東京大学教養学部 2007 – 2010 年度 宇宙科学 II 講義ノート

(改訂: November 15, 2021)

JAXA 宇宙科学研究所 海老沢 研

2007 年度から 2010 年度まで、「宇宙科学 II」の講義を行いましたが、少しず つ内容が違います。このノートは、それらをまとめ、適宜改訂したものです。

# Contents

1	宇宙の広がり	7
	1.1 自然界における最も重要な3つの定数	7
	1.2 プランク時間、プランク長、プランク密度	8
	1.3 宇宙の年齢と大きさ	9
	1.4 曲がっていない空間 (線形空間)と曲がっている空間	9
<b>2</b>	回転による座標変換	11
	2.1 3次元空間、4次元時空の回転の例	11
	2.2 天球座標	12
	2.3 方向ベクトルと座標変換	15
	2.4 直交変換と変換行列	16
	2.5 直交変換の簡単な記法	18
	2.6 座標変換の計算	18
	2.7 スカラー三重積と行列式	19
3	オイラー角と座標変換	<b>21</b>
	3.1 オイラーの定理	21
	3.2 オイラー角	22
	3.3 赤道座標から黄道座標への変換	23
	3.4 赤道座標から銀河座標への変換	24
<b>4</b>	人工衛星の姿勢	27
	4.1 天文衛星による観測	27
	4.2 人工衛星の姿勢とオイラー角	29
	4.3 観測ターゲットと季節の関係	30
	4.4 衛星座標から天球座標への変換	31
F	四元数と座標変換、人工衛星の姿勢	33
Э		00

	5.2	四元数の性質 <sup>1</sup> : : : : : : : : : : : : : : : : :	34
	5.3	四元数と回転 <sup>2</sup>	37
	5.4	四元数と変換行列の関係・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	38
	5.5	座標変換への応用	40
	5.6	人工衛星の姿勢への応用	40
6	特殊	相対性理論	43
	6.1	特殊相対性理論が必要になる場合	43
	6.2	超光速運動 (super-luminal motion)	14
	6.3	<b>ローレンツ</b> 変換 <sup>3</sup>	45
	6.4	固有時間	19
	6.5	四元速度	50
	6.6	速度の変換則	50
	6.7	四元運動量	52
	6.8	<b>ドップラー効果と光行差</b> (aberration)	53
7	一般	相対性理論 <sup>4</sup> 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	57
7	一般 7.1	相対性理論 <sup>4</sup>	57 57
7	一般 7.1 7.2	相対性理論 <sup>4</sup>	57 57 59
7	一般 7.1 7.2 7.3	相対性理論 <sup>4</sup>	57 57 59 51
7	一般 7.1 7.2 7.3 7.4	相対性理論 <sup>4</sup>	57 57 59 51 52
7	一般 7.1 7.2 7.3 7.4 7.5	相対性理論 <sup>4</sup>	57 59 51 52 34
8	一般 7.1 7.2 7.3 7.4 7.5 二体	相対性理論 <sup>4</sup>	57 57 59 51 52 54 54
8	一般 7.1 7.2 7.3 7.4 7.5 二体 8.1	相対性理論 <sup>4</sup>	57 57 59 51 52 52 54 57
8	一般 7.1 7.2 7.3 7.4 7.5 二体 8.1 8.2	相対性理論 <sup>4</sup> 5       局所慣性系     5       シュワルツシルド時空     5       ブラックホール     6       観測装置の分解能とプラックホールの直接撮像     6       シュワルツシルド時空の     GPS への応用       問題     6       二体問題の例     6       角運動量、中心力、角運動量保存則     7	57 57 59 51 52 54 57 57 70
8	一般 7.1 7.2 7.3 7.4 7.5 二体 8.1 8.2 8.3	相対性理論 <sup>4</sup> 5       局所慣性系	57 57 59 51 52 52 54 57 70 71
8	一般 7.1 7.2 7.3 7.4 7.5 二体 8.1 8.2 8.3 8.4	相対性理論 <sup>4</sup> 5       局所慣性系     ジュワルツシルド時空       ブラックホール     ()       観測装置の分解能とブラックホールの直接撮像     ()       シュワルツシルド時空の GPS への応用     ()       問題     ()       日題     ()       二体問題の例     ()       角運動量、中心力、角運動量保存則     ()       人工衛星の軌道、惑星の軌道     ()	<b>57</b> 57 59 51 52 54 <b>57</b> 70 71 72
8	一般 7.1 7.2 7.3 7.4 7.5 二体 8.1 8.2 8.3 8.4 8.5	相対性理論 <sup>4</sup> 5         局所慣性系       5         シュワルツシルド時空       5         ブラックホール       6         観測装置の分解能とブラックホールの直接撮像       6         シュワルツシルド時空の GPS への応用       6         問題       6         二体問題の例       6         角運動量、中心力、角運動量保存則       7         人工衛星の軌道、惑星の軌道       7         楕円軌道       7	<b>57</b> 57 59 51 52 54 <b>57</b> 70 71 72 75
8	-般 7.1 7.2 7.3 7.4 7.5 二体 8.1 8.2 8.3 8.4 8.5 8.6	相対性理論 <sup>4</sup> 5         局所慣性系	<b>57</b> 57 59 51 52 54 52 54 <b>57</b> 70 71 72 75 77
8	-般 7.1 7.2 7.3 7.4 7.5 二体 8.1 8.2 8.3 8.4 8.5 8.6 8.7	相対性理論 <sup>4</sup> 第         局所慣性系       ジュワルツシルド時空         ブラックホール       ()         観測装置の分解能とブラックホールの直接撮像       ()         シュワルツシルド時空のGPSへの応用       ()         問題       ()         二体問題の例       ()         月運動量、中心力、角運動量保存則       ()         人工衛星の軌道、惑星の軌道       ()         方プラーの第三法則       ()         円軌道の場合       ()	<b>57</b> 57 59 51 52 54 52 54 57 70 71 72 75 77 77

<sup>1</sup>この節と次節では ftp://ftp.cis.upenn.edu/pub/graphics/shoemake/quatut.ps.Z を参考にしています。このメモの著者の Ken Shoemake は、コンピューターグラフィクスに quaternion を導入した人らしい。

<sup>2</sup>この節の議論は、有名な教科書、"Classical Mechanics" H. Goldstein に倣いました。

<sup>3</sup>Jackson, "Classical Electrodynamics"の"第1版"を参考にしています (日本語訳も出ています)。特殊相対論に関しては、第2版よりも第1版の記述のほうがシンプルでわかりや すいと感じました。

<sup>4</sup>この節では、"Exploring Black Holes –Introduction to General Relativity", by Taylor and Wheeler, Addison Wesley Longman を参考にしています。日本語でも英語でも一般相対 性理論の教科書は山のようにありますが、僕が見た限り、これが一番直感的でわかりやすい教 科書でした (しかし数学的な導出とかは厳密ではありません)。

4

CONTENTS

9	人工衛星の軌道	<b>7</b> 9
	9.1 軌道六要素	79
	9.2 静止衛星	81
	9.3 Two Line Elements	81
	9.4 準天頂衛星	82
10	統計入門	87
	10.1 ポアソン分布	87
	10.2 正規分布	91
	10.3 標準偏差と偏差値	96
	10.4 $\chi^2$ (カイニ乗)分布	97
	10.5 カイニ乗検定	99
11	大雑把に天体の物理量を求める事 1	03
	11.1 重力エネルギーの解放	103
	11.2 エディントン限界光度	104
	11.3 黒体輻射 (blackbody radiation)	104
	11.4 黒体輻射のスペクトルと波長、振動数、エネルギーの関係	105
	11.5 黒体輻射の例	106
	11.6 ステファンボルツマンの法則	108
	11.7 中性子星、白色矮星の表面温度	108
	11.8 ブラックホールの周りの降着円盤の温度	109

### Chapter 1

## 宇宙の広がり

これから宇宙科学を学ぶにあたって、我々が「物理学の研究対象として考え る宇宙」とはどのくらいの広がりを持ったものなのか、ざっと見ておくこと にしよう。

### 1.1 自然界における最も重要な3つの定数

高校で学んだニュートン力学では、基礎的な方程式に重力定数Gは入ってきても、光速cは入ってこなかった。これは重力によって生じるモノの速さが光速cに比べてはるかに小さい場合のみを扱ってきたからである。光に近い早さでモノが動く状況を記述するには、特殊相対性理論(特殊相対論)が必要になり、そこには光速cが出てくる。しかし、そこでは重力は扱っていないので、Gは出てこない。重力によって生じるモノの速さが光速cに比べて無視できない場合を扱うのが、一般相対性理論で、その基本方程式には $c \ge G$ の両方が出てくる。一般相対性理論は巨視的な世界を扱う理論なので、そこにはプランク定数hは出てこない。

プランク定数hは、小さなスケールに於ける物理現象を記述する量子力学に出てくる。ただし、シュレディンガー方程式にはhはでてくるが、cもGも出てこない。これは、素粒子が光速に近い速度で動いていることを考慮せず、また素粒子同士の重力を考慮していないからである。実際には、素粒子は光速に近い速さで運動しているので、シュレディンガー方程式に特殊相対性理論の効果を考慮したディラック方程式が必要になり、ここには必然的にhとcが出てくる。

その後、素粒子論は発展し、現在では、自然界に存在する四つの力、電磁 相互作用、弱い相互作用、強い相互作用、重力相互作用のうち、重力相互作 用をのぞく三つを統一する可能性がある標準理論(*h*と*c*を用いて記述される) が研究されている。そのような理論を検証するには、素粒子をほとんど光速 まで加速して衝突させて、とことんばらばらにする必要があり、そのために CERNのLarge Hadolon Collider<sup>1</sup>のような巨大加速器実験が行われている訳 である<sup>2</sup>。

さらに、素粒子間の重力まで考慮に入れて、4つの相互作用を統一的に説 明する理論、h、c、Gが同時に出てくる理論はあるのだろうか?そのような 量子重力理論はまだ存在しない。少なくとも、正しい、と広く受け入れられ ているものは。また、そのような理論の検証には、言ってみれば素粒子間に 働く重力の測定が必要であり、それは地上ではほぼ不可能である。それが実 現しているのは、この宇宙ではビッグバンの瞬間にしかないわけで、必然的 に素粒子論の研究は、ビッグバンの起源を探る研究になる<sup>3</sup>。

いずれにしろ、我々が知っている限り、この宇宙の物理法則は、*c*,*h*,*G*を 用いて記述される。これらの定数から自然に導かれる時間と長さと密度が、物 理法則で記述できる最小の時間(プランク時間)と空間(プランク長)と最大 の密度(プランク密度)である。プランク時間、プランク長が、現在の物理学 で考えられる時間と空間の最小単位である。すなわち、現在知られている物 理常数をどう捻っても、これ以上短い時間や空間は作れない。非常に大雑把 に言って、ビッグバンからプランク時間後の宇宙の大きさがプランク長、そ のときの宇宙の密度がプランク密度である。その頃の物理状態を記述するの が量子重力理論である。

### 1.2 プランク時間、プランク長、プランク密度

重力常数、光速、プランク定数の値は以下の通りである。

$$\begin{aligned} G &= 6.6726 \times 10^{-11} \ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \ (\mathrm{m^3/kg/s^2}) \\ c &= 2.9979 \times 10^8 \ \mathrm{m/s} \\ h &= 6.62607 \times 10^{-34} \ \mathrm{J \cdot s} \quad (\mathrm{kg \cdot m^2/s}) \end{aligned}$$

ただし、 $h \in 2\pi$ で割った、 $\hbar$ が良く使われる。

 $\hbar = 1.05457 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})$ 

この *G*, *c*, *ħ* の単位 (次元)をグッとにらんで、時間、長さ、質量、さらに 密度の単位を作ってみる。これらが、プランク時間、プランク長、プランク 質量、プランク密度である。

Planck Time = 
$$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.39 \times 10^{-44} \text{ [sec]}$$
 (1.1)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>http://lhc.web.cern.ch/lhc/

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>素粒子物理学の解説として、おこちゃま向けですが、http://www.kek.jp/kids は良く書 かれています。

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>東大の数物連携宇宙研究機構 (http://www.ipmu.jp/ja) のテーマですね。

Planck Length = 
$$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.61 \times 10^{-35} \, [m]$$
 (1.2)

Planck Mass = 
$$\sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.176 \times 10^{-8} \text{ [kg]}$$
 (1.3)

Planck Density = 
$$\frac{c^5}{\hbar G^2} = 5.16 \times 10^{93} \text{ [g/cm^3]}$$
 (1.4)

### 1.3 宇宙の年齢と大きさ

宇宙の年齢は約 137 億年と測定されている  $(4.3 \times 10^{17}$  秒)。よって、宇宙の 大きさは 137 億光年と考えられる  $(1.3 \times 10^{26} \text{ m})$ 。それぞれ、プランク時間 (1.1)、プランク長 (1.2) と比較すると、約 61 桁大きい。つまり、我々の物理的 考察の対象である宇宙は、約 61 桁にわたって時間的、空間的に広がっている。

### 1.4 曲がっていない空間 (線形空間)と曲がっている空間

仮に重力が存在しない時間と空間(四次元時空)を考えよう。そのような時空 は曲がっていない(線形空間)。そのような時空に四本の直交する座標軸を立 てたとしよう。もう一つ、別の座標軸を考える。どちらの座標系で測っても、 四次元時空中の距離は同じであり、二つの座標系のあいだの変換は回転で表 される(ローレンツ変換)。変換を記述する回転行列は、場所によらずに同じ である。そのような、重力が存在せず、曲がっていない時空を記述するのが 特殊相対性理論である。

重力が存在する時空は曲がっている。座標系によって四次元時空間の距離 は違い、二つの座標系のあいだの変換は回転で表せない。変換を記述する行 列は場所に依存する。そのような、重力が存在し、曲がっている時空を記述 するのが一般相対性理論である。

### Chapter 2

## 回転による座標変換

### 2.1 3次元空間、4次元時空の回転の例

ここでは、大学一年で学ぶ初歩的な線形代数の応用例として3次元空間、4次 元時空の座標系の回転を考えてみよう。それによって、特殊相対性理論を理 解することを目標とする。

以下に3つの行列を示す。これらの行列に共通の特徴を読み取れるだろうか?

$$\begin{pmatrix} -0.0548755 & -0.873437 & -0.483835 \\ 0.49411 & -0.44483 & 0.746982 \\ -0.867666 & -0.198076 & 0.455984 \end{pmatrix}$$
(2.1)

 $\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\\ \sin\phi\cos\theta\cos\psi + \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta\\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\$ 

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{1-\beta^2} & i\beta/\sqrt{1-\beta^2} \\ 0 & 0 & -i\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 1/\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}$$
(2.3)

これらの行列は、

 各列あるいは各行を成分とするベクトルの長さが1(自分自身との内積 が1)  各列あるいは各行を成分とするベクトルは、他の列あるいは行を成分と するベクトルと直交している(内積が0)

