第9回 人工衛星と探査機の軌道、ラグランジュ点

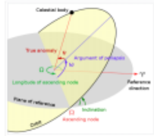
2021年5月18日　11:06

二体問題 ・人工衛星と地球 ・太陽と惑星 → 解析的に解ける!

人工衛星の軌道, 軌道六要素, Two Line Elements (TLE)

1. ケプラーの第一法則（これも導けるようにしておくとよい）から地球を周回する人工衛星の軌道は、地球をひとつの焦点とする楕円になる。人工衛星の軌道を記述する「軌道六要素」の意味を説明せよ

   1 軌道長半径 Semimajor axis (a)
   2 離心率 Eccentricity (e)
   3 軌道傾斜角 Inclination (i)
   4 昇交点赤経 Longitude of the ascending node (Ω)
   5 近地点引数 Argument of periapsis (ω)
   6 近地点通過時刻 True anomaly at the Epoch

   See Wikipedia for explanation

   衛星の軌道を説明する3Dのインタアクティブなグラフィックを作ってみました：
   軌道長半径、離心率、軌道傾斜角、近地点引数の違い orbit.html
   昇交点赤経の違い orbit2.html

2. 人工衛星の軌道のTwo Line Elements (TLE)　とは何か? どこでそれを見つけることができるか？

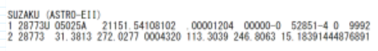
   Go to NORAD!
   https://www.celestrak.com/NORAD/elements/

   See Wikipedia for explanation

   Isanaさんによるわかりやすい説明

   代表的な高エネルギー天文衛星の軌道 (thanks to Isana-san)

   「ひとみ」衛星とそのデブリの軌道

   
   ```
   SUZAKU (ASTRO-EII)
   1 28773U 05025A   21151.54108102  .00001204  00000-0  52851-4 0  9992
   2 28773  31.3813 272.0277 0004320 113.3039 246.8063 15.18391444876891
   ```
   https://celestrak.com/satcat/tle.php?CATNR=28773

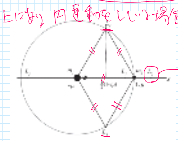
解析的には 一般に解けない → 数値的に解くしかない

円制限三体問題とラグランジェ点

1. 円制限三体問題とラグランジェ点を説明せよ

   重力が平衡になる点

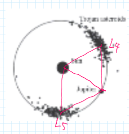
   3体が平面上にあり円運動をしている場合 → 解析的に解ける.

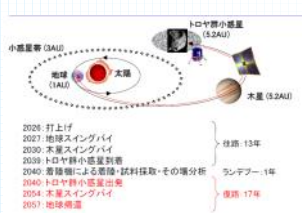
   → いろいろな天文観測装置がある (打ち上げが予定されている)

   Figures taken from https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsee/62/2/62_2_73/_pdf/-char/ja

2. トロヤ群小惑星とは？

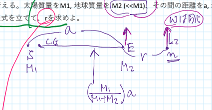
   

3. トロヤ群小惑星を探査する計画は？

   https://jaxa.repo.nii.ac.jp/?action=repository_uri&item_id=8195&file_id=31&file_no=1&nc_session=dq36iq3np1maobutng1cto2qg6

4. 太陽-地球のL2点を考える。太陽質量をM1, 地球質量をM2 (<<M1)、その間の距離をa, 地球からL2までの距離をrとする。L2における運動方程式を立てて、rを求めよ。

   $r \simeq 10^{-2} a$

   $$\cancel{m}\frac{v^2}{\left(\frac{M_1}{M_1+M_2}a+r\right)} = \frac{GM_1\cancel{m}}{(a+r)^2} + \frac{GM_2\cancel{m}}{r^2} \quad (探査機)$$

   $$M_2\frac{v'^2}{\frac{M_1}{M_1+M_2}a} = \frac{GM_1M_2}{a^2}$$

   $$\cancel{M_2}\cdot\frac{1}{\cancel{\frac{M_1}{M_1+M_2}a}}\left(\frac{\cancel{M_1}a}{M_1+M_2}\right)^{\cancel{2}}\omega^2 = \frac{G\cancel{M_1}\cancel{M_2}}{a^2}$$

   $$\omega^2 = \frac{G}{a^2}\cdot\frac{M_1+M_2}{a} = \frac{G(M_1+M_2)}{a^3}$$

   (地球) 地球の回転速度

   $$v' = \frac{M_1}{M_1+M_2}a\cdot\omega$$

   $$v = \left(\frac{M_1}{M_1+M_2}a+r\right)\omega \rightarrow v^2 = \left(\frac{M_1}{M_1+M_2}a+r\right)^2\omega^2 = \left(\frac{M_1}{M_1+M_2}a+r\right)^2\frac{G(M_1+M_2)}{a^3}$$

