 (*h*/*r* ≪ 1)では、ディスクの熱エネルギーは、粒子一つあたりの重力ポテンシャ ルエネルギーよりはるかに小さいこと、(2)ディスクが幾何学的に厚くなってくると、温度 が高くなること、がわかる。前者のディスクがブラックホールの High/Soft 状態に(上図 の §3.2"Optically Thick Disks")、後者が Low/Hard 状態に対応していると考えられている (§10.2 "Optically-Thin One-Temperature")。§10.1 のスリムディスクも標準降着円盤に比 べて幾何学的に厚く高温であり、これが Ultra-luminous X-ray Sources (ULXs)の、標準降 着円盤と比較して高温な X 線スペクトルを説明すると考えられている。

5.4 標準降着円盤モデル (standard accretion disk model)

Shakura and Sunyaev (1973, A&A, 24, 337) によって提唱された歴史的なモデルである¹。 (1) ディスクは幾何学的に薄く光学的に厚い、(2) 解放された重力エネルギーはすべて熱化さ れる、(3) 粘性テンソルが粘性係数 α と圧力に比例 (式 5.7)、という仮定をして解いたディ スクの解である。1960 年代に発見された明るい X 線天体を説明するモデルとして提唱され た。現在ではブラックホール連星系の"High state" をうまく説明するモデルとして確立し ている。

詳細は、Kato, Mineshige and Fukue、Shapiro& Teukolsy 等の教科書を参考にせよ。本質的には、以下の 11 個のパラメーターを結びつける 11 個の関係式が得られ、与えられた M, \dot{M}, α に対して、これら 11 個のパラメーターが半径 rの関数として求められる。

1.
$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$
 —ケプラー回転の角速度

2. *h* — ディスクの高さ

¹ADS によると、2007 年 1 月 29 日の時点で 3457 回の引用数!

- 3. Σ 面密度
- 4. *ρ* ディスクの密度
- 5. v_r 動径方向の速度
- 6. *T_c* ディスクの中心での温度
- 7. τ 鉛直方向の光学的厚み
- 8. ν 動的粘性率 (kinematic viscosity)
- 9. v_s —音速
- 10. p ディスクの圧力
- 11. $\bar{\kappa}$ 平均の opacity

特に、 Ω に続く6つの量が M, \dot{M}, α, r の関数として求められると、それらを使って後の4つの量が求められる。

5.5 回転速度と物が落ちる速度

円盤中で物がケプラー回転する間、粘性によって少しずつ落ちていくわけだが、半径方向と 動径方向の間に働く粘性テンソルは、

$$t_{r\varphi} \approx \rho \, v_{turb}^2 \approx \rho \, v_r v_\varphi \tag{5.5}$$

と書ける。ここで ρ は密度、 v_{turb} は乱流速度、 v_r は半径方向の速度、 $v_{\varphi}(=\sqrt{GM/r})$ は動 径方向の速度。乱流速度は音速 $v_s \approx \sqrt{P/\rho}$ よりは小さいはずだから、

$$t_{r\varphi} \lesssim \rho \, v_s^2 = P. \tag{5.6}$$

Shakura and Sunyaev (1973) の画期的なところは、ここで粘性パラメーター (viscous parameter) α を定義し、

$$t_{r\varphi} \equiv \alpha P \tag{5.7}$$

と仮定したこと。 α は0から1までの値を取る定数で、Pは圧力。(5.7)により、様々な物理量の間に関係がついて、標準降着円盤の方程式が解けるようになった²。(5.5), (5.6), (5.7)を比べて、

$$\alpha = \frac{v_r \, v_\varphi}{v_s^2}.\tag{5.8}$$

円盤の高さをhとして、鉛直方向の力学的バランスを考えると、

$$\frac{dP}{dh} \approx -\frac{GM\rho}{r^2} \frac{h}{r},$$

$$\frac{P}{h} \approx \frac{GM\rho}{r} \frac{h}{r^2} \approx v_{\varphi}^2 \frac{\rho h}{r^2}.$$
(5.9)

より

44

²現在では、粘性を生み出す物理機構は磁気的なものだと考えられており (magneto-viscous effect)、その効 果を入れた Magnetic Hydro-Dynamics (MHD) シミュレーションにより、 α を仮定しなくても、標準降着円盤 の計算ができるようになりつつある。

 $P/\rho \approx v_s^2$ を使って、

$$v_{\varphi} \approx v_s \left(\frac{r}{h}\right).$$
 (5.10)

標準降着円盤では r/h ≫ 1 だから、**円盤の回転速度は音速よりずっと大きい**。また、(5.8), (5.10) から、

$$v_r \approx \alpha \, v_s \, \left(\frac{h}{r}\right) \approx \alpha \, v_\varphi \, \left(\frac{h}{r}\right)^2.$$
 (5.11)