という特徴がある (実際に確かめてみよう<sup>1</sup>)。このような行列を直交行列と呼ぶ。直交行列は二つの座標系の間の、回転による座標変換を記述する。

3次元空間に任意の座標系をとり、位置ベクトル(x, y, z)を考える。その 座標系を回転させて、新たな位置ベクトルが(x', y', z')となったとする。回転 によってベクトルの長さが変わらない事は直感的にわかるだろう。つまり、

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = x^{\prime 2} + y^{\prime 2} + z^{\prime 2}$$
(2.4)

である。直交行列による座標変換は、ベクトルの長さを変えない、という特 徴がある。その条件を正確に書き出すと、上記の二つの条件になる。

冒頭に示した 3 つの行列の物理的意味は何であろうか? (2.1) は、天空上 の赤道座標から銀河座標への座標変換を表す<sup>2</sup>。(2.2) は、人工衛星の姿勢が ( $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ) のオイラー角で表されるとき、人工衛星上の座標と天球座標の間の 変換を与える<sup>3</sup>。(2.3) は、静止している座標系とそれに対して速度  $\beta = v/c$  (cは光速; よって  $\beta \leq 1$ ) で等速運動している座標系の間のローレンツ変換を与 える。二つの等速運動している座標系の間で、モノの長さや時間は保存され ないことに注意しよう (時間や長さは伸び縮みする!)。保存されるのは、四 次元時空における世界距離なのである (これが特殊相対性理論の本質!)。

これら3つの物理的には全く異なる状況が、全く同じ数学で記述される事 がポイントである<sup>4</sup>。これらについて、以下に順に解説していく。

#### 2.2 天球座標

天文学では、天体の「見かけ」の位置を表すのに、仮想的な天球という概念を 用いる。宇宙が球であり、その中心に私たちがいる(地球がある)、というイ メージである。地球の自転軸を延ばしていって、天球とぶつかったところが、 点の北極。地球の赤道を拡げていって、天球とぶつかったところが天の赤道。

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>複雑な数式を扱うときには、"mathematica"のようなソフトウェアを使うと便利である。 (2.2)のように複雑な要素を持つ行列計算、ベクトル計算も簡単にできる。

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>たとえば、我々が開発している"JUDO2"を見てください (http://darts.jaxa.jp/astro/judo2)。天球上の位置を、赤道座標、銀河座標、黄道座標で切り替えてみることができます。

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>これについても私たちのグループで管理している、「すざく」衛星の観測ログを参考にして ください(http://darts.jaxa.jp/astro/tables/SUZAKU\_LOG.html)。各観測次期における 「すざく」衛星の姿勢がわかります。2008 年 10 月 19 日から 20 日にかけて、HESSJ1825-137.3 という天体が、(276.1943,103.9916,179.0000)というオイラー角で観測された、というように。 <sup>4</sup>なんて自然界って美しいんだ!、って、ときどき感動したりしませんか?



Figure 2.1: 天球、赤道、黄道の関係

地球の自転軸は、地球の公転面と垂直ではなく、23.°44 傾いている<sup>5</sup>。太陽が一年を通じて天球上で通る道を黄道と呼ぶが、黄道は天の赤道と23.°44 傾いている。太陽が天の赤道を南から北に横切る点が春分点、北から南に横切る点が秋分点。太陽が赤道面からいちばん北向きに離れる点が夏至点、南向きに離れる点が冬至点。文字通り、地球の公転運動によって、春分、秋分、夏至、冬至のときに太陽はこれらの点を通過する。

地球上の経度  $(0^{\circ} ~ 360^{\circ})$ 、緯度  $(-90^{\circ} ~ +90^{\circ})$ を定義し、それで地球上 の位置を表すように、天球上で、赤経  $(0^{\circ} ~ 360^{\circ})$ 、赤緯  $(-90^{\circ} ~ +90^{\circ})$ を 定義し、それによって天体の位置を表す。グリニッジ天文台 (経度= $0^{\circ}$ )が地 球上の経度の基準点であるように、赤経の基準点は春分点である。このよう に、天の赤道面を基準にした座標系が赤道座標である<sup>6</sup>。同様に天の黄道面を

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>地球自転軸の傾きは 41000 年の周期で、22.°2 から 24.°5 まで変化し、さらに 25800 年の 周期で歳差運動している (コマの首振り運動と同じ)。これによって、赤道座標系は時間ととも ずれていくので、いつの時点の地球自転軸に準じた赤道座標系かを明示する必要がある。現在普 通に使われているのは 2000 年分点であり、これを J2000 で表す。私が大学院に入った 1986 年 頃は 1950 年分点のほうが広く使われていて、これを、B1950 と表す。例として、ブラックホー ル天体、白鳥座 X-1 の赤経赤緯は、(299.°590, 35.°201) (J2000), (299.°120, 35.°065)(B1950) である。

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>天球の回転がまさに我々が日常使っている時刻と結びついているために、赤経を0°から 360°で表す代わりに、0時から24時で表すことがある。1時間が15°に対応する。通常通 り、1時間は60分、1分は60秒。時、分、秒に対応する部分をhh,mm,ss.sとしたとき、赤



Equatorial-Ecliptic-Galactic Conversion

Figure 2.2: 赤道座標、黄道座標、銀河座標の関係

基準にした座標系が黄道座標である。

地球上と同様、天球上でも方角を東西南北で表わす。天の北極の方向が北、 南極の方向が南、赤経が増える方向が東、減る方向が西。地球上(地球を外か ら見ている)と天球上(天球を内から見ている)で東西の向きが逆になってい ることに注意。つまり地図を拡げたとき、北が上向きなら東は右(右向きに経 度が増加する)。一方、「天球図」においては、北が上向きなら、東は左(左向 きに経度が増加する)。

もう一つ良く使われるのが、我々の銀河系(天の川)を基準に取った、銀 河座標である。銀河中心の方向が銀経=0度で(左向きに銀経が増加)、銀河面 が銀緯=0度に対応している。

経を、hh:mm:ss.s と表記する。また、一般的に 1 度は 60 分角、1 分角は 60 秒角。これを、  $1^{\circ} = 60', 1' = 60''$  と表記する。赤緯を分角、秒角で表わすことも多い。たとえば、ある天体 の赤経、赤緯を  $(281.^{\circ}00, -4.^{\circ}07)$  と書いても、 $(18:44:0.0, -4^{\circ}4'12'')$  と書いてもよい。

任意の天体の位置を、赤道座標、黄道座標、銀河座標で表すことができる。 図 2.2 は、これら3つの座標の間の変換を示したものである<sup>7</sup>。 たとえば、以下の3つは天球上で同じ位置を表わす<sup>8</sup>。

(赤経、赤緯)= $(\alpha, \delta)$ = $(281.^{\circ}00, -4.^{\circ}07)$ 

(銀経、銀緯)=(l,b)=(28.°463, -0.°204)

(黄経、黄緯)= $(\lambda, \beta)$ =(281.°608, 18.°927)

どうやってこのような座標変換を計算するのだろうか<sup>9</sup>?以下では、それ を考えてみよう。

#### 2.3 方向ベクトルと座標変換

赤経と赤緯を通常、 $(\alpha, \delta)$ で表す。長さが1で、 $(\alpha, \delta)$ の方向を表す方向ベクトル、pを考えよう。春分点の方向をx軸、赤道面上、赤経90度をy軸、北極をz軸、とする右手系を考えよう。方向ベクトルのxyz座標は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$
(2.5)

 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ になることを、当たり前だけど念のために確認しておこう。ここで定義したx, y, z軸の基底ベクトルを、それぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とすると、

$$\mathbf{p} = x\mathbf{e}_{\mathbf{x}} + y\mathbf{e}_{\mathbf{y}} + z\mathbf{e}_{\mathbf{z}} = (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
(2.6)

である。

黄道座標系に基づいた、x' 軸,y' 軸,z' 軸と、それぞれの基底ベクトル、  $\mathbf{e}'_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}'_{\mathbf{y}}, \mathbf{e}'_{\mathbf{z}}$  を考えよう。x' 軸は春分点を向いていて、x'y' 軸面が黄道面に一致している。同様に、銀河座標系に基づいた、x'' 軸,y'' 軸,z'' 軸と、基底ベク

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>この図を作った Fortran プログラムをホームページに上げておきますので、参考にしてください。

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup> ほぼ銀河面上 (銀緯が小さいことからわかりますね?)、銀河中心から 28.°5 離れて、X 線を強 く放射している領域で、「僕の好きな空」です。日本やアメリカの人工衛星で X 線観測、チリやハワ イの望遠鏡で赤外線観測をしました。すざく衛星の観測ログ、http://darts.jaxa.jp/astro/ tables/SUZAKU\_LOG.html にある、観測番号 (シークエンスナンバー) 500009010,500009020 の"GALACTIC\_RIDGE" が、我々が提案したこの空の観測です。また、このときの衛星の姿 勢を表すオイラー角が (281.0000,94.0700,184.4698) であることもわかります。

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>たとえば、http://heasarc.gsfc.nasa.gov/cgi-bin/Tools/convcoord/convcoord. pl などで、座標変換のサービスを提供している。

トル  $\mathbf{e}''_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}''_{\mathbf{y}}, \mathbf{e}''_{\mathbf{z}}$  を考える。x'' 軸は銀河中心を向いていて、x''y'' 平面は銀河面 と一致している。

式 (2.6) で定義した方向ベクトル p を、黄道座標系でも銀河座標系でも表わすことができる。

$$\mathbf{p} = (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}', \mathbf{e}_{\mathbf{y}}', \mathbf{e}_{\mathbf{z}}') \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}'', \mathbf{e}_{\mathbf{y}}'', \mathbf{e}_{\mathbf{z}}'') \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$
(2.7)

式 (2.5) と同じ関係が、黄道座標と (x', y', z') の間に、銀河座標と (x'', y'', z'')の間に、成立する。たとえば、ベクトル p の銀河座標を (l, b) とすると、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b \, \cos l \\ \cos b \, \sin l \\ \sin b \end{pmatrix}.$$
 (2.8)

これを逆に解いて、

$$\begin{pmatrix} l\\b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan^{-1}\left(y''/x''\right)\\ \tan^{-1}\left(z''/\sqrt{x''^2 + y''^2}\right) \end{pmatrix}$$
(2.9)

によって、銀河座標(l,b)を求めることができる。

以上まとめると、ある天体の赤経、赤緯  $(\alpha, \delta)$  を銀経、銀緯 (l, b) に変換 するには、式 (2.5) によって赤道座標系での方向ベクトルの 3 成分 (x, y, z) を 求め、それを式 (2.7) によって銀河座標系の 3 成分 (x'', y'', z'') に変換し、さ らに式 (2.9) を用いればよい。

### 2.4 直交変換と変換行列

基底ベクトル  $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$  で表される直交座標系と  $(\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_3}, \mathbf{e'_3})$  で表される直 交座標系の間の直交変換を考える (添字 1,2,3 が上で書いた xyz に対応)。これ らは、それぞれ互いに垂直な単位ベクトルの組だから、

$$\mathbf{e_1}^2 = \mathbf{e_2}^2 = \mathbf{e_3}^2 = 1, \mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_2} = \mathbf{e_2} \cdot \mathbf{e_3} = \mathbf{e_3} \cdot \mathbf{e_1} = 0$$
 (2.10)

$$\mathbf{e'_1}^2 = \mathbf{e'_2}^2 = \mathbf{e'_3}^2 = 1, \mathbf{e'_1} \cdot \mathbf{e'_2} = \mathbf{e'_2} \cdot \mathbf{e'_3} = \mathbf{e'_3} \cdot \mathbf{e'_1} = 0$$
(2.11)

片方の系のベクトルはもう片方の系のベクトルを使って表わすことがで きる。

$$\mathbf{e}_{1}' = a_{11}\mathbf{e}_{1} + a_{12}\mathbf{e}_{2} + a_{13}\mathbf{e}_{3}, \qquad (2.12)$$

$$\mathbf{e}_{2}' = a_{21}\mathbf{e}_{1} + a_{22}\mathbf{e}_{2} + a_{23}\mathbf{e}_{3}, \qquad (2.13)$$

16

$$\mathbf{e}'_{\mathbf{3}} = a_{31}\mathbf{e}_{\mathbf{1}} + a_{32}\mathbf{e}_{\mathbf{2}} + a_{33}\mathbf{e}_{\mathbf{3}}.$$
 (2.14)

行列表示すると、

$$(\mathbf{e}_{1}', \mathbf{e}_{2}', \mathbf{e}_{3}') = (\mathbf{e}_{1}, \mathbf{e}_{2}, \mathbf{e}_{3}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$
 (2.15)

(2.11)の条件より、この変換行列の各要素の間に、

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1,$$
 (2.16)

 $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0, a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0, a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0$ (2.17)

が成立する。また、(2.12)、(2.13)、(2.14) と、**e**<sub>1</sub>, **e**<sub>2</sub>, **e**<sub>3</sub>の内積を取ることにより、以下がわかる。

$$\mathbf{e}'_{1} \cdot \mathbf{e}_{1} = a_{11}, \ \mathbf{e}'_{1} \cdot \mathbf{e}_{2} = a_{12}, \ \mathbf{e}'_{1} \cdot \mathbf{e}_{3} = a_{13},$$
 (2.18)

$$\mathbf{e}'_{2} \cdot \mathbf{e}_{1} = a_{21}, \ \mathbf{e}'_{2} \cdot \mathbf{e}_{2} = a_{22}, \ \mathbf{e}'_{2} \cdot \mathbf{e}_{3} = a_{23},$$
 (2.19)

$$\mathbf{e'_3} \cdot \mathbf{e_1} = a_{31}, \ \mathbf{e'_3} \cdot \mathbf{e_2} = a_{32}, \ \mathbf{e'_3} \cdot \mathbf{e_3} = a_{33}.$$
 (2.20)

つまり、式 (2.15) で定義される変換行列の 9 つの変換係数は旧座標系の 3 軸と新 座標系の 3 軸の間のなす 9 つの角度の余弦に対応している。これを、「 $e_1e_2e_3$  で 表わされる系における  $e'_1, e'_2, e'_3$  の方向余弦は、それぞれ ( $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ ), ( $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ ), ( $a_{31}, a_{32}, a_{33}$ ) である」、という言いかたをする。同様に、式 (2.18),(2.19),(2.20) を縦に眺 めると、「 $e'_1e'_2e'_3$  で表わされる系における  $e_1, e_2, e_3$  の方向余弦は、それぞれ ( $a_{11}, a_{21}, a_{31}$ ), ( $a_{12}, a_{22}, a_{32}$ ), ( $a_{13}, a_{23}, a_{33}$ ) である」ことがわかる。

