

一般相対論でやる

X軸  
降着円盤の内縁半径 (accretion disk)

ブラックホールからの重力エネルギーの解放

- ブラックホール周辺の最小安定円軌道 (Innermost Stable Circular Orbits; ISCO) のスピンパラメータ (a) 依存性を調べよ。回転していないブラックホール (シュワルツシルドブラックホール) と、回転しているブラックホール (カーブラックホール) の場合を比較せよ。

$$r_{ISCO} = 6 r_g = 3 r_s = \frac{6GM}{c^2}$$

a=1 (Extreme Kerr BH)  
 $r_{ISCO} = \frac{GM}{c^2} = \frac{1}{2} r_s$

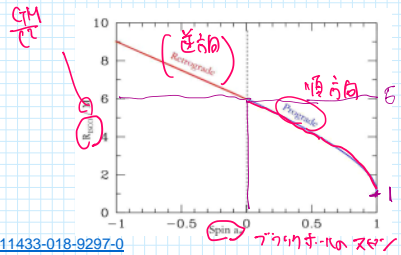


figure from 10.1007/s11433-018-9297-0

- 一般相対論を考慮せず、質量mの物体が、質量MのブラックホールのISCOで回転運動をしているときのエネルギー E (ポテンシャルエネルギー + 運動エネルギー) を、回転していないブラックホール (シュワルツシルドブラックホール) と最も回転しているブラックホール (extremely Kerr black hole) の場合について、見積もれ。

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{GMm}{6GM/c^2} (a=0) \Rightarrow -\frac{1}{12} m c^2 \\ -\frac{1}{2} \frac{GMm}{GM/c^2} (a=1) \Rightarrow -\frac{1}{2} m c^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{GMm}{r}$$

$$\frac{1}{2} \frac{m v^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{GM}{r}$$

- 質量mの物体が、無限遠から回転運動をしながら徐々に落ちてきて、ブラックホールのISCOに達した場合、-Eのエネルギーが解放される。-E = ηmc<sup>2</sup> と表した場合のエネルギー効率 η を見積もれ。これを、一般相対論を考慮した場合の正確なエネルギー効率 η と比較せよ。

$$\begin{cases} a=0 & -E = \frac{1}{12} m c^2 & \eta = \frac{1}{12} = 0.083 \\ a=1 & -E = \frac{1}{2} m c^2 & \eta = \frac{1}{2} = 0.5 \end{cases}$$

→  $\eta = 1 - \sqrt{a} = 0.057$   
 →  $\eta = 1 - \sqrt{3} = 0.42$

- ブラックホールによる重力エネルギー解放のエネルギー効率と、核融合反応のエネルギー効率を比較せよ。

恒星内部 H → Fe η = 0.009

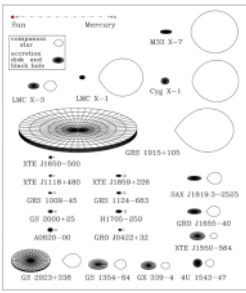
ブラックホールの質量降着が起ると重力エネルギーが解放される。このエネルギー効率は高い (非効率)

ブラックホールのスピン

- ブラックホールのスピンをX線観測から見積もる方法を説明せよ。

Measuring the spins of accreting black hole

定量的にBHのスピンを測る条件 → BH (M, a, r)



**Table 1. Spin results to date for eight black holes<sup>a</sup>.**

Source	Spin $a_*$	Reference
1 GRS 1915+105	>0.98	McClintock <i>et al</i> 2006
2 LMC X-1	$0.92^{+0.08}_{-0.07}$	Gou <i>et al</i> 2009
4 M33 X-7	$0.84 \pm 0.05$	Liu <i>et al</i> 2008, 2010
3 4U 1543-47	$0.80 \pm 0.05$	Shafee <i>et al</i> 2006
5 GRO J1655-40	$0.70 \pm 0.05$	Shafee <i>et al</i> 2006
6 XTE J1550-564	$0.34^{+0.26}_{-0.28}$	Steiner <i>et al</i> 2010b
7 LMC X-3	<0.3 <sup>b</sup>	Davis <i>et al</i> 2006
8 A0620-00	$0.12 \pm 0.18$	Gou <i>et al</i> 2010

<sup>a</sup> Errors are quoted at the 68% level of confidence.  
<sup>b</sup> Provisional result pending improved measurements of  $M$  and  $i$ .

**重力波とブラックホール**

1. 降着円盤を持たない二つのブラックホールが合体した場合、何が起きるか？電磁波は放出されるか？

重力波が放出される  
 ↳ 合体あり!!

**Nobel prize 2017**

2. 今までに観測されたブラックホール合体による突発重力波の振幅は、 $10^{-21}$ 程度である。これによつては、地球と太陽との間の距離 (1天文単位)がどのくらい変化するか？ポア半径を単位として計算せよ。

$\sim 0.5 \text{ \AA} = 0.5 \times 10^{-8} \text{ (cm)}$

$500 \text{ light-sec} = 500 \times 3 \times 10^{10} \text{ (cm)} = 1500 \times 10^{10} \text{ (cm)} = 1.5 \times 10^{13} \text{ (cm)}$

3. 中性子星合体の場合には、何が起きるか？電磁波は放出されるか？

$1.5 \times 10^{13} \text{ (cm)} \times 10^{-21} = 1.5 \times 10^{-8} \text{ (cm)}$

↳ 合体  
 $\sim 3 \text{ \AA} \sim \text{半径}$

**The historical first neutron star merger paper**

These observations support the hypothesis that GW170817 was produced by the merger of two neutron stars in NGC 4993 followed by a short gamma-ray burst (GRB 170817A) and a kilonova/macronova powered by the radioactive decay of r-process nuclei synthesized in the ejecta.

