

試験問題

2011 年 2 月 7 日 17:00 – 18:30 (1323 教室)

以下の四角の中に入る数値、数式、または語句を解答用紙に記入せよ。有効数字が指定されている時はそれに従うこと。

問 1. 宇宙を記述する定数と理論

四角の中に、以下の語句から適当なものを入れよ。{ 重力定数 G 、光速 c 、プランク定数 h 、特殊相対性理論、一般相対性理論、ニュートン力学、量子力学、量子重力理論、標準理論、ビッグバン }

高校で学んだ「ニュートン力学」では、基礎的な方程式に「重力定数 G 」は入ってきても、「光速 c 」は入ってこなかった。これは重力によって生じるモノの速さが「光速 c 」に比べてはるかに小さい場合のみを扱ってきたからである。「光速 c 」に近い速さでモノが動く状況を記述するには、「特殊相対性理論」が必要になり、そこには「光速 c 」が出てくる。しかし、そこでは重力は扱っていないので、「重力定数 G 」は出てこない。重力によって生じるモノの速さが「光速 c 」に比べて無視できない場合を扱うのが、「一般相対性理論」で、その基本方程式には「重力定数 G 」と「光速 c 」の両方が出てくる。ただし、「一般相対性理論」は巨視的な世界を扱う理論なので、そこには「プランク定数 h 」は出てこない。

「プランク定数 h 」は、小さなスケールに於ける物理現象を記述する「量子力学」に出てくる。ただし、その基本方程式(シュレディンガー方程式)には「プランク定数 h 」はでてくるが、「重力定数 G 」も「光速 c 」も出てこない。これは、素粒子が光速に近い速度で動いていることを考慮せず、また素粒子同士の重力を考慮していないからである。実際には、素粒子は光速に近い速さで運動しているので、「量子力学」に「特殊相対性理論」の効果を考慮する必要がある、その基本方程式(ディラック方程式)には必然的に「光速 c 」と「プランク定数 h 」が出てくる。

その後、素粒子論は発展し、現在では、自然界に存在する四つの力、電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用、重力相互作用のうち、重力相互作用をのぞく三つを統一する可能性がある「標準理論」(「光速 c 」と「プランク定数 h 」を用いて記述される)が研究されている(2008 年のノーベル物理学賞の対象となった小林・益川理論もその骨格をなす)。

さらに、素粒子間の重力まで考慮に入れて、4 つの相互作用を統一的に説明する理論、「重力定数 G 」、「光速 c 」、「プランク定数 h 」が同時に出てくる理論はあるのだろうか? そのような「量子重力理論」はまだ存在しない。また、そのような理論の検証には、言ってみれば素粒子間に働く重力の測定が必要であり、それは地上ではほぼ不可能である。それが実現しているのは、この宇宙では「ビッグバン」の瞬間にしかないわけで、必然的に素粒子論の研究は、「ビッグバン」の起源を探る研究になる。

重力が存在しない四次元時空においては二点間の世界距離は場所に依らず一定であり、二つの座標系のあいだの変換は回転で表される。そのような、重力が存在せず、曲がっていない時空を記述するのが「特殊相対性理論」である。一方、重力が存在する時空は曲がっている。座

標系によって四次元時空間の距離は違い、二つの座標系のあいだの変換は回転で表せない。そのような、重力が存在し、曲がっている時空を記述するのが「一般相対性理論」である。

以下では、本講義で学んだニュートン力学、特殊相対性理論、一般相対性理論を順に復習していこう。

問 2. ニュートン力学 — ケプラーの三法則

17世紀、ケプラーは膨大な惑星の観測データから経験的に、惑星の運行に関する以下の三つの法則を発見した。

第一法則:惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く。

第二法則:惑星は単位時間の間に一定の面積速度を掃く。

第三法則:惑星の公転周期の二乗は軌道長半径の三乗に比例する。

これらは、以下に見るとおりニュートン力学を用いて数学的に導くことができる(以下で、 m は惑星の換算質量、 $\mathbf{r}$ は太陽に相対的な惑星の位置を示す)。