よって、式 (2.12),(2.13),(2.14) の逆変換は、

$$\mathbf{e_1} = a_{11}\mathbf{e'_1} + a_{21}\mathbf{e'_2} + a_{31}\mathbf{e'_3}, \tag{2.21}$$

$$\mathbf{e_2} = a_{12}\mathbf{e'_1} + a_{22}\mathbf{e'_2} + a_{32}\mathbf{e'_3},\tag{2.22}$$

$$\mathbf{e_3} = a_{13}\mathbf{e'_1} + a_{23}\mathbf{e'_2} + a_{33}\mathbf{e'_3} \tag{2.23}$$

となる。

行列表示すると、

$$(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) = (\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$
 (2.24)

(2.10) の条件より、(2.16), (2.17) に対応する式は、  
$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1$$
 (2.25)

 $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0.$  (2.26)

式 (2.15) と式 (2.24) を比較すると、変換行列の行と列を入れかえた転置 行列が逆行列になっていることがわかる。

### 2.5 直交変換の簡単な記法

直交行列の性質を簡単に表す記法がある。まず、添字、1,2,3,4 を *i*, *j*, *k*, *l* などの文字で表す。Kronecker のデルタを導入する。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$
(2.27)

さらに、「同じ添字が対になって一つの項に現われるときには、常にその添字 について1から3まで(3次元空間の場合)あるいは1から4まで(4次元時空 の場合)の和をとる(2記号を省略する)」という総和の規約を導入する。する と、基底ベクトルの直交条件、(2.10),(2.11)は以下のように書ける。

$$\mathbf{e}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{j}} = \delta_{ij}, \mathbf{e}'_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{e}'_{\mathbf{j}} = \delta_{ij}. \tag{2.28}$$

二つの座標系の基底ベクトルと、変換行列との関係は以下のようになる。

$$\mathbf{e}'_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{j}} = a_{ij}, \ \mathbf{e}'_{\mathbf{i}} = a_{ij}\mathbf{e}_{\mathbf{j}}, \ \mathbf{e}_{\mathbf{i}} = a_{ji}\mathbf{e}'_{\mathbf{j}}.$$
(2.29)

座標軸の直交関係を表わす (2.16),(2.17),(2.25),(2.26) は、

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \tag{2.30}$$

となる。

### **2.6** 座標変換の計算

(2.7) と (2.24) を合わせると、

$$\mathbf{p} = (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}', \mathbf{e}_{\mathbf{y}}', \mathbf{e}_{\mathbf{z}}') \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}', \mathbf{e}_{\mathbf{y}}', \mathbf{e}_{\mathbf{z}}') \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$
(2.31)

`

よって、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
 (2.32)

これが、二つの座標系における方向ベクトルの3成分、(x, y, z) と(x', y', z') との間の変換式である。

### 2.7 スカラー三重積と行列式

もうひとつ、直交行列の性質として、その行列式の値は1である、と言うこ とがある。これを証明してみよう。

まず、ベクトルの外積の復習をしておこう。3 次元のベクトル A, B の外 積を O とする<sup>10</sup>。

$$\mathbf{O} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}.\tag{2.33}$$

O は、A から B の向きに右ネジを回したときに、ネジが進む方向を向くベクトルで、その大きさは、A と B がなす角を $\theta$ とすると、 $|A||B|\sin\theta$ で与えられる (A と B を二辺とする平行四辺形の面積)。また、各成分は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} O_x \\ O_y \\ O_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$
(2.34)

一般的に、ベクトルA,B,Cのスカラー三重積は、

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$
(2.35)

で定義される。A, B, C がこの順に右手系をなすとき、スカラー三重積は、この 3つのベクトルが作る平行六面体の体積を表わす。 スカラー三重積を A, B, C の直角成分を用いて書くと、

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A_x B_y C_z + A_y B_z C_x + A_z B_x C_y - A_x B_z C_y - A_y B_x C_z - A_z B_y C_x$$
(2.36)

$$= \begin{vmatrix} A_{x} & A_{y} & A_{z} \\ B_{x} & B_{y} & B_{z} \\ C_{x} & C_{y} & C_{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{x} & B_{x} & C_{x} \\ A_{y} & B_{y} & C_{y} \\ A_{z} & B_{z} & C_{z} \end{vmatrix}.$$
(2.37)

ここで、|A| は行列 A の行列式を示す。上記で定義した直交座標系の基底ベクトル e<sub>1</sub>, e<sub>2</sub>, e<sub>3</sub> または e'<sub>1</sub>, e'<sub>2</sub>, e'<sub>3</sub> が作る平行六面体の体積は当然 1 なので、

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>ベクトルとベクトルの内積はスカラー。ベクトルとベクトルの外積はベクトル。よろしいですね?

それらのスカラー三重積は1、つまり直交変換の変換行列の行列式の値は1である。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$$
(2.38)

3x3行列の行列式の計算方法から

 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = 1$  (2.39)

である。

### Chapter 3

## オイラー角と座標変換

### 3.1 オイラーの定理

今、共通の原点を持つ二つの直交座標系の間の座標変換(点のまわりの回転変位)を考えているのだが、この場合に以下のオイラーの定理が成立する。

定理 I 点のまわりの回転変位は、その点を通る1つの軸のまわりの回転によって達っせられる。

これを、すでに学んだ直交行列の性質から簡単に証明することができる。回転変位を実現する回転軸に沿った方向ベクトルはその変換によって不変だから、そのベクトルの3成分を(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, z<sub>0</sub>)と書けば、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$
 (3.1)

ここで変換行列を単純にAと書いた。これは、直交行列Aに対して、 $(x_0, y_0, z_0)$ が固有ベクトルであり、固有値が1であることを示している。単位行列Iを持ちいると、上式は、

$$(A-I)\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$
(3.2)

と書ける。つまり、行列 A - I には逆行列が存在しない。その条件は、行列 式が0 であること、

$$|A - I| = 0 (3.3)$$

である。ところで、Aの転置行列  ${}^{t}A$  はAの逆行列だから、

$$(A - I)^{t}A = I - {}^{t}A. ag{3.4}$$

ここで両辺の行列式を取り、転置行列の行列式は元の行列式と等しいこと、回転行列の行列式は1であること(式 2.38)を持ちいると、

$$|A - I| = |I - A|. (3.5)$$

一般に、 *n* × *n* 行列 *B* の行列式について、

$$|-B| = (-1)^n |B| \tag{3.6}$$

が成立する。今考えている 3 次元行列については、|I - A| = -|A - I|である。よって、(3.5)は(3.3)を示していることがわかる。

### 3.2 オイラー角

変換行列は9つの要素を持つわけだが、独立な要素は3つである。これは、オ イラーの定理より、任意の直交変換は回転軸の方向(2つの変数で決まる)と そのまわりの回転角(3つめの変数)を与えれば実現できることから理解で きる。その3つの変数を指定すれば、二つの座標系の間の変換を一意的に定 義したことになる。

座標変換を表わす3つのパラメーターとして良く使われるものにオイラー 角がある。オイラー角にもいろいろな定義があるが、ここでは日本の科学衛 星の姿勢に使われている「zyz」オイラー角の定義を用いて議論を進める。

赤道座標の上で、2.3節で定義した、x,y,z軸を考える(x軸は春分点、z 軸は北極を向いている)。たとえばこれが人工衛星の三軸だったら、今から定 義するオイラー角は人工衛星の姿勢を与えることになるし、別の座標軸だっ たら、オイラー角は異なる天球座標系の間の変換を与える。

z軸の周りに、+zの向きを向いて時計周りに角度  $\phi$  回転し、x軸、y軸の 位置を変える。この新たな 3 軸を、便宜上 x'y'z' としよう (z = z' である)。次 に、y' 軸の周りに、角度  $\theta$  回転し、x'z' 軸の位置を変え、x''y''z'' 軸を定義す る (y' = y'' である)。最後に、z'' 軸の周りに  $\psi$  回転し、最終的に、x''',y''',z'''軸を定義することができる。xyz 軸による旧座標系と、x'''y'''z''' 軸による新 座標系の間の関係を与える ( $\phi, \theta, \psi$ ) を、オイラー角と呼ぶ。

このように定義したオイラー角と、(2.15)または(2.24)で与えられる変換 行列との関係を調べてみよう。まず、最初のz軸のまわりの $\phi$ 回転で、新た な基底ベクトルと元の基底ベクトルの間の関係は以下のようになる。

$$(\mathbf{e}_{1}', \mathbf{e}_{2}', \mathbf{e}_{3}') = (\mathbf{e}_{1}, \mathbf{e}_{2}, \mathbf{e}_{3}) \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0\\ \sin \phi & \cos \phi & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 (3.7)

同様にして、y'軸周りの $\theta$ 回転によって、

$$(\mathbf{e}_{1}^{\prime\prime}, \mathbf{e}_{2}^{\prime\prime}, \mathbf{e}_{3}^{\prime\prime}) = (\mathbf{e}_{1}^{\prime}, \mathbf{e}_{2}^{\prime}, \mathbf{e}_{3}^{\prime}) \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
 (3.8)

z''軸周りの $\psi$ 回転によって、

$$(\mathbf{e}_{1}^{\prime\prime\prime}, \mathbf{e}_{2}^{\prime\prime\prime}, \mathbf{e}_{3}^{\prime\prime\prime}) = (\mathbf{e}_{1}^{\prime\prime}, \mathbf{e}_{2}^{\prime\prime}, \mathbf{e}_{3}^{\prime\prime}) \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 (3.9)

以上、3式をまとめて、

ら、条件(2.30)と(2.38)を満たしていることに注意しよう<sup>1</sup>。

### 3.3 赤道座標から黄道座標への変換

春分点を指している x 軸の周りの回転を考えると速い。回転角  $\theta = 23.^{\circ}43929$ である<sup>2</sup>。元の基底ベクトルを  $\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}, 新たな基底ベクトルを \mathbf{e'_x}, \mathbf{e'_y}, \mathbf{e'_z}$  よすると、

$$(\mathbf{e}'_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}'_{\mathbf{y}}, \mathbf{e}'_{\mathbf{z}}) = (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91748 & -0.39778 \\ 0 & 0.39778 & 0.91748 \end{pmatrix}.$$
(3.12)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>手計算は面倒だが、mathematica を使えば一瞬で計算してくれる。しかし、ある程度は 自分の手を動かすことを覚えておいたほうが良い。

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>正確な出典はわからなかったのだが、HEASARC の coco ではこの値を使っているので、 ここではそれに倣うことにした。

$$(\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}}) = (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}', \mathbf{e}_{\mathbf{y}}', \mathbf{e}_{\mathbf{z}}') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91748 & 0.39778 \\ 0 & -0.39778 & 0.91748 \end{pmatrix}.$$
 (3.13)

よって、赤道座標での方向ベクトルの3成分を(x, y, z), 黄道座標での成分を(x', y', z')としたとき、(2.32)より、

$$\begin{pmatrix} x'\\y'\\z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0.91748 & 0.39778\\ 0 & -0.39778 & 0.91748 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$$
(3.14)

が、赤道座標から黄道座標への変換を与える。15ページの例を考えてみよう。 赤経、赤緯が (281.°000, -4.°070) のとき、(2.5) で与えられる、その方向ベ クトルは、(0.19033, -0.97915, -0.0709752) となる。(3.14) より、黄道座標に おける方向ベクトルは、(0.19033, -0.92658, 0.32437) となる。(2.9) と同様に して、

$$\tan^{-1}\left(\frac{-0.92658}{0.19033}\right) = -78.^{\circ}3923 = 281.^{\circ}608.$$
$$\tan^{-1}\left(\frac{0.32437}{\sqrt{-0.92658^2 + 0.19033^2}}\right) = 18.^{\circ}927.$$

このようにして、黄経、黄緯が得られた。

### 3.4 赤道座標から銀河座標への変換

銀河中心の赤経、赤緯は (266.°40500, -28.°93617) だから、z 軸の周りの  $\phi = 266.°40500$ , さらに回転後の y' 軸の周りの  $\theta = 28.°93617$  の回転で、x'' 軸が 銀河中心を指すことがわかるだろう。しかし、それだけでは銀河面の傾きが 決まっていない。さらに x'' 軸の周りで  $\psi = 58.°59866$  回転してやれば、正し く銀河座標系が定義されることがわかっている (図 3.1)。銀河座標系の基底ベ クトルを三重ダッシュつきで表わすと、(3.10) を参考にして、

$$(\mathbf{e}_{\mathbf{x}}^{\prime\prime\prime}, \mathbf{e}_{\mathbf{y}}^{\prime\prime\prime}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}}^{\prime\prime\prime}) = (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}}) \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi\\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$
(3.15)

逆変換は以下のようになる。

$$(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}) = (\mathbf{e_x'''}, \mathbf{e_y'''}, \mathbf{e_z'''}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(3.16)$$



Equatorial-->Galactic Conversion Third Step



Figure 3.1: 赤道座標から銀河座標への変換

$$= (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}^{\prime\prime\prime\prime}, \mathbf{e}_{\mathbf{y}}^{\prime\prime\prime\prime}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}}^{\prime\prime\prime\prime}) \begin{pmatrix} -0.0548755 & -0.873437 & -0.483835\\ 0.49411 & -0.44483 & 0.746982\\ -0.867666 & -0.198076 & 0.455984 \end{pmatrix}.$$
 (3.17)

よって、赤道座標での方向ベクトルの3成分を(x, y, z),銀河座標での成分を(x''', y''', z''')としたとき、(2.32)より、

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0548755 & -0.873437 & -0.483835 \\ 0.49411 & -0.44483 & 0.746982 \\ -0.867666 & -0.198076 & 0.455984 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
(3.18)

が、赤道座標から銀河座標への変換行列を与える。これがノートの先頭で与 えた、式 (2.1) である。

赤経、赤緯が(281.°000, -4.°070)のときの方向ベクトル、(0.19033, -0.97915, -0.0709752) を上式に代入し、銀河座標における方向ベクトルは、(0.879122, 0.476581, -0.00355986) となる。これから、

$$\tan^{-1}\left(\frac{0.476581}{0.879122}\right) = 28.^{\circ}463$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{-0.00355986}{\sqrt{0.879122^2 + 0.476581^2}}\right) = -0.^{\circ}204$$

となり、正しい銀経、銀緯が得られた。

### Chapter 4

## 人工衛星の姿勢

### 4.1 天文衛星による観測

人工衛星に固定した衛星座標系 XYZ を考える (図 4.1) JAXA 宇宙科学研究所 が製作する多くの科学衛星では、スピン軸が衛星の+Z 軸、衛星の太陽電池パ ネルは+Y 軸の方向を向いていて、観測方向(望遠鏡が向いている方向)は+Z 軸方向である<sup>1</sup>。

+分な発電量を得るため、+Y軸は、常に太陽の方向を向いている必要が ある<sup>2</sup>。季節によって、太陽は黄道上を移動し、+Z軸方向を観測するので、観 測ターゲットは、太陽と約 90°をなす大円上になくてはならないことがわか る。また、黄道座標の北極 (North Ecliptic Pole; NEP) と南極 (South Ecliptic Pole; SEP) は、一年中観測可能であることがわかる。