   探査機の回転速度

   $$v'^2 = \left(\frac{M_1}{M_1+M_2}a\right)^2\omega^2$$

   $$\frac{1}{\cancel{\frac{M_1}{M_1+M_2}a+r}}\cdot\left(\frac{M_1}{M_1+M_2}a+r\right)^{\cancel{2}}\frac{G(M_1+M_2)}{a^3} = \frac{GM_1}{(a+r)^2} + \frac{GM_2}{r^2}$$

   $$\left(\frac{M_1+M_2}{a^3}\right)\cdot\left(\frac{M_1}{M_1+M_2}a+r\right) = \frac{M_1}{(a+r)^2} + \frac{M_2}{r^2}$$

   $r \ll a$

   $(a+r)^2 = a^2+2ar+\cancel{r^2}$

   $(a+r)^2 \fallingdotseq a^2+2ar$

   $\frac{M_2}{M_1} \simeq 10^{-6}$

   $$\frac{r}{a^3}(M_1+M_2) + \frac{M_1}{a^2} = \frac{M_1}{a^2+2ar} + \frac{M_2}{r^2}$$

   $$\frac{r}{a^3}\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right) + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2+2ar} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$$

   $$\left(\frac{r}{a}\right)\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right) + 1 = \frac{1}{1+2\left(\frac{r}{a}\right)} + \left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$$

   $$\underbrace{\left(\frac{r}{a}\right)}_{10^{-2}}\left(1+\cancel{\overset{10^{-6}}{\frac{M_2}{M_1}}}\right)\cdot\left(1+2\cancel{\overset{10^{-2}}{\frac{r}{a}}}\right) + \cancel{1} + 2\overset{10^{-2}}{\left(\frac{r}{a}\right)} = \cancel{1} + \overset{10^{4}}{\left(\frac{a}{r}\right)^2}\overset{10^{-6}}{\frac{M_2}{M_1}}\cdot\left(1+2\right.$$

5. 地球ー月の L2点（Earth-Moon Lagrange Point 2; EML2)に超小型探査機を送る日本の計画を紹介せよ。

6. 現代の国際社会における、地球ー月系のラグランジュ点の戦略的な重要性を考察せよ（防衛省の資料やアメリカのthink tankのレポートなどを参考に)。

Satellite orbits around the L2 point

1. 太陽-地球のL2点に打ち上げられた、または打ち上げ予定の天文衛星(探査機)の例を挙げよ。

$\frac{h}{a} \simeq 10^{-2}$

10^{-2}

$\cancel{\frac{h}{a}}))$

Planck orbit

Nancy Grace Roman Space Telescope orbit

LiteBird (Hazumi-san's presentation at 2020 SPIE) Explanation of the orbit staring at about 5:40

2. L2点周辺の探査機の軌道はどのようになるか？

L2点を中心に回りながら、太陽の周りを周る

Lissajous orbit
リサージュ軌道

https://en.wikipedia.org/wiki/Lissajous_orbit

Hunting for Dark Energy - eRosita X-Ray Telescope
JWST orbit (nice movie and explanation!)

10^{-2} の オーダーまで考えず

10^{4} 10^{-6}

$$\left(\frac{\cancel{r}}{a}\right) + 2\left(\frac{r}{a}\right) = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1}\right)$$

$$\frac{3r}{a} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{M_2}{M_1}$$

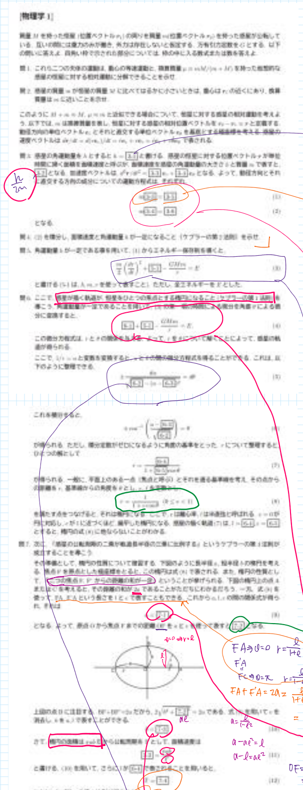
$r \fallingdotseq a ($

$= a($

$=$

ケプラーの法則

東京大学大学院天文専攻入試問題 (H21年度・物理)を解いて、ケプラーの法則を導いてみよう。
第一法則：惑星が描く軌道は、太陽をひとつの焦点とする楕円である
第二法則：惑星が単位時間に掃く面積速度は一定である
第三法則：惑星の公転周期の二乗は軌道長半径の三乗に比例する