まず、運動方程式をたてる。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (1)$$

であるが、動径方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r$ とそれと直交する単位ベクトル $\mathbf{e}_\theta$ を基底する極座標で考える。惑星の速度ベクトルは $d\mathbf{r}/dt = d(r\mathbf{e}_r)/dt = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ で表される。さらにそれを微分して、

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]\mathbf{e}_r + [r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}]\mathbf{e}_\theta \quad (2)$$

よって、運動方程式を動径方向、角度方向に分解して書きくすると、それぞれ、

$$m[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] = -\frac{GMm}{r^2} \quad (3)$$

$$m[r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}] = 0 \quad (4)$$

となる。角運動量 h は、 $m, r, \dot{\theta}$ を用いて

$$h = [mr^2\dot{\theta}] \quad (5)$$

と書けるので、(4) は

$$\frac{1}{r} \frac{dh}{dt} = 0 \quad (6)$$

と書ける。つまり角運動量保存則が得られるが、角運動量は単純に面積速度の $[2m]$ 倍であるので、これは面積速度保存の法則、つまりケプラーの第二法則に他ならない。

また、(3) は、(5) を用いて $\dot{\theta}$ の代わりに h を用いて表すと、

$$m\ddot{r} - \left[\frac{h^2}{mr^3}\right] = -\frac{GMm}{r^2} \quad (7)$$

とかける。 $\dot{r} = dr/dt = v_r$ であることに注意して、上式を積分すると、

$$\frac{m}{2} v_r^2 + \left[\frac{h^2}{2mr^2}\right] - \frac{GMm}{r} = E \quad (8)$$

が得られる ($\frac{h^2}{2mr^2}$ は r, m, h で表すこと)。ここで、積分定数を E とした。これは、エネルギー保存則に他ならない。

ここで (5) から、

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{h}{mr^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (9)$$

よって、独立変数を時刻 t から θ に変換して (8) は、

$$\frac{m}{2} \left(\frac{h}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{h^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E \quad (10)$$

と書ける。この微分方程式が r と θ の関係を与えるので、 r を θ の関数として求めれば、惑星の軌道が求められたことになる。ここで、 $1/r = u$ と変数を変換すると、この微分方程式は、ただちに積分可能な以下の形に書ける。

$$\pm \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{h^2} + \frac{G^2 M^2 m^4}{h^4} - \left(u - \frac{GMm^2}{h^2}\right)^2}} = d\theta. \quad (11)$$

ここで積分公式、 $\int dx/\sqrt{a^2 - x^2} = \cos^{-1}(x/a)$ を用いて、

$$\pm \cos^{-1} \frac{u - \frac{GMm^2}{h^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{h^2} + \frac{G^2 M^2 m^4}{h^4}}} = \theta. \quad (12)$$

よって、

$$r = \frac{\frac{h^2}{GMm^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2 M^2 m^3}} \cos \theta}. \quad (13)$$

ここで、

$$l \equiv \frac{h^2}{GMm^2}, \quad (14)$$

$$e \equiv \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2 M^2 m^3}} \quad (15)$$

と定義すれば、(13) は、

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta}. \quad (16)$$

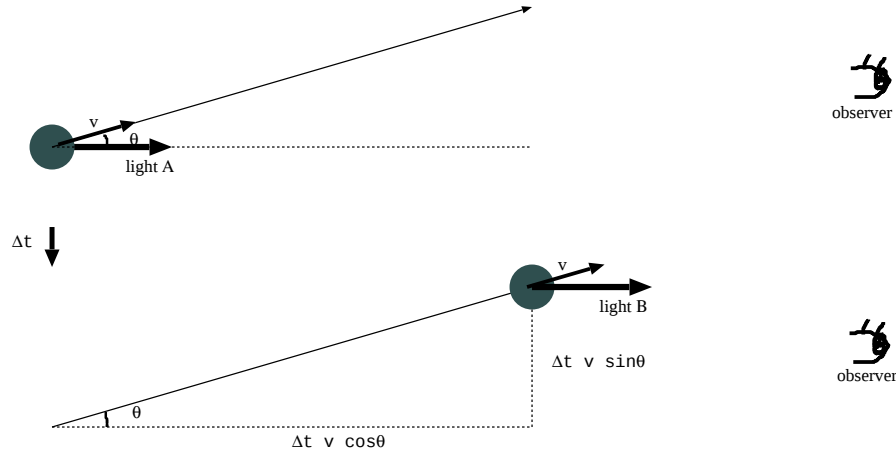
と書ける。これは原点 (太陽) を焦点の一つとする円錐曲線の式で、 e は離心率、 l は半直弦と呼ばれる。 $e < 1$ 、つまり全エネルギー E が負の時、惑星は楕円を描く。よって、ケプラーの第一法則が示された。