つまり、物が落ちる速度は、 α が大きいほど大きくなるが、最大 ($\alpha = 1$) でも回転速度と 音速よりもずっと小さいことがわかる。

5.6 X線による標準降着円盤の観測

1987 年に出版された Katz の"High Energy Astrophysics" は優れた教科書だが、その降着円 盤に関する章には、"Unfortunately, Eq.1 and Eq.2 are not supported by any data. There are few astronomical objects in which the continuum radiation from an accretion disk can be unambiguously identified." (ここで、Eq.1 と Eq.2 は、テキスト中でそれぞれ標準降着 円盤の温度とスペクトルを表わす式) という記述がある。実際、これが当時の降着円盤の観 測的研究の状況であった。

1987 年から 1991 年まで稼働していた日本の X 線天文衛星「ぎんが」は、LMC X-3, GS2000+25, GS1124-68 などのブラックホール連星系の"High State"のエネルギースペク トル変化を長期間にわたって観測し、どの天体についても、(1) 光学的に厚い降着円盤の内縁 の半径は光度が大きく変化しても変わらないこと (光度は円盤温度の4 乗に比例すると言っ ても良い)、(2) (内縁の境界条件や黒体輻射からのずれを補正した後) 円盤の内縁半径をシュ バルツシルト半径の3倍と仮定して見積もったブラックホールの質量は、連星系のドップ ラー運動から決めた質量とよく一致することを発見した (図 5.1)。これは、ブラックホール 連星系の"High State"のエネルギースペクトルは、その内縁がシュバルツシルト半径の3倍 まで伸びた標準降着円盤からのものであることを強く示唆している。

1994年に出版された Longair, "High Energy Astrophysics" second edition では、「ぎん が」衛星による LMC X-3 の観測結果を引用して、"This is a remarkable result, but it is clearly dependent upon a number of assumptions, particularly that the accretion disk is optically thick." と書いてある。実際、それまでは明るく光っている標準降着円盤の内縁付 近が光学的に厚いのか薄いのかわかっていなかったのだが、「ぎんが」の観測によって、常 に前者であることが明らかになった。

その後、RXTE 衛星等によって上記の二つの観測事実がより多くのブラックホールから 確認され、ブラックホールの High State のエネルギースペクトルを標準降着円盤で説明す るモデルが確立した。

5.7 降着円盤の最大光度

質量降着が球対称な場合の最大光度はエディントン限界光度で与えられることを見てきたが (4.2節)、降着円盤の最大光度を考えてみよう。水素原子のみの場合を考える。円盤と鉛直 方向の重力と光の圧力による力のつり合いから、円盤の単位面積からのフラックスをFと して

$$\frac{F\sigma_T}{c} \lesssim \frac{GMm_H}{r^2} \frac{h}{r}.$$
(5.12)



Figure 16.22. Time histories of the best-fit parameters to the soft component of the X-ray spectrum of LMC X-3 obtained by the Japanese Ginga satellite. (a) The bolometric luminosity of the sources; (b) the inferred temperature at the inner radius of the accretion disc; (c) the inferred inner radius, r_i , of the accretion disc. *i* is the inclination angle of the plane of the orbit to the plane of the sky. (From H. Inoue (1992). Proc. Texas/ESO-CERN Symposium on Relativistic astrophysics, cosmology and fundamental particles, eds J.D. Barrow, L. Mestel and P.A. Thomas, pp. 86–103. New York: New York Academy of Sciences.)

Figure 5.1: 「ぎんが」衛星が観測した LMC X-3 の X 線スペクトル変化。ディスク成分の エネルギースペクトルを、ディスクの内縁と温度を自由パラメーターにしてフィッティング を行った。光度 (最上段) が変化しても内縁の半径 (下段) は一定。光度はディスクの温度 (中 段) の 4 乗に比例している。Longair, "High Energy Astrophysics" から取ってきた。そこで は Inoue (1992) を引用しているが、その基は私の博士論文 (1991 年)。投稿論文になったの は、Ebisawa et al. 1993, ApJ, 403, 684。 ここで円盤の光度 *L*_{disk} は *F* に各半径での円環の面積をかけて、動径方向に積分することで 得られる(表と裏で二倍)。

$$L_{disk} = 2 \times 2\pi \int_{r_{in}}^{r_{out}} rFdr.$$
(5.13)

よって、

$$L_{disk} \leq \frac{4\pi c G M m_H}{\sigma_T} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{1}{r} \frac{h}{r} dr$$
$$\approx L_{Edd} \left(\frac{h}{r}\right) \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{1}{r} dr \approx L_{Edd} \left(\frac{h}{r}\right) \ln\left(\frac{r_{out}}{r_{in}}\right). \tag{5.14}$$

ここで、h/r = const. と近似した。 $\ln(r_{out}/r_{in})$ は~10であるので、幾何学的に薄い標準降着円盤の場合 ($h/r \approx 0.1$)、 $L_{disk} \leq L_{Edd}$ となることがわかる。