$\frac{h}{2m}$

$$\frac{1}{2} r r\dot\theta = \frac{1}{2} r^2 \dot\theta = \text{面積速度} = \frac{h}{2m}$$

$v = r\omega = r\dot\theta$

$$h = m r^2 \dot\theta = m \cdot r \, r\dot\theta$$

$$e_r \quad e_\theta \quad \begin{cases} \dot e_r = \dot\theta e_\theta \\ \dot e_\theta = -\dot\theta e_r \end{cases}$$

$$\boldsymbol{r} = r e_r \qquad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot r e_r + r \dot e_r = \dot r e_r + r\dot\theta e_\theta$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot r e_r + \dot r \dot e_r + \frac{d}{dt}(r\dot\theta) e_\theta + r\dot\theta \dot e_\theta = \ddot r e_r + \dot r \dot\theta e_\theta + (\dot r\dot\theta + r\ddot\theta) e_\theta - r\dot\theta^2 e_r = \underbrace{(\ddot r - r\dot\theta^2)}_{(3\text{-}3)} e_r + \underbrace{(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)}_{(3\text{-}4)} e_\theta$$

$$\begin{cases} m(\ddot r - r\dot\theta^2) = -\frac{GMm}{r^2} \\ \cancel{m}(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) = 0$$

$r^2\dot\theta = $ 一定 → ケプラーの第2法則

角運動量一定

$h = m r^2 \dot\theta$

$$\frac{h^2}{m^2 r^3} = \cancel{m^2} r^{\cancel{4}} \dot\theta^2$$

$$\ddot r - r\dot\theta^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\ddot r - \frac{h^2}{m^2 r^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) - \frac{h^2}{m^2 r^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) \cdot dr + \frac{h^2}{2m^2}\frac{1}{r^2} = +\frac{GM}{r} + C$$

$$\int \frac{d}{\cancel{dt}}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{dr}{dt} \cancel{dt}$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{h^2}{2m r^2} - \frac{GMm}{r} = E$$

https://www.isas.jaxa.jp/home/ebisawalab/ebisawa/TEACHING/Komaba/Komaba.pdf p.75より

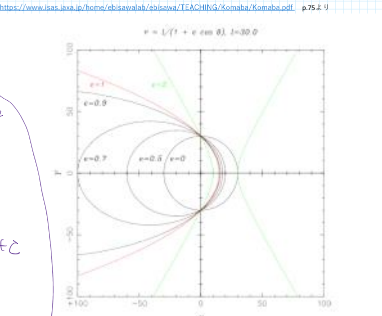


Figure 8.4: 同じ円錐曲線 $r = l/(1 + e\cos\theta)$ で、離心率 e を 0 (円), 0.5, 0.7, 0.9 (楕円), 1.0 (放物線), 2.0 (双曲線) と変化させたもの。半直弦 l が、円の場合は半径に対応していることに注意。

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot\theta \frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\boxed{\frac{m}{2}\left(\frac{h}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{h^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E}$$ total energy

$\theta = 0 \Rightarrow r = l$

$$FA \Rightarrow \theta = 0 \quad r = \frac{l}{1+e}$$

$$F'A = FC \Rightarrow \theta = \pi \quad r = \frac{l}{1-e}$$

$$FA + F'A = 2a = \frac{l}{1+e} + \frac{l}{1-e} = \frac{2l}{1-e^2}$$

$$a = \frac{l}{1-e^2}$$

$$a = \frac{l}{1-e^2}$$

$$a - ae^2 = l$$

$$a - l = ae^2$$

$$OF = a - FA = a - \frac{l}{1+e} = a - \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a - a(1-e) = ae$$

ae

$$\cancel{4}(b^2 + a^2e^2) = \cancel{4}a^2$$

$$b^2 + a\cdot(a-l) = a^2$$

$$b^2 + \cancel{a^2} - al = \cancel{a^2}$$

$$b = \sqrt{al}$$

$$\frac{h}{2m} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a}{T}\sqrt{al}$$