中性子星合体は金、プラチナ、レアアース等の生成工場 <<https://www.nao.ac.jp/news/science/2014/20140701-neutronstar.html>>

4. 活動的銀河中心核 (Active Galactic Nuclei; AGN)においては、超巨大ブラックホールのまわりの降着円盤から、強い電磁波が放出されている。二つの活動的銀河中心核が合体した場合、何が起きるだろうか？それを、重力波とX線で同時観測する計画について、調べよ。

"A unique experiment to explore black holes" by ESA  
 See also the [You tube video by ESA](#)

**ホーキング放射とブラックホールの蒸発**

$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{19} \text{ erg}$

• Hawking (1974)によつて、質量  $M$  のブラックホールは、以下の温度を持つ (質量が小さいほど温度が高いとして破格計算)。

ホーキング放射とブラックホールの蒸発

$$1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{erg}$$

1. Hawking (1974)によると、質量 M のブラックホールは、以下の温度を持つ (質量が小さいほど温度が高いことに留意せよ):

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM} = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{k} \frac{\hbar c^3}{(GM)^2} \left(\frac{M_0}{M}\right) = \frac{1}{8\pi} \frac{200 \text{eV} \cdot \text{\AA}}{1.38 \times 10^{16} \text{eV/K}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}(3) \text{m}} \left(\frac{M_0}{M}\right) = \frac{1}{8\pi} \frac{2 \times 10^3}{1.4 \times 10^{16} \text{eV/K} \cdot 1.5 \times 10^8 \text{cm}} \left(\frac{M_0}{M}\right)$$

$$= \frac{2}{24} \frac{10^{-19}}{1.5 \times 10^{15}} \left(\frac{M_0}{M}\right) \text{ [K]}$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1.5} \cdot 10^6 \left(\frac{M_0}{M}\right) \text{ [K]}$$

$$= 0.05 \times 10^6 \left(\frac{M_0}{M}\right) \text{ [K]} = 5 \times 10^8 \left(\frac{M_0}{M}\right) \text{ [K]}$$

典型的な恒星質量ブラックホールの温度を見積もれ [Kを単位とせよ]。ブラックホールは、その温度の黒体放射をしていると考えられる (「ホーキング放射」)。それを観測することは可能だろうか?

→ 不可能

2. ホーキング放射によって、ブラックホールは、以下のタイムスケールで蒸発すると考えられている (質量の3乗に比例することに留意せよ) Carr et al. (2010).

$$\tau \approx 400 \left(\frac{M}{10^{10} \text{g}}\right)^3$$

宇宙年齢程度で蒸発するブラックホールの質量を見積もれ。

$$138 \times 10^8 \text{yr} \approx 10^{11} \text{ [yr]}$$

$$\approx 400 \times 10^3 \text{ [yr]} \approx 4 \times 10^5 \text{ [yr]}$$

$$M \approx 10^5 \text{ [g]}$$

3. 宇宙年齢で蒸発するような軽いブラックホールが、初期宇宙において生成された可能性がある (原始ブラックホール; primordial black holes)。そのようなブラックホールの温度を、eVを単位として見積もれ。

$$T = 5 \times 10^8 \left(\frac{M_0}{M}\right) \text{ [K]} = 5 \times 10^8 \times 2 \times 10^{18} \text{ [K]}$$

$$= 10 \times 10^8 \times 10^8 \text{ [K]} = 10^{11} \text{ [K]} \approx 10^7 \text{ eV}$$

$$\approx 10 \text{ MeV}$$

$$M_0 \approx 2 \times 10^{33} \text{ g}$$

$$\frac{M_0}{M} = \frac{2 \times 10^{33} \text{ g}}{10^{15} \text{ g}} = 2 \times 10^{18}$$

$$[\text{eV}] \approx 10^8 \text{ [K]}$$

4. 原始ブラックホールの存在は確認されていないが、その探査は行われている。どのようにして探査することができるのか?

Gamma-rays from primordial black holes

Search for Gamma-ray emission from local primordial black holes with the Fermi Large Area Telescope

5. 超新星爆発の後に形成されるブラックホールの最小質量は3太陽質量程度である。3太陽質量のブラックホールがホーキング放射によって蒸発するには、およそ何年間かかるか? 地球上の人類はそれを観測することができるか?

$$400 \times \left(\frac{3 \times 2 \times 10^{33} \text{ g}}{10^{10} \text{ g}}\right)^3 \text{ [s]} \approx 4 \times 10^2 \times (6 \times 10^{23})^3 \text{ [s]} = 4 \times 10^2 \times 200 \times 10^{69} \text{ [s]}$$

$$= 8 \times 10^{73} \text{ [s]}$$

$$= \frac{8 \times 10^{73}}{4 \times 10^7} \text{ [year]}$$

$$= 2 \times 10^{56} \text{ [year]}$$