第8回 人工衛星の姿勢と四元数

2021年5月18日　　11:06

四元数については、　いろいろなところに解説がありますが、私の講義ノート、
https://www.isas.jaxa.jp/home/ebisawalab/ebisawa/TEACHING/Komaba/Komaba.pdf
も参考になると思います。

人工衛星の姿勢と四元数 (quaternion, q-parameters)

1. 三次元空間における物体の回転は、ある軸の周りの一回の回転で実現できることを示せ。

ケプラーの定理

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A: 回転行列

直交行列

$\boxed{|A| = 1 \quad {}^tA = A^{-1}}$

回転軸がある → 回転軸方向のベクトルは回転で不変

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ とする

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇓

$A-I$ に逆行列が存在しない

$|A - I| = 0$

$$(A - I)\,{}^tA = A\,{}^tA - {}^tA = I - {}^tA$$

$$|A - I| \cdot \underbrace{|{}^tA|}_{=1} = |I - {}^tA| \Rightarrow \boxed{|A - I| = |I - A|}$$

$$= -|A - I|$$

$$|A - I| = 0$$

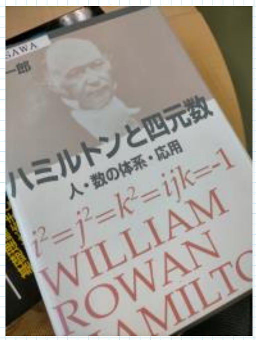
ASCA衛星の姿勢ファイルの例 https://data.darts.isas.jaxa.jp/pub/asca/asca_rev2/10010100/aux/fa930407_0233.0414.gz

TIME	QPARAM
8.303602855937183E+06	-4.214137818602299E-01
	-3.671628422241615E-01
	-6.068271680427795E-01
	5.651218097661020E-01
8.303603355954587E+06	-4.214115784132074E-01
	-3.671743574955190E-01
	-6.068260876402793E-01
	5.651171313420200E-01or
8.303603855931759E+06	-4.214093076125627E-01
	-3.671826415753114E-01
	-6.068261489914747E-01
	5.651133763090849E-01
8.303604355949163E+06	-4.214079773178000E-01
	-3.671884697731878E-01
	-6.068265887438722E-01
	5.651101091929086E-01

→ 2乗して足すと1になっている。

単位四元数

$[u \sin\Omega, \ \cos\Omega]$



2. 赤道座標系から銀河座標系への変換は、オイラー角で表すことができる（Z軸、Y軸、X軸の周りの連続回転）。これを、ある軸の周りの一回の回転で表せ。
   Amination to illustrate the Euler rotations
   Animation to illustrate the single rotation

3. ASCA衛星の姿勢ファイルを見てみよう。0.5 秒毎に4つの数が並んでいる。4つの数の二乗和を計算せよ。これらの4つの数の組を何と呼ぶか？

単位四元数

四元数は複素数の拡張として、以下のように定義される。

$$q \equiv \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z + w, \quad \text{where} \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \underbrace{\mathbf{k}^2}_{=-1}, \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}.$$

ここで、x, y, z, w は実数である。

4. 四元数の定義から、以下の関係を導け

$$\begin{cases} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \\ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \end{cases}$$

$ij = k$

$i^2 j = ik$

$-j = ik$

$j = -ik$

$jk = i$

$j^2 k = ji$

$-k = ji$

$ki = j$

$k^2 i = kj$

$-i = kj$

四元数を以下のようにも表す。

$$q = [\mathbf{v}, w] = [(x, y, z), w] = [x, y, z, w]. \qquad (5.8)$$

$\mathbf{v}$ は、3 次元空間のベクトルを表す。$q = [\mathbf{v}, w], q' = [\mathbf{v}', w']$ とするとき、四元数同士の和は四元数であり、それは次のように定義される。

$$q + q' = [\mathbf{v}, w] + [\mathbf{v}', w'] \equiv [\mathbf{v} + \mathbf{v}', w + w']. \qquad (5.9)$$

積については、以下のように考えられる。

5. 上記の四元数qとq'の積が、ベクトルの外積と内積を用いて、

$$qq' = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}' + w\mathbf{v}' + w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']$$