一方、ディスクが幾何学的に厚くなると $(h/r \approx 1)$ 、 $L_{disk} \leq 10L_{Edd}$ となり、エディントン限界光度を超えられる。そのような「スリムディスク」が、 10^{39-41} erg/sという光度を持つ Ultra Luminous X-ray sources (ULXs)の起源ではないかと考えられている。

5.8 標準降着円盤の温度の半径依存性

標準降着円盤の「構造」は粘性パラメーター α によるが、光学的に厚い輻射を考える限り は、そこからの輻射は (幸い) α に依らない。これは、M, M などの重要な物理パラメーター を、 α という不定量に左右されずに、X 線観測から制限をつけられるということを意味して いる。一方、X 線観測から α に制限をつけるのは困難である。

物がディスク中で dr 落ちる間に、解放される重力ポテンシャルの半分 (ビリアル定理) が熱化され、ディスクの両面から黒体輻射で放出されるとすると、

$$2 \cdot 2\pi r \, dr \, \sigma T_{eff}^4 \propto \frac{1}{2} d \left(-\frac{GM\dot{M}}{r} \right) = \frac{GM\dot{M}}{2 \, r^2} \, dr,$$
$$T_{eff}(r) \propto \left(\frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$
(5.15)

上式は半径依存性は正しいが、境界条件を入れていないため、ファクターは正しくない。内縁の境界条件 (内縁で温度=0) を入れた正確な式は、

$$T_{eff}(r) = \left(\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3} \left(1 - \sqrt{r_{in}/r}\right)\right)^{1/4}.$$
 (5.16)

内縁のごく近傍からの輻射は観測には効かない (温度が低く面積も小さいため) ので、光学 的に厚い標準円盤では、ディスクの有効温度の半径依存性は r^{-3/4} であることを覚えておく と良い³。

³質量降着率が上がって「スリムディスク」になると、それに伴い指数が -0.75 から -0.5 まで変化する。

5.9 Multicolor disk blackbody モデル

ディスクが半径に応じた温度の黒体輻射をしている場合を考える。内縁の境界条件を無視し、 温度の半径依存性を $r^{-3/4}$ とする。すなわち、内縁半径と温度をそれぞれ r_{in},T_{in} として、

$$T(r) = T_{in} \left(r/r_{in} \right)^{-3/4}.$$
(5.17)

この円盤の光度を求めてみよう。円盤の表と裏を考慮して、

$$L_{disk} = 2 \int_{r_{in}}^{r_{out}} 2\pi r \sigma T(r)^4 dr$$

= $4\pi \sigma T_{in}^4 r_{in}^3 \int_{r_{in}}^{r_{out}} r^{-2} dr$
= $4\pi \sigma T_{in}^4 r_{in}^3 (1/r_{in} - 1/r_{out}) \approx 4\pi \sigma r_{in}^2 T_{in}^4.$ (5.18)

5.10 ブラックホールの周りの降着円盤の温度

シュワルツシルド時空では、3 R_s より内側では安定な円軌道が存在しないことが知られている⁴。よって、通常、ブラックホールの周りの降着円盤の内縁の半径は3 R_s である。実際には 円盤の温度は半径に依存するわけだが、非常に大雑把に、内縁付近の円盤の面積を $\pi(3R_s)^2$ と仮定し、質量 M の天体のエディントン限界光度における降着円盤温度を見積もることに しよう。もっとも単純な場合として、降着円盤が黒体輻射をしていると仮定する(表と裏で 二倍する)。

$$L_{Edd} = \frac{4\pi \, c \, GM}{\kappa} \approx 2\pi \, (3R_s)^2 \, \sigma \, T^4 \tag{5.19}$$

より温度を求めると、

$$T \approx \left(\frac{c^3}{9\sigma\kappa}\right)^{1/4} \left(\frac{2GM_{\odot}}{c^2}\right)^{-1/4} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-1/4} \approx 1 \text{ keV } \left(\frac{M}{10 M_{\odot}}\right)^{-1/4}.$$
 (5.20)

よって、最大光度 (エディントン限界) で光っている質量 ~ $10M_{\odot}$ のブラックホールの 周りの降着円盤は、~ 1 keV の温度を持つので、X 線領域で観測されることがわかる。

ブラックホールの質量が大きいほど、降着円盤の温度が低くなることに注意。たとえば、 太陽の 10⁹ 倍の質量を持つブラックホール⁵の降着円盤の温度は ~ 10 eV となり、これは紫 外線領域で観測される。

⁴これこそ、運動方程式を一般相対論的に解かないと出てこない。相対論の教科書を参考にしてください。 ⁵このような巨大ブラックホールが、活動的銀河中心核 (Active Galactic Nuclei; AGN) の正体と考え られている。