楕円軌道の長半径を a 、短半径を b とする。楕円の面積を a, b で表すと πab であり、面積速度を h, m で表すと、 $h/2m$ である。ケプラーの第二法則より面積速度は一定だから、楕円の面積を面積速度で割ると周期 T が得られ、それを a, b, h, m で表すと $2m\pi ab/h$ となる。一方、楕円上の点は二つの焦点からの距離の和が $2a$ で一定である。それから b を a と e を用いて表す

と、 $b = \boxed{a\sqrt{1-e^2}}$ となる。さらに (16) を用いて、 e を消去し、 b を a と l で表すと、 $b = \boxed{\sqrt{al}}$ となる。 l として、(14) を代入すると、 $\boxed{\frac{h}{m}\sqrt{\frac{a}{GM}}}$ となる。これから T を a と M で表すことができ、 $T = \boxed{\frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}}$ が得られる。これが、軌道長半径の $\boxed{3}$ 乗が周期の $\boxed{2}$ 乗に比例する、というケプラーの第三法則に他ならない。

問 3. 超光速運動

特殊相対性理論によると、光速 c は有限で、それはどの観測者にとっても同じ値である。光速の有限性により、「超光速運動」のような一見不思議な現象を理解することができる。これは、活動銀河が電波を放出し、それがジェットのように中心天体から吹き出すように見える際に、それが天球上で中心天体から離れていく速度が光速をはるかに超えているように見える現象である。



上図は、ブラックホールからジェットが放出された瞬間 (速度 v 、観測者に対する角度 θ)、下図がそれから Δt 経過したところである。前者の時刻に放出された光を light A、後者の時刻に放出された光を light B としよう。天体から観測者までの距離を D とすると、観測者が light A を受け取る時刻は、light A が発せられてから $\boxed{D/c}$ 後である。一方、light B を受け取るのは、 $\boxed{\Delta t + (D - v\Delta t \cos \theta)/c}$ 後である。よって、観測者が light A を受けてから light B を受けるまでの経過時間は、 $\boxed{\Delta t(1 - \cos \theta v/c)}$ となる。また、観測者にとっては、ジェットが視線方向と垂直に $\boxed{\Delta t v \sin \theta}$ だけ移動したように見える。よって、視線方向と垂直の見かけの速度は、

$$v_{app} = \boxed{\frac{v \sin \theta}{1 - (v/c) \cos \theta}} \quad (17)$$

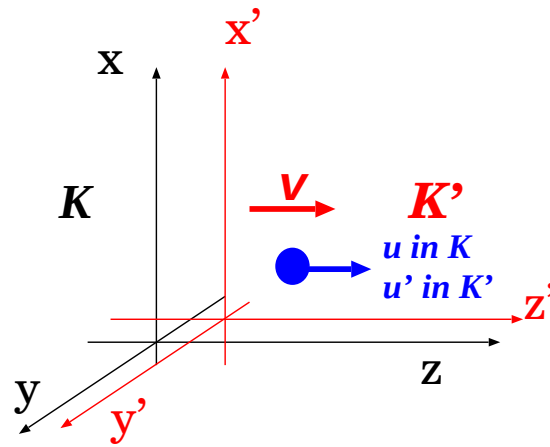
となる。これを θ で微分して、それがゼロになる θ の値を求めると、 $\cos \theta = \boxed{v/c}$ のときに v_{app} が最大値

$$v_{app}^{(max)} = \boxed{\frac{v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}} \quad (18)$$

を取ることがわかる。 v が c に近くなると、 $v_{app}^{(max)}$ が c よりも大きくなりうること、特に、 $v \rightarrow c$ の極限では、 $v_{app}^{(max)} \rightarrow \infty$ であることがわかるだろう。

