

## 1 座標変換

天球上の位置を表すための座標系として、赤道座標系、黄道座標系、銀河座標系がある。それらの間の座標変換を考えてみよう。まず、赤道座標系で、Z 軸が天の北極、X 軸が春分点を向いている、XYZ 軸（基準軸）を考える。

**1-1:** 赤道座標系の基準軸を、黄道座標系の基準軸（=X 軸は春分点を、あらたな Z 軸が黄北極 (NEP) を指している）に変換するにはどうしたら良いか？ただし、赤道面に対する黄道面の傾きを 23.44 度とする。

**X 軸のまわりに 23.44 度回転する。**

**1-2:** 赤道座標系の基準軸を、銀河座標系の基準軸（=X 軸が銀河中心を指し、XY 平面が銀河面に対応している）に変換するにはどうしたら良いか？ただし、銀河中心の赤経、赤緯を  $(\alpha, \delta) = (266.^\circ 41, -28.^\circ 94)$ 、赤道面に対する銀河面の傾きを  $58.^\circ 60$  とする。

**Z 軸のまわりに 266.41 度、次に Y 軸の周りに 28.94 度、最後に X 軸のまわりに 58.60 度回転する。**

## 2 人工衛星の姿勢

人工衛星の姿勢を表すために、オイラー角が用いられる。これは、人工衛星の X 軸が春分点、Z 軸が天の北極を向いている状態を初期姿勢とし、Z 軸の周りに  $\phi$ 、新たな Y 軸の周りに  $\theta$ 、さらに新たな Z 軸の周りに  $\psi$  という連続した回転を行い、それによって得られた姿勢を  $(\phi, \theta, \psi)$  の組で表すものである。

**2-1:** +Z 軸が望遠鏡の向き、+Y 軸が太陽パネルの向きとしよう。 $(\phi, \theta, \psi)$  のオイラー角で与えられる姿勢で観測するとき、望遠鏡が指している天体の赤経、赤緯は何か？

**赤経、赤緯を  $(\alpha, \delta)$  とすると、 $\alpha = \phi, \delta = 90 - \theta$ 。**

**2-2.** 焦点面検出器によって得られた画像を、通常通り、北を上向きにして表示しよう。その際、検出器の Y 軸 (DETY) の傾きを、北から反時計回りに測った角度を「ロール角」と定義する。ロール角と第 3 オイラー角  $\psi$  の関係を示せ。

**ロール角 =  $90 - \psi$**

**2-3.** 太陽パネルは太陽を向いていなくてはならないので、+Y 軸は常に太陽方向を向いている必要があるが、+Y 軸のまわりの回転は自由である。これによって、観測できるターゲット (+Z 軸が指す方向) が季節によって変わる。ただし、黄北極 (NEP)、黄南極 (SEP) は、通年観測できることに注意しよう。NEP を観測する場合を考える。「春分」、「夏至」、「秋分」、「冬至」の際、NEP を観測するオイラー角をそれぞれ示せ。

**春分 : (270, 23.44, 0 )**

**夏至 : (270, 23.44, 90 )**

**秋分 : (270, 23.44, 180 )**

**冬至 : (270, 23.44, 270 )**

### 3 人工衛星の軌道

3-1. ケプラーの第三法則を用いて、人工衛星の軌道長半径 ( $a$ ) と周期 ( $P$ ) の関係を、具体的な数値を入れて導け。

$$T = 95 \text{ min.} (a/6900 \text{ km})^{3/2}.$$

3-2. 人工衛星の軌道と、与えられた時刻 (エポック) における軌道上の位置は、6 つのパラメーターで記述できる (軌道六要素)。それらを説明せよ。

1.  $a$ : 軌道の大きさを表す**軌道長半径** (semi-major axis)。円軌道のときは、円の半径。その代わりに、一日辺りの周回数である **mean motion** を用いることもある。
2.  $e$ : 軌道が円からどれだけずれているかを示す**離心率** (eccentricity)  $e = 0$  は円軌道。
3.  $i$ : **軌道傾斜角** (inclination)。地球の赤道面と人工衛星の軌道面がなす角度。
4.  $\Omega$ : **昇交点赤経** (right ascension of the ascending node)。  $i \neq 0$  のとき、地球の赤道面と人工衛星の軌道
5.  $\omega$ : **近地点引数** (argument of perigee)。楕円軌道の場合、昇交点から測って近地点が軌道面上のどこに来るかを表わす。  
以上 5 つのパラメーターで軌道は決まる。
6.  $M$ : **平均近点離角** (mean anomaly)。与えられたエポックにおける人工衛星の軌道上での位置を表す。