自転軸のまわりにくるくるとスピンしながら、全天をくまなくサベイ観測 する科学衛星がある。ドイツの ROSAT 衛星 (X線)、日本のあかり衛星(赤外 線)などである。これらの衛星のスキャンパスをみると、NEP と SEP を通る 大円になっていることがわかる。たとえば、http://plain.isas.jaxa.jp/ ~ebisawa/Planetarium/RASS\_AIT.jpg を参考に。これは、ROSAT 衛星の データを赤道座標で表し、Hammer-Aitoff 投影法で表示したものである<sup>3</sup>。画 像処理をしていないので、スキャンのパスがよくわかる。スキャンパスが集 束している右上の点が NEP、左下の点が SEP である。

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>国や宇宙機関によって衛星座標系の定義が違うので注意が必要である。

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>太陽と+Y 軸のなす角を「太陽角 (solar angle)」と言う

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>球を平面に投影するのに、いろいろな投影法がある。世界地図と同じ事。メルカトール図 法とか、モルワイデ図法とか、小学校の社会科で勉強しませんでした?http://plain.isas. jaxa.jp/~ebisawa/Planetarium/ などを参考に



Figure 4.1: 人工衛星の三軸と視野

他の衛星についても同様である。日本の「あすか」衛星は全天サベイ衛星 ではないが、姿勢変更のときは、やはり太陽方向のY軸を中心として回転する ので、その間の観測パスはNEP, SEPを通ることになる。姿勢制御中のデータ を解析したものが、下の論文の図1にある。銀河座標、黄道座標で表示してあ る。銀河座標ではNEPは左上、SEPは右下に来る事に注意。http://plain. isas.jaxa.jp/~ebisawa/TEACHING/2007Komaba/nikko\_proceeding.pdf

日本の「あかり」衛星は赤外線全天サベイ衛星である<sup>4</sup>。たとえば、http:// www.ir.isas.jaxa.jp/ASTRO-F/Outreach/results/IRC\_AllSky\_red.jpg や、http://www.ir.isas.jaxa.jp/ASTRO-F/Outreach/results/PR081119/ IRC09AllSky01\_ss.png を見てみよう(銀河座標)。よ~く見ると、スキャン パスが NEP、SEP を通っていることがわかるだろう。

### 4.2 人工衛星の姿勢とオイラー角

天球に対する人工衛星の姿勢を、オイラー角を使って表わすことができる。Z 軸を天の北極、X 軸を春分点、Y 軸を赤経=90° が衛星の初期姿勢で、そ こから ZYZ の順に回転させていった3つのオイラー角で、衛星の姿勢を定義 する。

衛星のオイラー角と、観測している視野の関係は大切である。ZYZ のオイ ラー角を  $(\phi, \theta, \psi)$  としよう。衛星の+Z 軸が観測装置が見ている方向だから、 赤経 (R.A.)、赤緯 (Dec.) は、

$$R.A. = \phi, Dec. = 90^\circ - \theta \tag{4.1}$$

で与えられることがただちにわかるだろう。

第3オイラー角、 $\psi$ は、観測装置がターゲットの周りに回転する角、いわゆるロール角を与える。慣習として、ロール角は、天の北から観測装置の+Y軸 (DETY) へ、反時計周りに計った角を使う<sup>5</sup>。第3オイラー角とロール角 (ROLL)の関係は、

$$Roll = 90^{\circ} - \psi \tag{4.2}$$

で与えられる。

人工衛星を使って天体を観測する場合、オイラー角を指定して衛星の姿勢 を決める必要がある。第一,第二オイラー角は天体の位置から決まるわけだ が、第三オイラー角は太陽パネル(Y軸)が太陽の方向を向かなくてはいけ ないという条件から、季節によって決まる。

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>あかりの全天スキャンを説明したアニメーションです。http://www.nikon.co.jp/ profile/technology/field/akari/index4.htm

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>地球上では、通常、方位角は北から時計周りに計った角で定義する。経度が増える向きが 地球と天球で反対のため、こうなる。

### 4.3 観測ターゲットと季節の関係

人工衛星による実際の観測においては、観測ターゲットの天球上での位置と 季節 (太陽の天球上での位置) に応じて、オイラー角を決定する必要がある<sup>6</sup>。 NEP は一年中観測できるので、ポピュラーな領域である。季節によって、NEP を観測するためのオイラー角を考えてみよう。NEP の赤経,赤緯は、天球上 の X 軸が春分点、Z 軸が天の北極を向いている状態から、X 軸の周りに 23.°4 回転したときに新たな Z 軸が向く方向だから、( $\alpha$ , $\delta$ ) = (270°,66.°6) で与え られることはわかるだろう (14 頁の図参照)。これが観測方向(衛星の Z 軸) になることから、最初の二つのオイラー角は決まり、 $\phi$  = 270°, $\theta$  = 23.°4 で ある。衛星の Z 軸、Y 軸の周りに連続してこの二つの回転をおこなった時点 で、衛星の Y 軸は春分点を向いている事に注意しよう。Z 軸の回りの第三オ イラー角  $\psi$  の回転によって、Y 軸は太陽と同じ向きに黄道上を移動する。よっ て,太陽パネル(衛星の+Y 軸方向)が太陽の方向を向くという条件は、以下 のようになる事を理解しよう<sup>7</sup>。

春分のとき  $\psi = 0^{\circ}$ 

夏至のとき  $\psi = 90^{\circ}$ 

秋分のとき  $\psi = 180^{\circ}$ 

冬至のとき  $\psi = 270^{\circ}$ 。

具体的な例を見てみよう。「すざく」衛星は、今までこの近傍を7回観測 している。その時期とオイラー角は以下の通りである。

2006-06-10 (270.67, 22.36, 87.93), (シークエンス番号=701012010) 2005-09-02 (272.79, 24.02, 159.07), (シークエンス番号=100018010) 2009-11-15 (270.05, 23.44, 232.82), (シークエンス番号=504070010) 2009-12-07 (270.05, 23.43, 255.35), (シークエンス番号=504072010) 2009-12-15 (270.05, 23.43, 261.93), (シークエンス番号=504074010) 2009-12-28 (270.04, 23.42, 284.63), (シークエンス番号=504076010) 2006-02-10 (272.82, 23.98, 323.70), (シークエンス番号=500026010)

実際の第三オイラー角によって、Y軸が太陽の方向を向いていることを確認しよう<sup>8</sup>。

SEP も一年中観測できるので、ポピュラーな領域である。SEP を観測す るためのオイラー角を考えてみよう。SEP の赤経,赤緯は、天球上のX 軸が 春分点、-Z 軸が天の南極を向いている状態から、X 軸の周りに 23.°4 回転し

<sup>8</sup>以下のようにして、観測情報を得ることができる。

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>こういう衛星運用も、宇宙科学研究所の研究者の大事な仕事である

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>これを間違えると、太陽電池パネルに陽が当たらなくて、衛星が死ぬことになる!

http://darts.isas.jaxa.jp/astro/judo2/meta\_info\_page/html/SUZAKU/500026010. html

なお、Y 軸は少々太陽からずれていても良い(太陽パネルに斜めに陽が当たると言うこと)。 Y 軸が完全に太陽の方向を向いているとき、太陽角=0度。すざく衛星の場合は、太陽角が25 度まで許される。それ以上太陽角が大きくなると、電力供給不足で人工衛星が危なくなる。

たときに新たな-Z 軸が向く方向だから、 $(\alpha, \delta) = (90^\circ, -66.^\circ 6)$  で与えられる ことはわかるだろう。これが観測方向(衛星の2軸)になることから、最初の 二つのオイラー角は決まり、 $\phi = 90^\circ, \theta = 156.^\circ 6$ である。衛星の Z 軸、 Y 軸 の周りに連続してこの二つの回転をおこなった時点で、衛星のY軸は秋分点 を向いている事に注意しよう。第三オイラー角 ψ は、太陽パネル (衛星の+Y 軸方向)が太陽の方向を向くという条件から決まる。それが以下のようになる 事を理解しよう。 春分のとき  $\psi = 180^{\circ}$ 夏至のとき  $\psi = 90^{\circ}$ 

秋分のとき  $\psi = 0^{\circ}$ 冬至のとき  $\psi = 270^{\circ}$ 。

#### 衛星座標から天球座標への変換 4.4

衛星のオイラー角を用いて、衛星座標と天球座標の変換を行うことができる。 観測装置の視野は、衛星座標に固定されている。それが、与えられた姿勢の とき、天球上のどこに投影されるか、という問題である。

衛星座標系と赤道座標系の基底ベクトル間変換は、(3.11)で与えられるの で、衛星の姿勢を表す ZYZ オイラー角を  $(\phi, \theta, \psi)$  とすると、衛星座標系に於 ける成分、(x<sup>'''</sup>, y<sup>'''</sup>, z<sup>'''</sup>)、と赤道座標系における成分、(x, y, z)、の間の変換は、 同じ行列を使って以下の通りである。

 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi \\ \sin\phi\cos\theta\cos\psi + \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi \end{pmatrix}$  $\begin{array}{c} \cos\phi\sin\theta\\ \sin\phi\sin\theta\\ \cos\theta \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} x^{\prime\prime\prime}\\ y^{\prime\prime\prime}\\ z^{\prime\prime\prime} \end{array} \right).$ 

(4.3)

具体的な例を考えてみよう。「すざく」衛星搭載のX線 CCD カメラは、 XY 軸に沿った、18'×18'の正方形の視野を持っている。その視野が、ある オイラー角で表される姿勢のときに、天球上のどこに来るか? それがわから なければ、いったい空のどこを見ているのかわからなくなってしまう。また、 視野が軸対称ではないので、拡がった天体を観測するときには、視野の傾き を正確に知る必要がある。図 4.1 からわかるように、CCD カメラの正方形の 視野に入ってくるX線は、天球上にそれを投影した正方形に含まれる領域か ら発せられたものである。CCD の中心にくる X 線の到来方向の方向ベクト ルは衛星座標系で(0,0,1)であることはただちにわかるだろう。それ以外の X線については到来方向の方向ベクトルは(0,0,1)から少しだけずれている。 その方向ベクトルをまず衛星座標系でもとめ、それをオイラー角を使って赤 道座標系に変換すれば、対応する天球上の位置がわかる。

2006 年 10 月 15 日から 17 日にかけておこなわれた銀河面観測のデータを 見てみよう (シーケンス番号=500009020)。http://darts.isas.jaxa.jp/ astro/judo2/meta\_info\_page/html/SUZAKU/500009020.html を見てみた らわかるように、この観測のオイラー角は以下の通りである。

$$\phi = 281.004, \theta = 94.078, \psi = 184.470. \tag{4.4}$$

さて、すざく搭載 X 線 CCD カメラは衛星の Z 軸の方向を向いており、その 18' × 18' の正方形の視野の辺は X 軸、Y 軸に沿っている。つまり、衛星の XY 平面上で、視野の 4 つの角は以下の XY 座標を持つことがわかる(単位 は度)。

$$(0.15, 0.15), (-0.15, 0.15), (-0.15, -0.15), (0.15, -0.15).$$
 (4.5)

また、人工衛星座標における、これら4つの角に対応する方向ベクトル (図 4.1 では赤で示した) は以下の通りであることがわかるだろう ( $0.15^\circ = 2.61799 \times 10^{-3}$  rad であることに注意。)。

$$\begin{pmatrix} 2.61799 \times 10^{-3} \\ 2.61799 \times 10^{-3} \\ 0.9999931 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.61799 \times 10^{-3} \\ -2.61799 \times 10^{-3} \\ 0.9999931 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.61799 \times 10^{-3} \\ -2.61799 \times 10^{-3} \\ 0.9999931 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.61799 \times 10^{-3} \\ 2.61799 \times 10^{-3} \\ 0.9999931 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$(4.4) \ \mathcal{E} (4.3) \ \mathbb{L}$$
代入して、この観測における、衛星座標上の方向ベクトル成

(4.4)を(4.3)に代入して、この観測における、衛星座標上の万向ベクトル成 分から天球座標上の方向ベクトル成分への変換は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0629713 & -0.979686 & 0.190394 \\ -0.084471 & -0.184856 & -0.979129 \\ 0.994434 & -0.0777398 & -0.0711144 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}.$$
 (4.7)

となる。これに (4.6) を代入すると、赤道座標系における X 線 CCD カメラの 4 隅の方向ベクトル成分は、

$$\begin{pmatrix} 0.187663 \\ -0.979827 \\ -0.0687141 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.192793 \\ -0.978859 \\ -0.068307 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.193123 \\ -0.978417 \\ -0.0735139 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.187993 \\ -0.979385 \\ -0.0739209 \end{pmatrix}.$$
(4.8)

であることがわかる。これを示経, 赤緯に直すには、(2.9)を用いれは良い。 結局、CCDカメラの4隅の赤道座標は、

$$(\alpha, \delta) = (280.842, -3.940), (281.142, -3.917), (281.166, -4.216), (280.866, -4.239).$$
(4.9)

であたえられる。JUDO2(http://darts.isas.jaxa.jp/astro/judo2/?center\_ lng=281.004&center\_lat=-4.078&zoom=40&coord=J2000&selectedLayer= SUZAKU\_PUBLIC\_FOV&Base=SUZAKU\_IMAGE&Top=SUZAKU\_IMAGE&TopAlpha=100&GraphicAlpha= 100)を使って、確認してみよう。実際、JUDO2の中ではまさに上記のよう な計算をして視野を描いている。

### Chapter 5

## 四元数と座標変換、人工衛星の 姿勢

### 5.1 四元数 (quaternion)

これまで見てきたように、オイラー角を用いて人工衛星の姿勢を記述することができる。また、オイラー角から得られる回転行列(式 3.11)を用いれば、 天球座標と衛星座標の変換が計算できる。

時々刻々と変化する人工衛星の姿勢を記述する「姿勢ファイル」の中身を 見てみよう。たとえば、「あすか」衛星の1993年9月28日の観測に対応する姿 勢ファイルはftp://ftp.darts.isas.jaxa.jp/pub/asca2/10010120/aux/ fa930928\_0641.1435.gz に置いてあるこれは FITS(Flexible Image Transportation System) という天文分野独自のフォーマットを持つが、その中身の 一部は以下のようなものである<sup>1</sup>。

2.335207979544103E+07	-3.664577454889666E-01
	4.253754826778572E-01
	5.598341700062809E-01
	6.093850355900631E-01
2.335208379541934E+07	-3.664573182646553E-01
	4.253649060520620E-01
	5.598375141751545E-01
	6.093896030552058E-01
2.335208779543787E+07	-3.664571463319929E-01
	4.253647582397316E-01

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>fv(http://heasarc.gsfc.nasa.gov/ftools/fv/) などのツールを使うと FITS ファイ ルを読むことができる。お試しあれ。