問 4. 特殊相対性理論 — ローレンツ変換、速度の変換則、ドップラー効果

下図のように K' 系が K 系に対して、 $+z$ 軸方向に K 系から見た速度 v で動いているとする。



このとき、 K 系における世界座標 (x, y, z, ict) と K' 系における世界座標 (x', y', z', ict') との間のローレンツ変換は、 i, β, γ を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\gamma} & \boxed{i\gamma\beta} \\ 0 & 0 & \boxed{-i\gamma\beta} & \boxed{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} \quad (19)$$

で表される。ここで、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, $\beta = v/c$ である。この表記では虚時間を導入したことにより、変換行列が直交行列になっていることに注意しよう。

物体の速度がローレンツ変換によってどのように変換されるか、考えてみよう。一般に物体の速度ベクトルを (u_x, u_y, u_z) 、その大きさを u , $\gamma_u \equiv 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ とするとき、 $\gamma_u(u_x, u_y, u_z, ic)$ はローレンツ変換にしたがう四元ベクトル (四元速度) であることが知られている。簡単のため、上図のように物体の運動は $+z$ 軸、 $+z'$ 軸の向きで、 K 系で測定した速さを u , K' 系で測定した速さを u' としよう。四元速度は (19) と同じローレンツ変換に従う。これから、 u' を u, v, c について解くと、

$$u' = \boxed{\frac{u-v}{1-vu/c^2}} \quad (20)$$

となる。これが速度の変換式である。日常生活における速度は光速に比べてはるかに小さいので、この場合は $c \rightarrow \infty$ と近似してよい。この場合は

$$u' = \boxed{u - v} \quad (21)$$

という見慣れた式になる。 $u = c$ のときは、 v の値にかかわらず

$$u' = \boxed{c} \quad (22)$$

である (光速不変の原理)。

次に、電磁波の伝播を考えると、電磁波の波数ベクトルを $\mathbf{k}$ ($|\mathbf{k}| = \omega/c$)、角振動数を ω とすると、 $(\mathbf{k}, i\omega/c)$ は四元ベクトルである。よって、これは式 (19) と同じ変換に従う。

波数の定義から $|\mathbf{k}| = \omega/c$ 、 $|\mathbf{k}'| = \omega'/c$ である。ベクトル $\mathbf{k}$ は yz 平面上にあり、電磁波

が進む向きと z 軸、 z' 軸のなす角をそれぞれ θ, θ' とすると、 $k_y = (\omega/c) \sin \theta$ 、 $k'_y = (\omega'/c) \sin \theta'$ 、 $k_z = (\omega/c) \cos \theta$ 、 $k'_z = (\omega'/c) \cos \theta'$ である。よって、4 元ベクトルの変換の第 2,3,4 成分を書きくだすと、

$$\omega' \sin \theta' = \boxed{\omega \sin \theta} \quad (23)$$

$$\omega' \cos \theta' = \boxed{\omega \gamma (\cos \theta - \beta)} \quad (24)$$

$$\omega' = \boxed{\frac{\omega}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)} \quad (25)$$

となる。式 (23) と (24) の比を取ると、

$$\tan \theta' = \boxed{\frac{\sqrt{1-(v/c)^2} \sin \theta}{\cos \theta - v/c}} \quad (26)$$

が得られる。式 (25) は、光のドップラー効果に他ならない。 $v \ll c$ のとき、 $(v/c)^2$ の項を無視すれば、これは

$$\omega' = \boxed{\omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)} \quad (27)$$

となり、音波の場合と同じように、非相対論的なドップラー効果を表す。 $(v/c)^2$ の項を無視できないとき、式 (25) で、 $\theta = \pi/2$ 、光源が視線方向と垂直に運動しているときにも波長が変化することに注意。これを横ドップラー効果と呼ぶ。

問 5. 一般相対性理論 — Global Positioning System (GPS)