以下、各 番号 に入る数字または語句を答えよ。番号の後に複数の語句が示されているときは、正しいものを選択せよ。また、説明が求められているところでは、番号を記した後

に説明を記述せよ。

### 4 ブラックホール

質量  $M$ 、球対象で回転していない天体を考える。その周りの重力場はシュワルツシルドメトリックで表され、十分遠方の観測者が乗っている座標を  $r, \phi, t$  とすると、

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\phi^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 \quad (1)$$

と書ける。 $r_s$  が、質量  $M$  の天体のシュワルツシルド半径であり、それは光速  $c$ 、万有引力定数  $G$ 、 $M$  を用いて、 $r_s = \boxed{2GM/c^2}$  と書ける。太陽についてその値は 3 km、地球については、9 mm である。

ブラックホール自身は光を出さないわけだが、仮にブラックホールとその周辺の降着円盤を「撮像」したら、降着円盤の中にぽっかりと穴が開いたような「ブラックホールシャドウ」が見えるだろう。ここでは単純に、シュワルツシルド半径をブラックホールシャドウの半径だと考えて、その見かけの広がりを見積もってみよう。私たちの銀河の中心までの距

離は 8 kpc であり、そこには質量 370 万  $M_{\odot}$  のブラックホールが存在する。その見かけ上の広がり、約  $10\mu$  秒角である。波長  $\lambda$ 、基線長  $D$  を持つ電波干渉計において、その位置分解能をおおまかに  $\lambda/D$  で見積もることが出来る。波長  $\lambda = 1\text{cm}$  の電波で観測するとき、 $D = 2 \times 10^5$  km であれば、原理的にそのようなブラックホールを分解できることになる。実際、そのような電波干渉計が提案されており、より短い観測波長、より長い基線長を目指して開発が進められている。

ニュートン力学では、質量  $M$  の天体の周りの安定円軌道について、その最小半径は存在しない。一方、一般相対性理論ではブラックホールの周りの質点の運動を解くと安定な円軌道の最小半径 (Innermost Stable Circular Orbit; ISCO) が、ブラックホールの角運動量  $a$  ( $0 \leq a \leq 1$ ) の関数として得られる。回転していないブラックホールの周辺、シュワルツシルド時空の場合 ( $a = 0$ )、 $R_{ISCO} = 6GM/c^2$  である。ブラックホールの回転と円運動の方向が一致しているときは、 $a$  とともに  $R_{ISCO}$  は減少し、角運動量最大 ( $a = 1$ ) のとき、 $R_{ISCO} = GM/c^2$  である。

無限遠から質量  $m$  の物質が角運動量を受けて (渦を巻いて) 落ち込んでいき、降着円盤を作り、最終的に  $R_{ISCO}$  に達すると考える。簡単のためにニュートン力学で考えると、その場における全エネルギーを  $G, M, m, R_{ISCO}$  を用いて、 $E = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R_{ISCO}}$  と書ける。よって、単位時間あたり  $\dot{m}$  の質量の物質が落ちるとき、円盤の光度は、 $L_{disk} \approx \frac{1}{2} \frac{GM\dot{m}}{R_{ISCO}}$  となる。 $R_{ISCO}$  として、シュワルツシルドブラックホールの場合、極端なカーブラックホール ( $a = 1$ ) の場合、それぞれについて [6]、[7] を代入し、

$$L_{disk} \approx \frac{1}{12} \dot{m} c^2 \text{ (Schwarzschild black hole)} \quad (2)$$

$$L_{disk} \approx \frac{1}{2} \dot{m} c^2 \text{ (Extreme Kerr black hole)} \quad (3)$$

が得られる。厳密に、一般相対論的な計算によると上記の係数 (エネルギー効率) はそれぞれ、 $1 - \sqrt{8/9} \approx 0.057$ ,  $1 - \sqrt{1/3} \approx 0.42$  であるが、ニュートン近似でも大まかな値が見積もれることがわかる。

一方、熱核融合反応の時、水素が鉄に達するまでの平均で、エネルギー効率は 0.009 である。ブラックホールへ物質が落ち込む際の重力エネルギーの解放が非常に効率的であることを理解しよう。