	5.598375515033529E-01
	6.093897753298769E-01
2.335209179521501E+07	-3.664635097319999E-01
	4.253653064430918E-01
	5.598271266903228E-01
	6.093951430157092E-01
2.335209579523355E+07	-3.664768211073824E-01
	4.253597832398843E-01
	5.598082237138666E-01
	6.094083582093963E-01

ー行目は、1993年の始まりからの経過秒、二行目のそれぞれの時刻に対する 4つの数が、そのときの人工衛星の姿勢を記述する単位四元数である。それぞれの時刻において、4つの数字の二乗和を計算してみよう。1になっているこ とがわかるだろう。

多くの場合、人工衛星の姿勢を記述するのに、四元数 (quaternion) が用 いられる。四元数を使うと、任意の座標変換を連続的に表現できる<sup>2</sup>、計算に 三角関数が必要ない、9 つの要素を持つ変換行列と比較して、パラメーターが 4 つだけなので計算量が少くて済む、等のメリットがあるので、人工衛星の姿 勢計算やコンピューターグラフィクスなどに広く用いられている。また、オ イラーの定理により、任意の座標変換はある回転軸のまわりの一回の回転で 表される訳だが、四元数を用いて座標変換を表現すると、その回転軸と回転 角が陽に表される。

#### **5.2** 四元数の性質<sup>3</sup>

四元数は19世紀にハミルトンによって発見されたそうだ。数学的な側面はと もかく、ここでは四元数の応用面について述べる。すぐ後に述べるように、ノ ルム (norm)が1である単位四元数 (unit quarternion)は、3次元直交座 標系の間の直交変換を記述する。

四元数は複素数の拡張として、以下のように定義される。

$$q \equiv \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z + w$$
, where  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2$ ,  $\mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{k}\mathbf{i} = \mathbf{j}$ . (5.1)

ここで、x, y, z, w は実数である。

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>たとえば、ZYZ で定義されるオイラー角を採用した場合、X 軸の周りの回転を記述するのはやっかいである。

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>この節と次節では ftp://ftp.cis.upenn.edu/pub/graphics/shoemake/quatut.ps.Z を参考にしています。このメモの著者の Ken Shoemake は、コンピューターグラフィクスに quaternion を導入した人らしい。

 $\mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{i}$ の左から $\mathbf{i}$ を掛けて $\mathbf{i}^2 = -1$ を使うと、

$$\mathbf{ijk} = -1 \tag{5.2}$$

が得られる。同様に、右から  $\mathbf{k}$ を掛けて  $\mathbf{k}^2 = -1$ を使うと、

$$-\mathbf{j} = \mathbf{i}\mathbf{k},\tag{5.3}$$

すなわち、

$$\mathbf{ik} = -\mathbf{ki},\tag{5.4}$$

が得られる。同様に、

$$\mathbf{j}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{j},\tag{5.5}$$

$$\mathbf{j}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{j},\tag{5.6}$$

である。

以上をまとめて、使いやすい形として、

$$\begin{cases} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \\ \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j} \end{cases}$$
(5.7)

とする。

四元数を以下のようにも表す。

$$q = [\mathbf{v}, w] = [(x, y, z), w] = [x, y, z, w].$$
(5.8)

**v**は、3次元空間のベクトルを表す。 $q = [\mathbf{v}, w], q' = [\mathbf{v}', w']$ とするとき、四元数同士の和は四元数であり、それは次のように定義される。

$$q + q' = [\mathbf{v}, w] + [\mathbf{v}', w'] \equiv [\mathbf{v} + \mathbf{v}', w + w'].$$
(5.9)

積については、以下のように考えられる。

$$qq' = [\mathbf{v}, w][\mathbf{v}', w'] = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + k\mathbf{z} + w)(x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{z} + w') \quad (5.10)$$
$$= xx'\mathbf{i}^2 + xy'\mathbf{i}\mathbf{j} + xz'\mathbf{i}\mathbf{k} + xw'\mathbf{i} + yx'\mathbf{j}\mathbf{i} + yy'\mathbf{j}^2 + yz'\mathbf{j}\mathbf{k} + yw'\mathbf{j}$$

$$+zx'\mathbf{k}\mathbf{i} + zy'\mathbf{k}\mathbf{j} + zz'\mathbf{k}^{2} + zw'\mathbf{k} + wx'\mathbf{i} + wy'\mathbf{j} + wz'\mathbf{k} + ww' \quad (5.11)$$
$$= -xx' + xy'\mathbf{k} - xz'\mathbf{j} + xw'\mathbf{i} - yx'\mathbf{k} - yy' + yz'\mathbf{i} + yw'\mathbf{j}$$

$$+zx'\mathbf{j} - zy'\mathbf{i} - zz' + zw'\mathbf{k} + wx'\mathbf{i} + wy'\mathbf{j} + wz'\mathbf{k} + ww' \quad (5.12)$$
$$= (yz' - zy')\mathbf{i} + (zx' - xz')\mathbf{j} + (xy' - yx')\mathbf{k}$$

$$+w(x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}) + w'(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) + ww' - xx' - yy' - zz' \quad (5.13)$$

 $= [\mathbf{v} \times \mathbf{v}' + w\mathbf{v}' + w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']. \quad (5.14)$ 

ここで、式の変形には、(5.7)を用いた。

四元数の積が可換でないことに注意 (異なる軸の周りの回転が可換でないことに対応している)。また、 $q'' = [\mathbf{v}'', w'']$ としたとき、

$$(qq')q'' = q(q'q'') \tag{5.15}$$

が成立する<sup>5</sup>。

定数や3次元ベクトルも、四元数表示することができる。sを実数の定数 としたとき、その四元数表示は、[0,0,0,s] = [0,s]。vを3次元ベクトルとし たとき、その四元数表示は、[v,0]。定数や3次元ベクトルを四元数表示した とき、それらを含む四元数の積に関して、以下は自明である。

$$sq = [\mathbf{0}, s][\mathbf{v}, w] = [s\mathbf{v}, sw] = qs,$$
 (5.16)

$$\mathbf{v}\mathbf{v}' = [\mathbf{v}, 0][\mathbf{v}', 0] = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}', -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'].$$
(5.17)

s,s'を四元数の定数、p,q,q'を任意の四元数としたとき、以下のように線型性が成立する。

$$p(sq + s'q') = spq + spq', \qquad (5.18)$$

$$(sq + s'q')p = sqp + s'q'p.$$
 (5.19)

四元数の共役 (conjugate) の定義と、その性質は以下の通りである。

$$q^* = [\mathbf{v}, w]^* \equiv [-\mathbf{v}, w].$$
 (5.20)

$$(q^*)^* = q, (5.21)$$

$$(pq)^* = \{ [\mathbf{v}, w] [\mathbf{v}', w'] \}^* = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}' + w\mathbf{v}' + w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']^*$$
$$= [\mathbf{v}' \times \mathbf{v} - w\mathbf{v}' - w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']$$
$$= [-\mathbf{v}', w] [-\mathbf{v}, w'] = q^* p^*, \quad (5.22)$$

$$(p+q)^* = p^* + q^*.$$
(5.23)

ノルムの定義と性質は以下の通りである。

$$N(q) \equiv qq^* = q^*q = w^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = w^2 + x^2 + y^2 + z^2, \qquad (5.24)$$

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>これはそんなに自明でないから、ぜひ自分で手を動かして確認しておこう。その証明に は、スカラー三重積に関する法則 (2.35) と、ベクトル三重積に関する法則、A×(B×C) = (A·C)B-(A·B)C, (A×B)×C = (A·C)B-(B·C)Aを使う。(おそらく) 力学の教科 書に書いてあるように、ベクトル三重積の展開式を以下のように覚えておく。(1) 展開式はカッ コ内のベクトルの一次結合であって、(2) 各ベクトルの係数は他の 2 つのベクトルの内積であ り、(3) その符号は三重積の中央のベクトルに対しては正、端のベクトルに対しては負である。
5.3. 四元数と回転<sup>7</sup>

$$N(qq') = (qq')^*(qq') = q'^*q^*qq' = N(q)q'^*q' = N(q)N(q^*), \qquad (5.25)$$

$$N(q^*) = N(q). (5.26)$$

特に、 ノルムが 1 である四元数を単位四元数 (unit quaternion) と呼ぶ。 *q* の 逆四元数を

$$q^{-1} = q^* / N(q) \tag{5.27}$$

で定義する。qが単位四元数であるとき、

$$q^{-1} = q^* \tag{5.28}$$

である。

## **5.3** 四元数と回転<sup>6</sup>

定理 II uを単位ベクトルとするとき、ノルムが 1 である単位四元数、 $q = [\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega]$  と、任意のベクトル v を空間成分とする四元数、 $p = [\mathbf{v}, 0]$  を 考える。 $p' = qpq^{-1} = [\mathbf{v}', 0]$  としたとき、 $\mathbf{v}'$  は、 $\mathbf{v} \in \mathbf{u}$ の周りに角度 2 $\Omega$  回転したものである。



Figure 5.1: ベクトル v を単位ベクトル u の周りに、 $2\Omega$  回転したものが、ベクトル v'.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>この節の議論は、有名な教科書、"Classical Mechanics" H. Goldstein に倣いました。

まず、幾何学的に考えよう。上図がここで考えている状況を図示したもの である。 $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP} \mathbf{c} \mathbf{u}$ の周りに 2 $\Omega$ 回転したものが、 $\mathbf{v}' = \overrightarrow{OQ}$ である。ここ で、 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ}$ であることに注目する。また、 $\overrightarrow{ON} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$ 、  $\overrightarrow{NV} = \cos 2\Omega (\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}), \ \overrightarrow{VQ} = \sin 2\Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ である。よって、

$$\mathbf{v}' = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \cos 2\Omega \left(\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}\right) + \sin 2\Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$
$$= (1 - \cos 2\Omega) \left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right)\mathbf{u} + \cos 2\Omega \mathbf{v} + \sin 2\Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$
(5.29)

一方、四元数の計算より、

$$p' = qpq^{-1} = [\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega][\mathbf{v}, 0][-\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega]$$
$$= [\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega][-\sin\Omega(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) + \cos\Omega\,\mathbf{v}, \sin\Omega\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}]$$
$$= [-\sin^2\Omega\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) + \sin\Omega\cos\Omega\mathbf{u}\times\mathbf{v} - \sin\Omega\cos\Omega(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) + \cos^2\Omega\mathbf{v} + \sin^2\Omega(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}, 0].$$
(5.30)

空間ベクトル部を取りだして、ベクトル三重積を展開して変形すると、

$$= -\sin^2 \Omega \mathbf{v} + \sin^2 \Omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} + 2\sin \Omega \cos \Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \cos^2 \Omega \mathbf{v} + \sin^2 \Omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}$$
$$= 2\sin^2 \Omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} + (\cos^2 \Omega - \sin^2 \Omega) \mathbf{v} + 2\sin \Omega \cos \Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$= (1 - \cos 2\Omega)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \cos 2\Omega \mathbf{v} + \sin 2\Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$
(5.31)

となり、式 (5.29) と式 (5.31) は完全に一致する。よって、定理 II が示された。  $p = [\mathbf{v}, 0]$  について、単位四元数 q, q' による回転を引き続いて行う場合を 考える。

$$q'(qpq^{-1})q'^{-1} = q'qpq^{-1}q'^{-1} = (q'q)p(q'q)^{-1}.$$
(5.32)

ここで、(5.15)、(5.22) を用いた。よって、以下の定理が得られた<sup>8</sup>。

定理 III 単位四元数 q による回転に引き続いて q' という回転を行うとき、その回転は q'q という新たな単位四元数で表わされる。

### 5.4 四元数と変換行列の関係

 $\mathbf{v} = x\mathbf{e_x} + y\mathbf{e_y} + z\mathbf{e_z}$ として、(5.29)または(5.31)の各成分を書き下してみる。ただし、

$$q = [\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega] \equiv [q_1, q_2, q_3, q_4] \tag{5.33}$$

とする。これが単位四元数であるという条件から、

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 (5.34)$$

 $\mathbf{v}'$ 

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>オイラー角を用いて、3つの回転を順次行う際の行列計算が非常に面倒くさかったことを 思いだそう (3.11式など)。四元数を用いると、回転はよりシンプルに記述できる。

#### 5.4. 四元数と変換行列の関係

#### である。 $\sin \Omega \mathbf{u} = q_1 \mathbf{e_x} + q_2 \mathbf{e_y} + q_3 \mathbf{e_z}$ であることを使う。

$$\mathbf{v}' = 2(\sin \Omega \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \ \sin \Omega \mathbf{u} + (2\cos^2 \Omega - 1)\mathbf{v} + 2\cos \Omega \ (\sin \Omega \mathbf{u}) \times \mathbf{v}$$

$$= 2(q_1 x + q_2 y + q_3 z)(q_1 \mathbf{e_x} + q_2 \mathbf{e_y} + q_3 \mathbf{e_z}) + (q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)(x \mathbf{e_x} + y \mathbf{e_y} + z \mathbf{e_z})$$

$$+ 2q_4 \left\{ (q_2 z - q_3 y) \mathbf{e_x} + (q_3 x - q_1 z) \mathbf{e_y} + (q_1 y - q_2 x) \mathbf{e_z} \right\}$$

$$= (\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}) \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_1q_2 - 2q_3q_4 & 2q_1q_3 + 2q_2q_4 \\ 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 \\ 2q_1q_3 - 2q_2q_4 & 2q_2q_3 + 2q_1q_4 & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
(5.36)

ここで、式 (5.35) で得られた  $3 \times 3$  変換行列を簡単のために A と表わした。 式 (5.36) の意味は以下の通りである。基底ベクトル  $(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$  を持つ座標系 で、(x, y, z) という成分で表わされるベクトル v を、式 (5.33) で表される四元 数によって回転し、v' というベクトルが得られたとき、同じ座標系における  $\begin{pmatrix} x \end{pmatrix}$ 

その成分は
$$A \left( \begin{array}{c} y \\ z \end{array} \right)$$
で与えられる。ここで考えたのは、ベクトルの変換 (回

転)であって座標変換ではないことに注意。

次に座標変換を考える。すなわち、 $(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$ という基底ベクトルそれ ぞれを、式 (5.33) で表される四元数によって回転し、新たな  $(\mathbf{e'_x}, \mathbf{e'_y}, \mathbf{e'_z})$ とい う基底ベクトルを定義したとき、v というベクトルの旧座標系における成分 (x, y, z)から新座標系における成分 (x', y', z')への変換を考える。その変換行 列は  $A^{-1} = {}^{t_A}$ で与えられることは自明だろう。よって、以前に式 (2.32) で定 義した変換行列と対比して書くと、

$$\begin{pmatrix} x'\\y'\\z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = {}^{t}A \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} q_{1}^{2} - q_{2}^{2} - q_{3}^{2} + q_{4}^{2} & 2q_{1}q_{2} + 2q_{3}q_{4} & 2q_{1}q_{3} - 2q_{2}q_{4}\\2q_{1}q_{2} - 2q_{3}q_{4} & -q_{1}^{2} + q_{2}^{2} - q_{3}^{2} + q_{4}^{2} & 2q_{2}q_{3} + 2q_{1}q_{4}\\2q_{1}q_{3} + 2q_{2}q_{4} & 2q_{2}q_{3} - 2q_{1}q_{4} & -q_{1}^{2} - q_{2}^{2} + q_{3}^{2} + q_{4}^{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}.$$
$$(5.37)$$
21 頁で述べたオイラーの定理を思いだそう。 $(a_{11}, a_{12}, ..., a_{33})$  の 9 つの成分を