と表されることを示せ。ここで、四元数の積は可換でないことに注意せよ。

$qq' \neq q'q$

$$qq' = [v, w][v', w'] = [xi + yj + zk + w][x'i + y'j + z'k + w']$$

$$= xx'i^2 + xy'ij + xz'ik + xw'i$$
$$+ yx'ji + yy'j^2 + yz'jk + yw'j$$
$$+ zx'ki + zy'kj + zz'k^2 + zw'k$$
$$+ wx'i + wy'j + wz'k + ww'$$

$$= \cancel{-xx'} + \cancel{xy'k} - \cancel{xz'j} + \cancel{xw'i}$$

$+ wx'i + wy'j + wz'k + ww'$

$= \cancel{-xx'} + \cancel{xy'k} - \cancel{xz'j} + \cancel{xw'i}$

$\quad \cancel{-yx'k} - \cancel{yy'} + \cancel{yz'i} + \cancel{yw'j}$

$\quad + \cancel{zx'j} - \cancel{zy'i} - \cancel{zz'} + \cancel{zw'k}$

$\quad + \cancel{wx'i} + \cancel{wy'j} + \cancel{wz'k} + \cancel{ww'}$

$= (yz'-zy')i + (zx'-xz')j + (xy'-yx')k - (xx'+yy'+zz')$

$\quad + w(x'i+y'j+z'k)$

$\quad + w'(xi+yj+zk) + ww'$

$= [v \times v' + wv' + w'v,\ ww' - v \cdot v']$

6. q=[v, w]が単位四元数の時、その$\boxed{逆四元数}$q⁻¹を、q q⁻¹ =1となるように定義する。q⁻¹はどのように書けるか？

$q^{-1} = [-v, w]$

$qq^{-1} = [v, w][-v, w] = [\underbrace{v \times (-v) - wv + wv}_{0},\ \underbrace{ww' + v^2}_{1}]$

7. (評価対象外)　四元数の積について、以下の結合法則が成り立つことを示せ。元気な学生さんは、ぜひ、トライしてみてください。

$$(qq')q'' = q(q'q'')$$

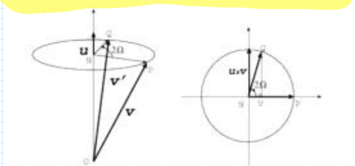
ベクトル3重積 $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$ の式を使う

$\neq (A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$

(1) 展開式はカッコ内のベクトルの一次結合
(2) 各ベクトルの係数は他のベクトルの内積
(3) 符号は三重積の中央のベクトルに対しては正、端のベクトルに対しては負

8. 以下の定理を証明せよ

定理 II u を単位ベクトルとするとき、ノルムが 1 である単位四元数、$q = [\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega]$ と、任意のベクトル v を空間成分とする四元数、$p = [\mathbf{v}, 0]$ を考える。$p' = qpq^{-1} = [\mathbf{v}', 0]$ としたとき、v′ は、v を u の周りに角度 2Ω 回転したものである。



$q = [u_x \sin\Omega, u_y \sin\Omega, u_z \sin\Omega, \cos\Omega]$

$u_x^2 \sin^2\Omega + u_y^2 \sin^2\Omega + u_z^2 \sin^2\Omega + \cos^2\Omega$

$= \sin^2\Omega(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + \cos^2\Omega$

$= \sin^2\Omega + \cos^2\Omega = 1$

$v' = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ} = (u \cdot v)u + \cos 2\Omega(v - (u \cdot v)u) + \sin 2\Omega(u \times v)$

$\overrightarrow{ON} = (u \cdot v)u$

$\overrightarrow{NV} = \cos 2\Omega\, \overrightarrow{NP} = \cos 2\Omega(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) = \cos 2\Omega(v - (u \cdot v)u)$

$\overrightarrow{VQ} = \sin 2\Omega(u \times v)$

$= \underbrace{(1 - \cos 2\Omega)}_{2\sin^2\Omega}(u \cdot v)u + \cos 2\Omega \cdot v + \sin 2\Omega(u \times v)$

$2\sin\Omega \cdot \cos\Omega$

$\cos 2\Omega = \cos^2\Omega - \sin^2\Omega$

$= 1 - 2\sin^2\Omega$

$1 - \cos 2\Omega = 2\sin^2\Omega$

$p' = qpq^{-1} = [u\sin\Omega, \cos\Omega][v, 0][-u\sin\Omega, \cos\Omega]$

$= [u\sin\Omega, \cos\Omega][-\sin\Omega(v \times u) + \cos\Omega\, v,\ \sin\Omega\, u \cdot v]$

