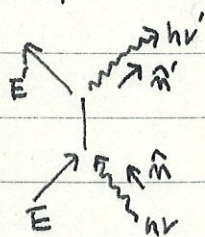


(Katz p. 103)

• Kompaneets equation



$$\begin{cases} h\nu + \frac{p^2}{2m_e} = h\nu' + \frac{p'^2}{2m_e} \\ \frac{h\nu}{c} \cdot \hat{n} + \vec{p} = \frac{h\nu'}{c} \hat{n}' + \vec{p}' \end{cases}$$

 $\Delta \equiv \nu' - \nu$. $\vec{p}'$ を消去, Δ^2 より高次の項は無視.

$$h\Delta = - \frac{h\nu c \vec{p} \cdot (\hat{n} - \hat{n}') + h^2 \nu^2 (1 - \hat{n} \cdot \hat{n}')}{m_e c^2 + h\nu(1 - \hat{n} \cdot \hat{n}') - c \vec{p} \cdot \hat{n}} \quad (1)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{以下の議論に必要なのは分母, 分子の最初の項だけ} \\ h\Delta \approx - \frac{h\nu \vec{p} \cdot (\hat{n} - \hat{n}')}{m_e c} \quad (2) \end{array} \right)$$

Boltzmann equation

$$\frac{\partial n(\nu)}{\partial t} = - \int d^3p \cdot c d\sigma \left[n(\nu) \{1 + n(\nu')\} N(E) - n(\nu') \{1 + n(\nu)\} N(E') \right]$$

 $n(\nu)$: エネルギー $h\nu$ の photon の分布密度, $N(E)$: electron の分布関数 (2+1/2次元分布) $n(\nu') = n(\nu + \Delta)$, $N(E') = N(E - h\Delta)$ を Δ で展開し, Δ^2 より高次の項は無視

$$\rightarrow \frac{\partial n(\nu)}{\partial t} = \frac{h}{kT} \left(\frac{\partial n}{\partial \lambda} + n + n^2 \right) I_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{kT} \right)^2 \left\{ \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} + 2(1+n) \frac{\partial n}{\partial \lambda} + n + n^2 \right\} I_2 \quad (3)$$

$$I_1 \equiv \int d^3p \cdot d\sigma \cdot c N(E) \Delta$$

$$I_2 \equiv \int d^3p \cdot d\sigma \cdot c N(E) \Delta^2$$

②を I_1 の式に代入するとゼロになる。正しい I_1 の値を求めるには①を使う必要がある。しかし積分がむずかしい。 I_1 は別の方法で求める。 I_2 を求めるには②で $\nu + \Delta$

(修正) (求めても Kompaneets eq. は得られる)

$$I_2 = \int d^3p \cdot c d\sigma N(E) \Delta^2 = \left(\frac{\nu}{m_e c} \right)^2 \int c d\sigma d^3p N(E) \{ \vec{p} \cdot (\hat{n} - \hat{n}') \}^2$$

$$= \left(\frac{\nu}{m_e c} \right)^2 \int c d\sigma \cdot d^3p \cdot N(E) \cdot p^2 \cdot |\hat{n} - \hat{n}'|^2 \cdot \cos^2 \psi$$

$$= \left(\frac{\nu}{m_e c} \right)^2 \int c d\sigma |\hat{n} - \hat{n}'|^2 \cdot \int p^2 \cdot \cos^2 \psi \cdot 2\pi \sin \psi d\psi \cdot \int p^2 dp N(E)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{\nu}{m_e c} \right)^2 \int c d\sigma |\hat{n} - \hat{n}'|^2 \int 4\pi p^2 dp N(E) p^2$$

$$n_e \langle p^2 \rangle = 3 k T m_e n_e$$

↓ $\hat{n} \cdot \hat{n}'$

$$I_2 = \left(\frac{\nu}{m_e c}\right)^2 k T m_e m_e c \int d\Omega \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot |\hat{n} - \hat{n}'|^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \{1 + (\hat{n} \cdot \hat{n}')^2\} \quad (\text{Thomson scattering, non-relativistic}) \\ d\sigma/d\Omega, d\Omega \text{ の laboratory frame \& electron frame 間の Lorentz 変換を} \\ \text{無視.} \end{array} \right.$$

$$I_2 = \left(\frac{\nu}{m_e c}\right)^2 k T m_e m_e c \int d\Omega \cdot \frac{1}{2} r_e^2 \{1 + (\hat{n} \cdot \hat{n}')^2\} |\hat{n} - \hat{n}'|^2$$

$$= 2 \left(\frac{\nu}{m_e c}\right)^2 \cdot k T \cdot m_e n_e \sigma_{es} C //$$