## 5 エディントン限界光度と黒体輻射

$\kappa_T$  をトムソン散乱による質量吸収係数 ( $\sim 0.4 \text{ cm}^2/\text{g}$ ) とする。質量  $M$  の天体が球対象で X 線放射をしているとき、そのエディントン限界光度  $L_{Edd}$  を導出し、 $c, G, M, \kappa_T$  で表せ [1]。ただし、元素は水素のみを仮定する。具体的な数字を入れると、

$$L_{Edd} \approx 10^{38} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) [\text{erg/s}] \quad (4)$$

である。これから、質量  $1M_{\odot}$ 、半径 10km の中性子星がエディントン限界光度で黒体輻射をしているとき、その温度は  $2 \text{ keV}$  となる。これは典型的な X 線バーストに対応する。また、質量  $1M_{\odot}$ 、半径 5000 km の白色矮星がエディントン限界光度で黒体輻射をしているとき、その温度は  $0.08 \text{ keV}$  となる。ここで、ステファンボルツマン係数、 $\sigma \approx 1 \times 10^{24} \text{ erg/s/cm}^2/\text{keV}^4$  を用いよ。非常に低温のスペクトルを持つ Super-soft Source の起源は、そのような黒体輻射をしている白色矮星だと考えられている。

## 6 降着円盤

質量  $M$  のブラックホールの周りの、光学的に厚い標準降着円盤を考える。物質は質量降着率  $\dot{M}$  でブラックホールに落ちていくとする。物質が  $dr$  落ちる間に解放される重力エネルギーの半分が熱化され、ディスクの両面から黒体輻射で放出されると考えると、ディスクの温度の半径依存性は、 $G, M, \dot{M}, \sigma$  を用いて、

$$T(r) \approx \left( \frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4} \quad (5)$$

と書ける。ただし、ここでは内縁の境界条件を無視して単純化している。これを、内縁半径を  $r_{in}$ 、温度を  $T_{in}$  として、

$$T(r) = T_{in}(r/r_{in})^{-3/4} \quad (6)$$

と書く。ディスクの両面が黒体輻射をしていることを考慮し、 $r_{in}$  から  $r_{out} (\gg r_{in})$  まで積分し、ディスクの光度は、 $\sigma, r_{in}, T_{in}$  を用いて、

$$L_{disk} \approx 4\pi\sigma r_{in}^2 T_{in}^4 \quad (7)$$

と表される。

降着円盤の内縁が、前節で述べた  $R_{ISCO}$  だとしよう。また、降着円盤はエディントン限界光度を仮定する。すると、降着円盤の内縁半径は質量  $M$  だけの関数となり、シュワルツシルド時空（回転していないブラックホール）の場合は、

$$T_{in} \approx 1 \text{ keV} \left( \frac{M}{10M_{\odot}} \right)^{-1/4} \quad (8)$$

となる。よって、最大光度（エディントン限界）で光っている質量  $\sim 10M_{\odot}$  のブラックホールの周りの降着円盤は、 $1 \text{ keV}$  の温度を持つので、X線領域で観測されることがわかる。ブラックホールの質量が大きいほど、降着円盤の温度が低くなることに注意。たとえば、太陽の  $10^9$  倍の質量を持つ巨大ブラックホールの降着円盤の温度は  $10 \text{ eV}$  となり、これは紫外線領域で観測される。

回転しているブラックホールの場合は、 $R_{ISCO}$  が小さくなるので、同じ円盤光度に対して、 $T_{in}$  の値は、高くなる。実際、質量がわかっているブラックホールに対し、その円盤光度と  $T_{in}$  の測定から  $R_{ISCO}$  を見積もり、ブラックホールのスピンの制限を与える試みが行われている。

なお、厳密にはディスク放射スペクトルは黒体輻射ではなく、その色温度と有効温度の違いを考慮する必要がある。ディスクの表層の高温電子によるコンプトン効果のために、ディスク放射の色温度は有効温度よりも高くなっている。それに気づかずに、ディスク放射を黒体輻射と思ってブラックホールの質量を見積もると、それは実際の質量よりもファクター  $(T_{col}/T_{eff})^2$  だけ小さくなるので、注意が必要である。

理論的には、 $T_{col}/T_{eff}$  の値はディスクの光度や半径に依らず、ほぼ  $\sim 1.7$  で一定である。この値を用いて、ブラックホール連星について、X線観測から見積もったブラックホール質量と、軌道運動の測定から求められた、より信頼できる質量との間に、良い一致が見られる。

以上