$$\frac{h^2}{4m^2} = \frac{\pi^2 a^2}{T^2} al$$

$$l = \frac{h^2}{GMm^2}$$

$$\frac{\cancel{h^2}}{4\cancel{m^2}} = \frac{\pi^2 a^3}{T^2} \frac{\cancel{h^2}}{GM\cancel{m^2}}$$

$$\boxed{\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{a^3}{T^2}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

$$T = \frac{2\pi}{} a^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{r} = u \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{h}{m}\cdot\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{h^2u^2}{2m} - GMmu = E$$

$$\frac{\cancel{m}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{h^2}}{\cancel{m^2}}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{\cancel{h^2}u^2}{\cancel{2m}} - \frac{2GMm^2u}{h^2} = \frac{Em2}{h^2}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 - \frac{2GMm^2u}{h^2} = \frac{2mE}{h^2}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(u - \frac{GMm^2\cancel{u}}{h^2}\right)^2 - \frac{G^2M^2m^4}{h^4} = \frac{2mE}{h^2}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right) = \pm\sqrt{\frac{2mE}{h^2} + \frac{G^2M^2m^4}{h^4} - \left(u - \frac{GMm^2\cancel{u}}{h^2}\right)^2}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right) = \left(\frac{1}{3}\frac{M_2}{M_1}\right)^{1/3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\frac{M_2}{M_1}\right)^{1/3}$$

$$M_1 \simeq 2\times10^{33}[g]$$

$$M_2 \simeq 6\times10^{27}\ [g]$$

$$\left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}\times10^{-6}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{M_2}{M_1} \simeq \frac{6\times10^{27}}{2\times10^{33}} \simeq 3\times10^{-6}$$

$$\underline{10^{-2}}\,a$$

$$\boxed{\theta = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow x = \cos\theta}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\, a^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^{\cancel{2}} = \pm\sqrt{\frac{2mE}{h^2} + \frac{G^2M^2m^4}{h^4} - \left(u - \frac{GMm^2\cancel{u}}{h^2}\right)^2}$$

$$\boxed{d\theta = \pm \frac{du}{\sqrt{\underbrace{\frac{2mE}{h^2} + \frac{G^2M^2m^4}{h^4}}_{A} - \left(u - \underbrace{\frac{GMm^2}{h^2}}_{B}\right)^2}}} = \pm \frac{du}{\sqrt{A\left[1 - \left(\frac{u-B}{\sqrt{A}}\right)^2\right]}}$$

(6-2)

(6-3)

$$= \pm \frac{d\left(\frac{u-B}{\sqrt{A}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{u-B}{\sqrt{A}}\right)^2}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{u-B}{\sqrt{A}} \quad \text{6-3, 6-2} \quad = \frac{\frac{1}{r}-B}{\sqrt{A}}$$

$$\sqrt{A}\cos\theta + B = \frac{1}{r}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{A}\cos\theta + B} = \frac{\frac{1}{B}}{1+\frac{\sqrt{A}}{B}\cos\theta} = \frac{\quad}{1+ \cdots}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{2mE}{h^2} + \dfrac{G^2M^2m^4}{h^4} \\ B = \dfrac{GMm^2}{h^2} \end{cases}$$

$$= \frac{h^2/GMm^2}{1+\sqrt{1+\frac{h^2 2mE}{G^2M^2 \cdots}}}$$

$$\boxed{r = \frac{h^2/G \cdots}{1+\sqrt{1+ \cdots}}}$$

$$\boxed{r = \frac{l}{1+e\cos\theta}}$$

円錐曲線

$$\frac{\frac{h^2}{GMm^2}}{\dfrac{\sqrt{\dfrac{2mE}{h^2}+\dfrac{G^2M^2m^4}{h^4}}}{GMm^2/h^2}} \cos\theta$$

$$/\cancel{h^2} \qquad m^{\cancel{4}3}/\cancel{h^4} \qquad \cos\theta$$

$$\boxed{\quad GMm^2 \qquad \frac{2\,Eh^2}{G^2M^2m^3} \quad \cos\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} l &= h^2/GMm^2 \quad (6.4) \\ e &= \sqrt{1+\frac{2Eh^2}{G^2M^2m^3}} \quad (6.5) \end{aligned}}$$

E = total energy

$E < 0$ bound $e < 1 \Rightarrow$ だ円

$E = 0$ 無限遠でエネルギーゼロ $\Rightarrow$ 放物線

$e = 1$

$E > 1$ $e > 1 \Rightarrow$ 双曲線