21 頁で述べたオイラーの定理を思いだそう。 $(a_{11}, a_{12}, ., a_{33})$ の9つの成分を 持つ変換行列が与えられたとき、それに対応する回転軸と回転角はどうやって 求めたら良いだろうか?まず、(5.37)によって、 $(a_{11}, a_{33})$ から、対応する四 元数  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ を求める。37 頁の定理 II によって、 $q = [q_1, q_2, q_3, q_4] = [\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega]$  と書いたとき、その座標変換はベクトル  $\mathbf{u}$  のまわりの角度  $2\Omega$ の回転に対応している。

## 5.5 座標変換への応用

赤道座標から銀河座標への変換行列の式 (3.18) と式 (5.37) を比較してみよう。 これ q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, q<sub>4</sub> について解くことができて、

$$q_1 = 0.4832, q_2 = -0.1963, q_3 = -0.6992, q_4 = 0.4889$$
 (5.38)

が得られる。26頁の例にあるように、赤道座標における方向ベクトル (0.19033, -0.97915, -0.0709752 を空間成分に持つ四元数 p = (0.19033, -0.97915, -0.0709752, 0) を考える。上記の qを使い、定義に従って四元数の積を計算すると、

$$q^{-1}pq = (0.879122, 0.476581, -0.00355986, 0)$$
(5.39)

が得られる。この空間成分が銀河座標における方向ベクトルに対応している。 式 (3.18)を使った行列計算でも、四元数を使った計算でも同じ結果が得られ るというわけだ。

また、定理 II より、 $q = [\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega]$ として、この q パラメーターは、 単位ベクトル  $\mathbf{u} = (0.5539, -0.2250, -0.8016)$ の周りの  $2\Omega = 2 \times 60.^{\circ}73$ の回転に対応していることがわかる。3.4 節では、赤道座標から銀河座標への変換を3つのオイラー角(各座標軸の周りの回転)で表わしたが、これは上記で示される、一回の回転と等価である(定理 I 参照)。

## 5.6 人工衛星の姿勢への応用

四元数の具体的な応用例として、人工衛星の姿勢の平均や補間を考えよう。現 実的に、二つ(あるいはそれ以上)の人工衛星の姿勢の平均や、離れた時間の 間の姿勢の補完が必要になることがある。例えば、二つの姿勢計があり、そ の測定が少々違う場合、その平均をもっともらしい姿勢として採用すること がある<sup>9</sup>。また、姿勢ファイルにはとびとびの時刻(たとえば4秒ごと)におけ る姿勢が書かれているので、その間の時刻における姿勢は、二つの姿勢の補 間で決める必要がある。

元の姿勢 (通常、Z軸が天の北極、X軸が春分点の状態) をO、四元数pで 表わされる姿勢をP、四元数qで表わされる姿勢をQとする。下図からわか

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>私が「あすか」衛星の Slew(大きな姿勢移動) 中のデータを解析したとき、ジャイロを前 方から積分して決めた姿勢と、後方から積分した姿勢の平均を使うと、もっとも正確な姿勢が 得られることがわかりました。

るように、姿勢 P から Q への変換は、新たな四元数  $qp^{-1}$  で表されるはずである。



Figure 5.2: 四元数 p で表される姿勢から q で表される姿勢への変換は、四元 数  $qp^{-1}$  で表される。

 $qp^{-1}$ がわかれば、それを  $[\mathbf{u}\sin\Omega,\cos\Omega]$  と分解し、回転軸  $\mathbf{u}$ と回転角  $2\Omega$ がわかる。たとえば、その回転角のちょうど半分回転したのが、 $P \ge Q$ の平 均の姿勢になる。P から Q に姿勢が移動しているとき、その間の姿勢を計算 するには、回転角を経過時刻に合わせて補間してやれば良い。具体的には、姿 勢 P を持つ時刻を  $t_0$ 、姿勢 Q を持つ時刻を  $t_1$  とすると、その間の時刻 t にお ける姿勢は、四元数  $[\mathbf{u}\sin\Omega(t),\cos\Omega(t)]$  で与えられ、

$$\Omega(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \tag{5.40}$$

である。

## Chapter 6

# 特殊相対性理論

## 6.1 特殊相対性理論が必要になる場合

ここでは直交変換の応用として、特殊相対性理論について学んでみよう。等 速運動する二つの座標系 (慣性系<sup>1</sup>) のどちらでも物理法則が全く同じように 記述できる、というのが特殊相対性原理である (この宇宙に特別な慣性系は存 在しない)。光速はどちらの座標系でも同じ値を取るし、どちらの系からも相 手の系が同じように見える。その間の座標変換はローレンツ変換で与えられ、 以下に示すように、それは四次元時空における直交変換と考えても良い。し かし、ほとんどの場合、力学の問題を解くときに、私たちはローレンツ変換 や相対論的力学を知らなくても良い。それは何故だろうか?その答えは簡単 で、多くの場合扱っている速度が光速  $c(2.997925 \times 10^8 \text{ m/s})$ に比べてはるか に小さいからである<sup>2</sup>。

自然現象を記述する際に、どうしても特殊相対論が必要になってくる場合 が二つある。一つは光速に近い運動が巨視的に起こりうる宇宙現象を扱う場 合で、もう一つはミクロの世界でほぼ光速で運動している素粒子を扱う素粒 子物理学の世界である。たとえば、CERNのLHC (Large Hadron Collider) において、陽子は光速の0.999999991 倍の速度まで加速されるそうだ。以下 で示すように速度 v で運動している物体のエネルギーは $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$  倍に なるから、LHCの場合、これは約7400 倍である。陽子の静止エネルギーは 0.938 GeV なので、LHC で加速された陽子(と反陽子)は約7 TeV のエネル ギーを持つことになる。LHC では陽子と反陽子を合わせて14 TeV のエネル ギーで正面衝突させてそれらを破壊し、陽子、反陽子が宇宙に誕生する以前、 ビッグバン直後の状態を再現することによって、素粒子の起源、宇宙の起源

<sup>1</sup>重力の影響は無視できるということ。

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>高校の物理や大学一年レベルの力学で扱う式に c はでてこなかったはず。それらの式は、 以下に出てくる相対論的な式において光速を無限大としたときの近似になっている。

に迫る。

## 6.2 超光速運動 (super-luminal motion)

1981 年に初めて活動銀河 (クェーサー)の電波観測から超光速運動を報告した論 文 ("Superluminal expansion of quasar 3C273", Pearson et al. Nature, 1981, 290, 365) のアプストラクトはわずか一行、以下の通りである: "Maps of the radio structure of 3C273 show directly that it expanded with an apparent velocity 10 times the speed of light from mid-1977 to at least mid-1980."

活動銀河が電波を放出すること、しばしばそれがジェットのように中心天体から吹き出すように見えることはすでに知られていたが、それが中心天体から離れていく速度が光速を10倍以上も超えているように見えることが発見されたのである。これをどのように解釈したら良いだろうか?



Figure 6.1: 超光速運動の説明図。光を出すジェット (プラズマの固まり) が速 度 *v* で観測者に対して角度 θ で放出される状況を考える。*v* が光速に比べて無 視できないほど大きく、θ が小さいときに超光速運動が観測される。

図 6.2 で、上図がブラックホールからジェットが放出された瞬間 (速度 v、 観測者に対する角度  $\theta$ )、下図がそれから  $\Delta t$  経過したところである。前者の 時刻に放出された光を light A、後者の時刻に放出された光を light B としよ う。天体から観測者までの距離を D とすると、観測者が light A を受け取る 時刻は、light A が発せられてから D/c後である。一方、light B を受け取る のは、 $\Delta t + (D - v\Delta t \cos \theta)/c$ 後である。よって、観測者が light A を受けて から light B を受けるまでの経過時間は、 $\Delta t(1 - \cos \theta v/c)$  となる。また、観 測者にとっては、ジェットが視線方向と垂直に  $\Delta tv \sin \theta$  だけ移動したように 見える。よって、視線方向と垂直の見かけの速度は、

$$v_{app} = \frac{v\sin\theta}{1 - (v/c)\cos\theta} \tag{6.1}$$

となる。これを $\theta$ で微分して、それがゼロになる $\theta$ の値を求めると、 $cos\theta = v/c$ のときに  $v_{app}$  が最大値

$$v_{app}^{(max)} = \frac{v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{6.2}$$

を取ることがわかる。 v が c に近くなると、 $v_{app}^{(max)}$  が c よりも大きくなりうることががわかるだろう。

## **6.3** ローレンツ変換<sup>3</sup>

これまでに、3次元の直交変換が、天球座標の間の変換や人工衛星の姿勢に応 用されることを学んだ。さらに1次元を加えて4次元時空を考えると、同様 の直交変換が、特殊相対性理論にも使えることを見てみよう。

4次元空間における直交変換を考える。あるベクトルを元の基底で表した ときの成分が $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 、新しい基底ベクトルで表わしたときの成分を $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ とする。ベクトルの長さは不変なので、

$$s^{2} \equiv x_{1}^{2} + x_{2}^{2} + x_{3}^{2} + x_{4}^{2} = x_{1}^{\prime 2} + x_{2}^{\prime 2} + x_{3}^{\prime 2} + x_{4}^{\prime 2}$$
(6.3)

である。変換行列を $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$ と書くと、3次元のとき (2.30, 2.32) と全く同じように、

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \ a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \tag{6.4}$$

$$x'_{i} = a_{ij} x_{j}, \ x_{i} = a_{ji} x'_{j}$$
 (6.5)

が成立する。ここで、2.5節で述べたように、同じ添字については1から4ま での和を取る。

(x, y, z)を空間座標成分、tを時間とする。ある事象をある座標系 K で表わした「世界点」の座標を (x, y, z, t) する。下図のように、時刻 t = t' = 0 で 原点が K と一致し、K と相対的に速度 v で移動している座標系 K' を考え、 その事象を K' で表わした座標を (x', y', z', t') とする。

*c*を光速として、 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$ としよう ( $x_4$  が形式的に「虚時間」に対応していることに注意)。

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Jackson, "Classical Electrodynamics"の"第1版"を参考にしています (日本語訳も出ています)。特殊相対論に関しては、第2版よりも第1版の記述のほうがシンプルでわかりや すいと感じました。



Figure 6.2: 慣性系 K(x, y, z, t) に対し、慣性系 K'(x', y', z', t') が、+z 方向に 速度 v で進行している。

このとき、式(6.3)は、

$$s^{2} \equiv x^{2} + y^{2} + z^{2} - (ct)^{2} = x'^{2} + y'^{2} + z'^{2} - (ct')^{2}$$

$$(6.6)$$

となり、これは相対的に等速運動をしている二つの座標系において、 $s^2$  で定 義される「世界間隔」が不変量であることを示している。式 (6.5) で表わされ る (x, y, z, t) と (x', y', z', t') の間の変換がローレンツ変換で、式 (6.3) で表わ されるのがローレンツ不変量である。一般に、式 (6.3) で示されるように「長 さ」が不変で、式 (6.5) のローレンツ変換に従うベクトルを四元ベクトルと 呼ぶ。

特に、時刻 t = t' = 0 で両系の原点を出発した光を考える。光の波面は球面上に拡がっていくわけだが、時刻 t,t' における波面上の座標はそれぞれの系で、(x, y, z), (x', y', z')で、式 (6.6) は、

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, (6.7)$$

$$x^{\prime 2} + y^{\prime 2} + z^{\prime 2} = (ct^{\prime})^2 \tag{6.8}$$

を意味している。つまり、 *K* 系と *K'* 系がどのような相対速度で動いていようとも、どちらの系から見ても、光速は *c* である、という光速度一定の原理が得られた。

具体的な例を見てみよう。下図のように、K系のz軸 $(x_3$ 軸)のプラス方向に、K'系が速度vで動いている場合を考える。

この場合のローレンツ変換は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$
(6.9)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\gamma\beta \\ 0 & 0 & i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}.$$
(6.10)

ここで、

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},\tag{6.11}$$

cは光速である。この変換行列が、直交条件、(6.4)を満たしていること、転置行列が逆行列になっていること  $(a_{ij}^{-1}=a_{ji})$ を確認しておこう。

式 (6.9),(6.10) より、

$$x'_{3} = \gamma(x_{3} + i\beta x_{4}), \tag{6.12}$$

$$x_3 = \gamma (x'_3 - i\beta x'_4) \tag{6.13}$$

である。K'系の原点は $x'_3 = 0$ 、K系の原点は $x_3 = 0$ であるが、これらを代入すると、

$$x_3 = v t,$$
 (6.14)

$$x'_3 = -v \ t' \tag{6.15}$$

が得られる。(6.14) は、*K*′系の原点を*K*系で表わしたときの関係式、(6.15) は、*K*系の原点を*K*′系で表わしたときの関係式で、どちらも自明である。

3次元の直交変換は、座標系の間の空間回転を表わすのであった。同様に、 4次元の直交変換も、仮想的な回転で表すことができる。式、(6.9)を以下の ように書こう。

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$
(6.16)

 $\cos \psi = \gamma \ge 1$ からわかるように、ここで導入した角度  $\psi$  は仮想的なものであるが、ローレンツ変換を仮想的な座標軸の回転と考えても、以下で示すように、正しい結果が得られる。

K'系で、 $x'_3$ 軸に沿った、長さ  $L_0$ の棒を考えよう。K系から見ると、この棒は +z方向に、速度 v で走っていることになる。K でこの棒の長さを測



Figure 6.3: K'系で  $x'_3$ 軸に沿った長さ  $L_0$ の棒を、K系で測ったときの長さ  $ML_1$ 。

るときには、当然同時刻で測るから、それは、 $x_3$ 軸に沿った長さ $L_1$ になる。 図 6.3 から、

$$L_1 = L_0 / \cos \psi \tag{6.17}$$

だから、

$$L_1 = L_0 / \gamma = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} \le L_0.$$
(6.18)

よって、走っている棒は短く見える (ローレンツ収縮)。次に、K'系に固定 した点における経過時間  $T_0$ を考える。これを K系で測った時間  $T_1$  は、 $x_4$  軸 に沿って、

$$T_1 = T_0 \ \cos \psi = T_0 \ \gamma = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \ge T_0$$
 (6.19)