質量 M の天体のシュワルツシルド半径は、 c, G, M を使って、 $\boxed{2GM/c^2}$ と表される。太陽のシュワルツシルド半径は $\boxed{3}$ km である。地球のシュワルツシルド半径は $\boxed{9}$ mm であり、その半径約 6400 km よりもはるかに小さいので、地球周辺の物理現象の解釈において、通常は一般相対論の効果を無視しても良い。ただし、GPS (Global Positioning System) においては、人工衛星と GPS 受信機との間の光の伝達時間からその距離を非常に精密に測定しているので、地球上と衛星上の重力の違いによる時間の進み方の違いを考慮する必要がある。

地球の中心から十分遠方の仮想的な観測者の用いる座標を r, t, ϕ とする。地球の中心から半径 r のところ（地表または GPS 衛星）で回転運動している ($dr = 0$) 観測者の計る固有時間を $d\tau$ とする。シュワルツシルドメトリックを用いて、

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) dt^2 - r^2 d\phi^2 \quad (28)$$

と書ける。よって、

$$\begin{aligned} c^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 &= c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \\ &= c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) - v^2. \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 v は観測者の速度である。地球表面の観測者の固有時間を $d\tau \equiv dt_{\text{earth}}$ 、人工衛星上の観測者の固有時間を $d\tau \equiv dt_{\text{satellite}}$ とすると、(29) を、地表と GPS 衛星について比を取って、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{satellite}}\right) - (v_{satellite}/c)^2}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{earth}}\right) - (v_{earth}/c)^2}}. \quad (30)$$

この式が、地表における時間と、GPS 衛星における時間の進み方のずれを表す。(30) の右辺の値を求めよう。ここで、地球のシュワルツシルド半径が地球の半径よりもはるかに小さいこと、人工衛星の速度が光速よりもはるかに小さいことを用いて、(30) は以下のように近似できる (□には式を入れること)。

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} = 1 + \left[-\frac{GM/c^2}{r_{satellite}} - (v_{satellite}/c)^2/2 + \frac{GM/c^2}{r_{earth}} + (v_{earth}/c)^2/2 \right]. \quad (31)$$

$\frac{2GM/c^2}{r_{satellite}}$ と $\frac{2GM/c^2}{r_{earth}}$ 、 $(v_{satellite}/c)^2$ と $(v_{earth}/c)^2$ はどれも微小な量であるが、(31) は、それらの差が GPS のような精密な測定においては無視できないことを示している。

GPS 衛星の周期が12時間ということから、 $r_{satellite}$ と $v_{satellite}$ を求めよう。それには、前問で得られたケプラーの第三法則と、地球のシュワルツシルド半径が $\boxed{9}$ mm で与えられる事を使えば良い。これによって、

$$r_{satellite} = \boxed{2.7 \times 10^7} \text{ m}, v_{satellite} = \boxed{3.9 \times 10^3} \text{ m/s} \quad (32)$$

である。

まず (31) において、 $v_{satellite}, v_{earth}$ の項は無視して、重力だけによる時間の進み方の違いをみてみよう。地球の半径は、 $r_{earth} \approx 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ だから、 $r_{satellite}$ と r_{earth} を式 (31) に代入して (□には数値を有効数字一桁で入れよ)、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx 1 + \boxed{5 \times 10^{-10}} \quad (33)$$

が得られる。重力の影響により、この割合で人工衛星上の時計の方が、地表の時計よりも速く進むのである。さらに、人工衛星と地表の運動の速さの違いを考慮しよう。すでに特殊相対論で学んだように、「速く進む時計の時間はゆっくり進む」。よって、人工衛星の速さと地表の速さの違いを考慮すると、時間の進み方のずれは式 (33) より小さくなるはずである。地表における自転の速度 v_{earth} は緯度に依存するが、南極、北極では $v_{earth} \approx 0$ だから、ここでは v_{earth} を無視し、 $v_{satellite}$ だけを考慮することにしよう。(32) を使って、(31), (33) から ($\boxed{8}$ には数値を有効数字一桁で入れよ)、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx 1 + \boxed{4 \times 10^{-10}} \quad (34)$$

となる。一日で、このずれは $\boxed{35 \text{ マイクロ}}$ 秒になる。その間に、光は $\boxed{10}$ km も進むので、ここで考察したような地表と人工衛星における時間の進み方の違いを考慮しないと、GPS は全く使い物にならないことがわかるだろう。