$= [\underbrace{-\sin^2\Omega\, u \times (v \times u) + \sin\Omega \cdot \cos\Omega\, u \times v - \sin\Omega \cdot \cos\Omega(v \times u) + \cos^2\Omega\, v + \sin^2\Omega(u \cdot v)u}_{v'},\ 0]$

$\sin\Omega \cdot \cos\Omega\, u \cdot v - \sin\Omega \cdot \cos\Omega \cdot u \cdot v$

$u \times (v \times u) = (u \cdot u)v - (u \cdot v)u$

$= v - (u \cdot v)u$

$-\sin^2\Omega(v - (u \cdot v)u) + 2\sin\Omega \cdot \cos\Omega(u \times v) + \cos^2\Omega\, v + \sin^2\Omega(u \cdot v)u$

$= 2\sin^2\Omega(u \cdot v)u + \underbrace{(\cos^2\Omega - \sin^2\Omega)}_{\cos 2\Omega} v + 2\sin\Omega \cdot \cos\Omega(u \times v)$

一致する!!

9. 以下の定理を証明せよ。

定理 III 単位四元数 q による回転に引き続いて q' という回転を行うとき、その回転は $q'q$ という新たな単位四元数で表わされる。

$p = [v, 0]$ に対して q という回転と q' という回転をつづけて行う

$q'(qpq^{-1})q'^{-1}$

$= q'q\,p\,q^{-1}q'^{-1} = q'q\,p\,(q'q)^{-1}$

$1 = (q'q)(q'q)^{-1}$

$q'^{-1} = q'^{-1}q'q(q'q)^{-1}$

$= q(q'q)^{-1}$

$q^{-1}q'^{-1} = q^{-1}q(q'q)^{-1}$

$= (q'q)^{-1}$

10. （評価外；コピペOK）3次元空間の回転行列と四元数の関係を示せ。これを用いて、オイラー角、回転行列、四元数を関連付けることができる。

$q = (u \cdot \sin\Omega, \cos\Omega) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$

$$\mathbf{v}' = 2(\sin\Omega\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}\ \sin\Omega\mathbf{u} + (2\cos^2\Omega - 1)\mathbf{v} + 2\cos\Omega\,(\sin\Omega\mathbf{u}) \times \mathbf{v}$$

$$= 2(q_1x + q_2y + q_3z)(q_1\mathbf{e}_x + q_2\mathbf{e}_y + q_3\mathbf{e}_z) + (q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)$$

$$+2q_4\{(q_2z - q_3y)\mathbf{e}_x + (q_3x - q_1z)\mathbf{e}_y + (q_1y - q_2x)\mathbf{e}_z\}$$

$$= (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)\begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_1q_2 - 2q_3q_4 & 2q_1q_3 + 2q_2q_4 \\ 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 \\ 2q_1q_3 - 2q_2q_4 & 2q_2q_3 + 2q_1q_4 & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

$$= (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.98)$$

$$
\begin{aligned}
&+2q_4\left[(q_2 z - q_3 y)\mathbf{e}_x + (q_3 x - q_1 z)\mathbf{e}_y + (q_1 y - q_2 x)\mathbf{e}_z\right] \\
&= (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)\begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_1q_2 - 2q_3q_4 & 2q_1q_3 + 2q_2q_4 \\ 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 \\ 2q_1q_3 - 2q_2q_4 & 2q_2q_3 + 2q_1q_4 & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (4.97) \\
&\equiv (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (4.98)
\end{aligned}
$$

$$q^{-1} q^{-1} = q^{-1} q (q^{-1} q)^{-1}$$
$$= (q^{-1} q)^{-1}$$

11. 人工衛星の姿勢制御において、オイラー角の代わりに四元数を使うメリットは何か？

① 連続した回転を四元数のかけ算で表すことができる

② ある回転軸の周りの1回の回転で姿勢制御できる

四元数から回転軸と回転角がわかる

回転角

12. 衛星の姿勢が四元数 "p"で表されるとする。 "q"で表される姿勢に姿勢を変える (maneurver) には どうしたらよいか？

p に

qp^{-1} を左からかける

この四元数を計算してやればよい

$$(qp^{-1})p = qp^{-1}p = q$$

姿勢 "p" から" q"へのマヌーバーのアニメーション

13. 人工衛星のある姿勢と別の姿勢との「平均の姿勢」はどのように計算したらよいか？

姿勢を変える回転軸と回転角を求める。

その半分だけ回転させたところが平均の姿勢になる