となる。つまり、動いている時計はゆっくり進んでいるようにみえる<sup>6</sup>。では、 *K*′系から*K*系を見たときはどうなるのであろうか?特殊相対性原理によっ て、互いに等速運動をしている系から、すべての物理法則は、全く同じに見 えなくてはいけない。

図 6.4 からわかるように、K 系の  $x_3$  軸に沿った棒の長さ  $L_2$  を K' 系で測定したときの長さ  $L_3$  は、

$$L_3 = L_2 / \cos \psi = L_2 / \gamma = L_2 \sqrt{1 - (v/c)^2} \le L_2$$
 (6.20)

となる。また、K系に固定された点が $T_2$ の時間経過するとき、K'系におけ

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>この現象は、例えば素粒子加速器実験では日々観測されている。素粒子固有の寿命 T<sub>0</sub> が ごく短くても、それを光速近くまで加速すると、我々が観測する寿命 T<sub>1</sub> は十分長くなるので、 そのビームを観測することができる。



Figure 6.4: K 系で $x_3$  軸に沿った長さ $L_2$ の棒を、K'系で測ったときの長さ  $M_{23}$ 。

る時間 T<sub>3</sub> は、

$$T_3 = T_2 \cos \psi = T_2 \gamma = T_2 / \sqrt{1 - (v/c)^2} \ge T_2$$
 (6.21)

である。式 (6.18) と (6.20)、(6.19) と (6.21) をそれぞれ比較することにより、 K から K'を見ても K' から K を見ても、まったく同じように見えることが わかる。

## 6.4 固有時間

式 (6.6) で示されるように、(x, y, z, ict)の長さはローレンツ不変量であるから、微少なベクトル (dx, dy, dz, ic dt)の長さもローレンツ不変である。すなわち、

$$-c^2 d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \qquad (6.22)$$

$$-c^2 d\tau'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2$$
(6.23)

と書いたとき、 $d\tau = d\tau'$ である<sup>7</sup>。 $d\tau$ は、K系の時計でdtの間に(dx, dy, dz)移動する物体とともに動く(dx = dy = dz = 0)観測者の測る時間、 $d\tau'$ は、K'系の時計で、dt'の間に(dx', dy', dz')移動する物体とともに動く(dx' = dy' = dz' = 0)観測者の測る時間である。つまり、物体とともに動く時計で測った時間は不変量であり<sup>8</sup>、この $\tau$ を固有時間と呼ぶ。

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>自明ではあるが、式(6.9)について、これが成立することを確認しておこう。 <sup>8</sup>だから、例えば1秒の絶対的な長さというものを定義することができる。

式 (6.22) を、

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$
(6.24)

と書くと、これはまさに式 (6.19) と同値で、動いている時計はゆっくり進ん でいるように見えることを示している。

#### 6.5 四元速度

すでに見たように、時空点の座標 (x, y, z, ict) やその微少変化量 (dx, dy, dz, ic dt)は四元ベクトルの一つである。これを不変量  $d\tau$  で割った

$$\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, ic\frac{dt}{d\tau}\right) \tag{6.25}$$

も四元ベクトルであり、これを四元速度と呼ぶ。これを式(6.24)を使って、

$$\gamma(v_x, v_y, v_z, ic) \tag{6.26}$$

と書ける。

四元速度の長さがローレンツ不変量であることを確認しておこう。

$$\gamma^2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - c^2) = \frac{v^2 - c^2}{1 - (v/c)^2} = -c^2.$$
(6.27)

## **6.6** 速度の変換則

先に考えた *K* 系で運動する物体を *K*′ 系で見たときの速度を考えよう。*K* 系 における物体の速度、*K*′ 系における物体の速度、*K* 系と *K*′ 系の相対速度を 区別する必要があることに注意。

先と同じく、K'系はK系の +z軸方向に、Kに対して速度vで動いているとする  $\left(\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}\right)$ 。物体の運動も、K系から見て +z軸方向とし、その速度をuとする  $(u_x = u_y = 0, u_z = u)$ 。K'系から見た物体の速度をu'とする (図 6.5)。また、 $1/\sqrt{1 - (u/c)^2} = \gamma_u, 1/\sqrt{1 - (u'/c)^2} = \gamma_{u'}$ とする。 ローレンツ変換の式 (6.9) と、四元速度の定義 (6.26) から、

$$\begin{pmatrix} \gamma_{u'}u'_{x} \\ \gamma_{u'}u'_{y} \\ \gamma_{u'}u'_{z} \\ \gamma_{u'}ic \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_{u}u \\ \gamma_{u}ic \end{pmatrix}.$$
 (6.28)

50



Figure 6.5: +z = +z'方向に運動している物体を *K* 系で測定したときの速度 が u、 *K'* 系で測定したときの速度が u'。

これから、

$$u'_x = u'_y = 0 (6.29)$$

$$\gamma_{u'} u'_z = \gamma \gamma_u (u - v) \tag{6.30}$$

$$\gamma_{u'} = \gamma \gamma_u \left( 1 - \frac{v}{c^2} u \right). \tag{6.31}$$

(6.30) と (6.31) から、

$$u_z' = \frac{u - v}{1 - v \, u/c^2}.\tag{6.32}$$

x', y'方向の速度成分がないことがわかったので、単純に、 $u'_{z} = u'$ と書くことにする。上式を解釈してみよう。まず、u = 0のとき、u' = -vであるが、 K系に静止しているものをK'系から見たら、-z'方向に速さvで遠ざかることは自明である。

日常生活においては、物体の移動速度は光速に比べてはるかに小さいの で、 $vu/c^2 = 0$ と近似してよい。すると上式はu' = u - vと言う、見慣れた式 になる<sup>9</sup>。

u = cのときには、vの値には関わらず、u' = cになる。これは光速度不変の原理に他ならない。u = -0.9c, v = 0.9cとしてみよう。非相対論的に考

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>地上でボールを時速 u = 100km で投げる。同じ方向に時速 v = 80km で進む列車から見ると、その速さは u - v = 100-80 = 20km であると考えるのが自然であるが、これは本当は正しくない。ここで、厳密に式 (6.32)を使うと、時速  $(20 + 7 \times 10^{-15}) = 20.00000000000000000$ km になる。

えると、K'系から見て、物体はu - v = -1.8cで遠ざかっていくことになるが、そんなことは実際にはありえない。式 (6.32は、-0.9945cを与える。物体の運動の速度が光速を越えることはありえないのだ。

## 6.7 四元運動量

四元速度に質量 m を書けたものを四元運動量と呼ぶ。すなわち、

$$m\gamma(v_x, v_y, v_z, ic) \tag{6.33}$$

$$\equiv (p_x, p_y, p_z, iE/c). \tag{6.34}$$

ここで、相対論的には運動量は

$$p = m\gamma v \tag{6.35}$$

で、エネルギーは、

$$E = m\gamma c^2 \tag{6.36}$$

で表されることを用いた。 $v/c \ll 1$ のとき、 $\gamma \approx 1 - \frac{1}{2} (v/c)^2$ を用いて、(6.36)は、

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.37}$$

と近似できる。最初の項が静止エネルギー、二番目の項が、ニュートン力学 における通常の運動エネルギーである。

(6.27)より、四元運動量の長さの二乗は $-m^2c^2$ だから、良く知られたエネルギーと運動量の間の関係式、

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \tag{6.38}$$

が得られる。

特に、光子など質量がゼロである素粒子の場合は、

$$E = p c. \tag{6.39}$$

光の波長を  $\lambda$ , 振動数を  $\nu$  とするとき、h をプランク定数として、光子のエネ ルギーは  $E = h\nu$ , 運動量は  $p = h/\lambda = h\nu/c$  で表わされることを思いだそう。 あたりまえだが、光子について、(6.38) が成立している。

## 6.8 ドップラー効果と光行差 (aberration)

電磁波の伝播を考えるとき、電磁波の波数ベクトルを k ( $|\mathbf{k}| = \omega/c$ )、角振動 数を  $\omega$  として、

$$(\mathbf{k}, i\omega/c) \tag{6.40}$$

は四元ベクトルである。その長さは、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \omega^2 / c^2 = 0 \tag{6.41}$$

となり、ローレンツ不変量であることがわかる。また、四元ベクトル、

$$(x, y, z, ict) \tag{6.42}$$

との内積をとると、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t \tag{6.43}$$

は、電磁波の位相を与え、これもローレンツ不変量である。

*K* 系と、その *z* 方向に速度 *v* で走る *K*′ 系の間のローレンツ変換の式 (6.9) と、四元速度の定義 (6.26) から、

$$\begin{pmatrix} k'_{x} \\ k'_{y} \\ k'_{z} \\ \omega' i/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{x} \\ k_{y} \\ k_{z} \\ \omega i/c \end{pmatrix}.$$
 (6.44)

波数の定義から  $|\mathbf{k}| = \omega/c$ 、  $|\mathbf{k}'| = \omega'/c$  で、ベクトル k が yz 平面にあり、 電磁波が進む向きと z 軸、 z' 軸のなす角を  $\theta, \theta'$  とすると、  $k_y = (\omega/c) \sin \theta$ 、  $k'_y = (\omega'/c) \sin \theta' k_z = (\omega/c) \cos \theta$ 、  $k'_z = (\omega'/c) \cos \theta'$  である。よって、(6.44) を書きくだすと、

$$\omega' \,\sin\theta' = \omega \,\sin\theta \tag{6.45}$$

$$\omega' \, \cos\theta' = \omega \, \gamma(\cos\theta - \beta) \tag{6.46}$$

$$\omega' = \omega \gamma \left(1 - \beta \cos \theta\right) = \frac{\omega}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \tag{6.47}$$

となる。式 (6.45) と (6.46) の比を取ると、

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta)} = \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2 \sin \theta}}{\cos \theta - v/c}$$
(6.48)

が得られる。

式 (6.47) は、光のドップラー効果に他ならない。 $v \ll c$ のとき、 $(v/c)^2$ の 項を無視すれば、これは

$$\omega' = \omega \,\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) \tag{6.49}$$

となり、音波の場合と同じように、非相対論的なドップラー効果を表す。 $(v/c)^2$ の項を無視できないとき、式(6.47)で、 $\theta = \pi/2$ 、光源が視線方向と垂直に運動しているときにも波長が変化することに注意。これを横ドップラー効果と呼ぶ。

式 (6.48) は、地球の公転運動によって、星からの光の到来方向が変化する 光行差 (aberration)を説明する (図 6.6)。地球の公転速度は、 $v \approx 30$  km/s,  $v/c \approx 10^{-4}$ である。地球の公転面と垂直方向から星の光がやってくるとき、  $\theta = 90^{\circ}$ なので、

$$\tan \theta' = -\frac{c}{v}\sqrt{1 - (v/c)^2}$$
(6.50)

である。

 $\tan(\theta' - \pi/2) = -1/\tan\theta'$ を使って、 $\theta' - \pi/2 = \alpha$ とすると(下図参照)



 $\tan \alpha = \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$ (6.51)

Figure 6.6: 光行差の説明。太陽系重心に固定した系で +z から $\theta$ の方向に星が見える場合、+z = +z'方向に速度vで運動している系(地球)からは、角度 $\theta'$ の方向から光が来るようにみえる。

非相対論的には、単純にベクトルの大きさから、

$$\tan \alpha = \frac{v}{c} \tag{6.52}$$

が得られるが、これは式 (6.51) で、 $(v/c)^2$ の項を無視した場合と一致する。  $v/c \approx 10^{-4}$ は、角度では  $\sim 20''$ に対応する。地球の公転のために、季節 (地球の公転運動の方向の違い)によって、星の見かけの位置は最大  $\pm 20''$  変 化する<sup>10</sup>。 $(v/c)^2 \approx 10^{-8}$ は、角度では  $\sim 2$  marcsec (ミリ秒角)に対応してい る。電波や光による干渉計や補償光学のような先端技術を用いれば、それほ どの高分解能による観測は可能なので、この補正が必要になる (7.4 節参照)。

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>光行差と年周視差を混同しないこと。後者は、地球の公転半径が、星の距離に比べ無視できないときに効いてきて、その大きさは星までの距離に依存する。

## Chapter 7

# 一般相対性理論」

今まで、天球上の異なる座標系の間の座標変換(式 2.1)、衛星座標と天球座標 の間の変換(式 2.2)、ローレンツ変換(式 2.3)が、三次元空間または四次元時 空における回転として、まったく同じ数学を用いて表現される事を見てきた。 これらの変換は、空間が歪んでいないので(=線形空間)、ベクトルの長さは保 存され、回転行列は場所にはよらなかった(=変換行列に、x, y, z, ctが含まれ ていない)。ここまでは歪んでいない世界を扱っていたので、このように簡単 な数学で物事が済んだ訳だが、現実の世界では、重力の影響で空間が歪んで くるので(=非線形空間)、変換行列が場所に依存し(=変換行列に、x, y, z, ctが含まれている)、数学的に複雑になってくる。物理的には、これは、重力が 存在する場合を扱うには、特殊相対性理論ではなくて一般相対性理論が必要、 ということに他ならない。

## 7.1 局所慣性系

互いに等速運動している座標系の間では、式(6.6)で与えられる四次元時空中 の二点間の「世界間隔」は不変量であった。二つの系の間の座標変換(ローレ ンツ変換)は、ベクトルの長さを変えない、四次元時空における回転を表す 「直交変換」と考えても良いことを見てきた。実は、これは重力を及ぼすモノ が存在せず、系が加速度運動をしていない場合にのみ成立する。この条件が 成立している座標系を慣性系と呼ぶ。慣性系では「時空が平坦」なので、世界 間隔は不変である。慣性系においては、ニュートンの第一法則が成立し、「静 止しているモノは静止しつづけ、等速運動しているモノは等速運動しつづけ

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>この節では、"Exploring Black Holes – Introduction to General Relativity", by Taylor and Wheeler, Addison Wesley Longman を参考にしています。日本語でも英語でも一般相対 性理論の教科書は山のようにありますが、僕が見た限り、これが一番直感的でわかりやすい教 科書でした(しかし数学的な導出とかは厳密ではありません)。

る」。例えば、慣性系で両手にボールを持って、そっとそれを離してみよう。 二つのボールの距離は不変で、それは静止しつづける。

いったいそんな系は現実に存在するのだろうか?現実の世界には完全な慣 性系は存在しないが、加速度運動による慣性力と重力は区別できないという 等価原理によって、重力と慣性力を打ち消しあった、局所慣性系を定義する ことができる。局所慣性系を作るもっとも手っ取り早い方法は、重力に身を 任せてしまうことである。たとえば、宇宙空間に浮かんで、加速、減速はせ ず、いろいろな天体からの重力に身を任せている宇宙船の中や、綱の切れた エレベーターの中は局所慣性系である(いわゆる「無重力状態」)。宇宙に行 くと重力がなくなる、と言うことはないことに注意。重力は宇宙のどこにで も存在する(万有引力の法則!)。重力に身を任せて自由落下することにより、 重力の効果を打ち消すことはできる、というのがポイント<sup>2</sup>。