一方 photon 数が保存することから Kompaneets eq. は 次のように書けるはず.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{1}{x^2} \frac{\partial (x^2 j)}{\partial x}$$

j は photon の流れ密度. (3) において $\partial^2 n / \partial x^2$ の係数は n 依存性を持っていないので

$$j(n, x) = g(x) \left\{ \frac{\partial n}{\partial x} + h(n, x) \right\} \text{ という形のはず.}$$

$n = (e^{p(a+x)} - 1)^{-1}$ という Bose-Einstein 分布は $\partial n / \partial t = 0$ だから $h(n, x) = n + n^2$.

$$\partial^2 n / \partial x^2 \text{ の係数を比べて, } g(x) = - \frac{k T}{m_e c^2} \cdot n_e \sigma_{es} C x^2$$

よってこれから

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right]$$

$$\text{ただし } y \equiv t \frac{k T}{m_e c^2} \cdot n_e \sigma_{es} C \quad x = \frac{h\nu}{k T}$$

係数の比較から

$$I_1 = \frac{k T}{m_e c^2} \sigma_{es} n_e x (4 - x)$$

Date 1989. 7. 28.

No.

コンプトン効果の意味, コンプトン cooling (Katz P. 110)

$$x = \frac{h\nu}{kT}$$

Kompaneets eq. $\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right]$, $y \equiv t \frac{kT}{mc^2} n_e \sigma_{es} c$

 $n \ll 1$, $x \ll 1$ のとき photon spectrum の時間変化を調べる.エネルギー密度 ϵ_r は

$$\epsilon_r \equiv \frac{2(kT)^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty n(x) \cdot x \cdot 4\pi x^2 dx$$

$$\frac{h^3 c^3}{8\pi (kT)^4} \frac{d\epsilon_r}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty n x^3 dx$$

 $n^2 \epsilon_r$

$$= \int_0^\infty dx x^3 \frac{\partial n}{\partial y} = \int_0^\infty dx x^3 \cdot \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n \right) \right]$$

$$= \int_0^\infty dx x^3 \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n \right) \right]$$

$$= - \int_0^\infty n x^4 dx - \int_0^\infty x^4 \frac{\partial n}{\partial x} dx$$

$$= - \int_0^\infty n x^4 dx + 4 \int_0^\infty n x^3 dx \quad \text{--- ①}$$

部分積分において

$$x^5 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n \right) \rightarrow 0$$

$$x^4 n \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty \end{cases}$$

を仮定した

$$x \ll 1 \text{ とき}$$

$$\approx 4 \int_0^\infty n x^3 dx$$

$$\therefore \frac{d\epsilon_r}{dy} = 4\epsilon_r \quad \therefore \epsilon_r = \epsilon_0 \exp(4y)$$

$$e\text{-folding time} = \frac{t}{4y} = \frac{mc^2}{4kT} \cdot \frac{1}{n_e \sigma_{es} c}$$

①式に $n(x) = n_0 \exp(-x/d)$ という分布を代入する. すると

$$- \int_0^\infty n x^4 dx + 4 \int_0^\infty n x^3 dx = 24 n_0 d^4 (1-d)$$

電子のエネルギー密度を ϵ_e とし, $\frac{d\epsilon_r}{dt} = - \frac{d\epsilon_e}{dt}$, $\epsilon_e = \frac{3}{2} kT_e n_e$ に注意する

①より

$$\frac{d\epsilon_e}{dt} = \frac{8}{3} \epsilon_e \frac{\epsilon_r \sigma_{es}}{m_e c} (d-1)$$

↓ ①より

非常に soft γ photon ($h\nu \ll 1$) に対しては

$$\frac{d\epsilon_e}{dt} = -\frac{8}{3} \epsilon_e \frac{\epsilon_r \sigma_{es}}{m_e c} = -\frac{4kT_e}{m_e c^2} \cdot \epsilon_r \cdot c \cdot \cos \theta$$

となる。この表式は photon spectrum が 非常に soft ($h\nu \ll kT_e$)

である限り, photon spectrum の表式によらずに成り立つ。

(R&L 7.22 式)