[追加問題]

長さ N の数列 $(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$ が与えられたとき，これに対し

$$f_k \equiv \sum_{j=0}^{N-1} x_j \, e^{2\pi ijk/N} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \tag{1}$$

という演算を行い，同じ長さの新たな数列を得ることを考える．ここで，i は虚数単位である $(i^2 = -1)$.

問 1. (1) において，x_j が実数の時,

$$\begin{cases} f_k^* = f_k & (k = 0) \\ f_k^* = f_{N-k} & (k = 1, 2, \cdots, N-1) \end{cases} \tag{2}$$

を示せ．ただし，ここで f_k^* は f_k の複素共役である．

問 2. (a) $N = 8$ とする．以下の 2 つの場合について，(1) を用いて f_k を計算せよ $(k = 0, 1, 2, \cdots, 7)$.

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0) \tag{3}$$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1) \tag{4}$$

(b) $P_k \equiv f_k f_k^*$ と定義する．x_j が実数の時，問 1 より $P_k = P_{N-k}$ である（$k = 1, \cdots, 7$）．数列 (3) と (4) それぞれについて，P_k を k の関数（$k = 0, 1, 2, 3, 4$）として図示せよ．

(c) ここで得られた P_k の意味を考察せよ．