たとえば、宇宙空間に漂っている(=加速も減速もしていない)巨大な宇宙 船を考えて、その中に互いに等速運動している局所慣性系を考えると、その あいだの座標変換はローレンツ変換で与えられる。慣性系は局所的にしか存 在できないことは、以下の思考実験でわかる。遠方から地球に向かって自由 落下する宇宙船を考えよう。あるいは、綱の切れたエレベーターの中でも良 い。ボールを4つ等間隔に配置する。もしこれが完全な慣性系で空間が歪ん でいないならば、ボールの間隔は変化しないはずだが、それぞれのボールは 地球の中心に向かって落ちていき、地球の中心に近いほうが重力加速度は大 きいので、やがてボール間の横方向の間隔は縮み、縦方向の間隔は伸びる。

このように、一つの系の中で場所によって重力が異なることによって見か け上生じる力を潮汐力と言う。潮汐力によって4つのボールの配置が変化し た、と考えても良いし、重力の影響で、時空が平坦でなくなったと考えても、 全く同じ事である (等価原理により、両者は区別できない)。潮汐力の影響が 無視できるほど小さな領域で局所慣性系 K を定義することができ、それに相 対運動する局所慣性系 K' との間の座標変換はローレンツ変換で与えられる。 一方、潮汐力の影響が無視できないほど大きな空間を含んだ系 L を定義する と、そこではニュートンの第一法則がなりたっていないので、これは慣性系 ではない。

一般に、グローバルな慣性系は定義できない(時空は一様でない)ので、 (6.6)は成立せず、代わりに、二つの局所慣性系座標の間に、

$$ds^{2} \equiv dx^{2} + dy^{2} + dz^{2} - (c \, dt)^{2} = dx'^{2} + dy'^{2} + dz'^{2} - (c \, dt')^{2}$$
(7.1)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>地上で「無(微小)重力実験」を行っている研究者は、実験カプセルを自由落下させる際 に無重力を実現する「微小重力実験塔」や、飛行機のエンジンを切って放物線飛行(パラボ リックフライト)する際に実現する微小重力状態を使っています。日本無重量総合研究所の ウェブサイト(http://www.mglab.co.jp)には、無重力実験の動画がいろいろあって面白い です。また、「無重力の町」北海道上砂川町には、世界で最大規模の無重力実験施設があった のですが、2003年に惜しまれながら閉鎖されたそうです(http://www.noobowsystems.com/ scenes/0108-zerogravity/zerogravity.html)。



Figure 7.1: ある系において、左側のようにボールが配置されていたのが、しばらく時間がたつと、右側のようになった。これは、地球の中心に向かって落下していくエレベーターの中を模式的に示したもの。

が成立する。*ds*<sup>2</sup> をメトリック(計量)と呼ぶ。一般相対性理論によれば、任意の座標変換に対して、局所的な世界間隔は不変である。

## 7.2 シュワルツシルド時空

質量 M を持ち、回転していない球対称な天体を考えよう。重力の影響により、 その周りの時空は平坦ではない。それを、シュワルツシルド時空と呼ぶ<sup>4</sup>。そ の名前は、そのような状況を一般相対論で記述するアインシュタイン方程式 の解を、シュワルツシルドが発見した事による。

球対称だから、世界間隔を表わすのに、極座標を用いると便利である。天体の近く、動径座標 r の球殻上の観測者が計る時間を dt<sub>shell</sub>、r に沿って直接 測る距離を dr<sub>shell</sub> とすると、

$$ds^{2} = dr_{shell}^{2} + r^{2} d\phi^{2} - c^{2} dt_{shell}^{2}$$
(7.2)

である。ここで、動径座標 r は円周を  $2\pi$  で割った量として定義される<sup>5</sup>。 十分遠方の観測者が乗っている座標を  $r, \phi, t$  とすると、メトリックは

$$ds^{2} = \frac{dr^{2}}{1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}} + r^{2} d\phi^{2} - c^{2} \left(1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}\right) dt^{2}$$
(7.3)

と書けることがわかっている。これをシュワルツシルドメトリックと呼ぶ。cは光速、Gは万有引力定数である。 $2GM/c^2$ が、質量 Mの天体のシュワルツシルド半径である。

<sup>4</sup>回転している天体の周りの時空がカー時空である。

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>たとえばブラックホールの場合は、シュワルツシルド半径より内側が見えないので、半径 を直接測れない。

太陽と地球のシュワルツシルド半径は覚えておこう。 $G = 6.6726 \times 10^{-11}$ m<sup>3</sup>/kg/s<sup>2</sup>、 $c = 2.9979 \times 10^8$ m/s、太陽質量= $1.989 \times 10^{30}$ kg、地球質量= $5.9742 \times 10^{24}$ kgだから、太陽のシュワルツシルド半径は、2.95km、地球のシュワルツシルド半径は8.87mm<sup>6</sup>。

(7.2) と(7.3) を比較して、

$$dr_{shell} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}} \ge dr \tag{7.4}$$

(7.4) は、直接測った動径方向の長さは、円周を  $2\pi$  で割った長さよりも長いことを示している。具体的な例を考えてみよう。仮に太陽質量のブラックホールがあり (シュワルツシルド半径は 2.95 km)、r = 4 km から r = 5 km までの距離を直接、巻き尺を使って計ってみよう。その長さは、

$$\Delta r_{shell} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{r} \, dr}{\sqrt{r - 2GM/c^2}}.$$
(7.5)

ここで、 $r = z^2$ とすると、ちょっと面倒だが積分は計算できて、

$$\Delta r_{shell} = \left| z \sqrt{z^2 - 2GM/c^2} + 2GM/c^2 \ln \left[ z + \sqrt{z^2 - 2GM/c^2} \right] \right|_{z_1}^{z_2}.$$
 (7.6)

 $z_1=2, \ z_2=\sqrt{5}, \ 2GM/c^2=2.954$ を代入すると、

$$\Delta r_{shell} = 7.036 - 5.313 = 1.723 \text{ km}$$
(7.7)

が得られる。 歪んでいない (=重力が存在していない) 空間では、当然、この 距離は 1 km になるはずだが。

また、(7.2) と(7.3) から

$$dt_{shell} = \sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} \, dt \le dt \tag{7.8}$$

である。(7.8) は、重力が強いところでは、時間の進み方が遅いことを示している。特にシュワルツシルド半径、 $r \approx 2GM/c^2$ においては、 $dt_{shell}$ に対してもdtは無限大になる。よって、たとえばブラックホールに一定間隔で光を出しながらモノが落ちていくようすを無限遠方から眺めると、シュワルツシルド半径に近づくにつれてその間隔は伸びていき、やがて無限になる(モノがブラックホールに落ちるところは決して観測できない!)。

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>3 km, 9mm と覚えておけば大体事足りる。

また、天体の近く r で時間間隔  $dt_{shell}$  の間に N 個の光波が発射されたとき、その場所における光の振動数は  $\nu_{shell} = N/dt_{shell}$ 、無限遠方で観測した同じ光の振動数は  $\nu = N/dt$  であるが、(7.8) より、

$$\nu = \sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}\nu_{shell} \le \nu_{shell} \tag{7.9}$$

である。これは、強い重力場中から放出された光が、無限遠方で観測すると 振動数が小さいほうにずれる(光の波長が長いほうにずれる)ことを示してい る。これが重力赤方偏移である。

## 7.3 ブラックホール

ニュートン力学で考えると、質量 M、半径 rの天体の脱出速度  $v_{escape}$  は以下の式から決まる。

$$\frac{1}{2}v_{escape}^2 = \frac{GM}{r} \tag{7.10}$$

脱出速度は、星の質量が大きいほど,半径が小さいほど大きくなる。上式よ り、rが無限に小さくなると v<sub>escape</sub> は無限に大きくなるが、それが光速を超 える事はあり得ない。だから、プラックホールは、その脱出速度が光速であ るほど重くて小さい天体、あるいは、同じ事であるが、無限遠方からモノを 落としたとき、落下速度が光速になるほど重くて小さい天体、と考えてもよ い。実際、(7.10)より脱出速度が光速 c となる半径は、

$$r = \frac{2GM}{c^2} \tag{7.11}$$

となり、これは質量 M の天体のシュワルツシルド半径に一致する<sup>8</sup>。

通常の星(主系列星)は、核融合反応による圧力で形を保っていて、その 半径はシュワルツシルド半径よりもはるかに大きい。巨大な星が進化するに つれて核融合反応が進み、星の芯には鉄のコアができる。星が超新星爆発を 起こした後に、圧縮されたコアが残される。そのコアが太陽質量の約3倍以 下であれば、それは中性子星になる。中性子星は中性子間の核力により形を 保っている。もしそのコアが太陽質量の約3倍以上であるばあいは、中性子間 の核力でもその重さを支えられなくなり、重力崩壊を起こしてブラックホー ルになる。回転していないブラックホールの半径(のようなもの)が、シュワ ルツシルド半径と考えてよい。

実際、そのようなブラックホール天体が、数多く観測されている。ブラッ クホールまたは中性子星が通常の星と連星系を成しているとき、通常の星か

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>この導出は一般相対論を使っていないので、厳密ではないことに注意。

らブラックホールまたは中性性にモノが回転しながら落ちていくときに円盤 を作る。これを降着円盤と呼ぶ。降着円盤のなかの摩擦により、その温度は 数千万度になり、それが黒体輻射によってX線を放出する。このようにして、 中性子星はブラックホールは、明るいX線源として観測される。

では、中性子星とブラックホールはどのようにして見分けるのだろうか? X線の性質から、中心天体が中性子星かブラックホールか推測はできるのだ が<sup>9</sup>、天体の質量を求めるのが最も確実な方法である。連星系において、中性 子星またはブラックホールと対をなしている伴星のスペクトル線のドップラー 効果からその運動がわかり、中性子星またはブラックホールの及ぼす重力を 測定できる。それからその天体の質量に制限がつけられるのである。それが 太陽質量の約3倍以上であれば、ブラックホールである。

もう一種類、太陽の数百万倍以上の質量を持つブラックホールも存在する。 それらは多くの銀河の中心に存在する。やはり、そのまわりの星や円盤の運動を観測することによって、中心天体の重力がわかり、そこから質量が計算できる。我々の銀河の中心にあるブラックホールの質量は、370万太陽質量である<sup>10</sup>。

## 7.4 観測装置の分解能とブラックホールの直接撮像

ブラックホール自身は光を出さないわけだが、仮にブラックホールとその周辺の降着円盤を「撮像」したらどのように見えるだろうか?おそらく、明るく輝く降着円盤の中心に、ブラックホールが黒い影として見えるのだろう(「ブラックホールシャドウ」)。2011年現在、技術的にそれはまだ実現していないが、ブラックホールシャドウとしてどのような画像が観測されるか、多くの計算がなされている<sup>11</sup>。

電波やX線を放出する降着円盤の内縁がブラックホールにどこまで近づ けるか、という議論があるのだが、ここでは単純に、シュワルツシルド半径 をそのようなブラックホールシャドウの半径だと考えてみよう。そして、そ の見かけの広がりを現在および将来の観測装置の性能(位置分解能)と比較 してみよう。

まず、天文観測装置の分解能は日常的に用いられる「視力」と比較するとわかりやすい。視力が1ということは、視力検査で使われる輪っかの1.5mmの切れ目を 5m 離れたときに認識できる分解能のことである。その切れ目の広がりは 1.5mm/5000mm=0.0003 ラジアン。これを分角に直すと、 $0.0003/\pi \times 180 \times 60 \approx 1'$ 。つまり、視力1ということは、位置分解能 1 分角、視力 2 と

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>これは私の大学院時代からの研究テーマの一つです。

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>http://www.mpe.mpg.de/ir/GC/res\_dance.php などを参考に。

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>この分野の第一人者である大阪教育大学の福江先生の資料などを参考に:http://quasar.

cc.osaka-kyoiku.ac.jp/~fukue/lecture/bhshadow\_2010.pdf

いうことは位置分解能 0.5 分角に対応する。

多くの地上望遠鏡の位置分解能は、一秒角、1"程度(視力60)であり、これはほぼ大気の揺らぎによって決まっている。しかし、技術的に大気の揺ら ぎを補正することができて(補償光学)、その場合の位置分解能は以下の原理 的な値に近づく。

口径 D の望遠鏡を用いて波長 λ の光で観測したときの原理的な位置分解 能は、ほぼ

$$\lambda/D$$
 (7.12)

で与えられる。たとえば、口径8.2mのすばる望遠鏡を用いて、波長2.2 ミクロンの赤外線で天体を観測したときの原理的な位置分解能は、

 $2.2 \times 10^{-6} / 8.2 \approx 2.7 \times 10^{-7} \ radian \approx 0."06$ 

であるが、(観測環境の良いマウナケア山頂でさえも)大気揺らぎによって、 これは約10倍悪くなってしまう。補償光学の技術を用いて、大気揺らぎを打 ち消すように光学系を操作することによって、原理的な位置分解能に近い値、 0."063を達成することができる<sup>13</sup>。

さて、ではさらに観測装置の位置分解能を上げるにはどうすればよいだろう か?式 (7.12) からわかるように、望遠鏡の口径を広げて、波長を短くしてやれば よい。望遠鏡の口径を大きくすることには限界があるが、二つ以上の離れた望 遠鏡で観測した電磁波を干渉させる、干渉計という技術がある。これによって、 たとえば地上の電波望遠鏡と人工衛星に積んだ電波望遠鏡を用いて、地球より も大きいサイズの望遠鏡で観測したのと同じ位置分解能を達成することができ る。それを世界で最初に(今のところ最後でもあるが)達成したのが、宇宙科 学研究所の「はるか」衛星である<sup>14</sup>。「はるか」の基線長は3万 km、主な観測波 長は6 cm であったので、位置分解能は、 $6/(3 \times 10^9) = 2 \times 10^{-9} radian \approx 400 \mu$ 秒角となる。これが当時では人類が達成した最高の位置分解能で、視力15万 に対応する。

私たちの銀河の中心までの距離は 8 kpc であり $^{15}$ 、そこには質量  $370 \text{ T} M_{\odot}$ のブラックホールが存在する。その見かけ上の広がりは、

 $\frac{370 \times 10^6 \times 3 \times 10^5 \text{ [cm]}}{8 \times 10^3 \times 3.09 \times 10^{18} \text{ [cm]}} \approx 4.4 \times 10^{-11} \text{ radian} \approx 9 \mu \text{ arcsec.}$ (7.13)

となる。これはおよそ視力 700 万に対応し、「はるか」衛星でもまだまだ分解 能が足りないことがわかるが、さらに電波干渉計衛星の観測波長を短くすれ

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup>http://subarutelescope.org/Pressrelease/2006/11/20/j\_index.html

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup>http://www.isas.jaxa.jp/j/japan\_s\_history/chapter09/02/07.shtm

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>天文学においては、距離の単位として pc (パーセク)が用いられる。それは、地球の公転による見かけ上の星の位置のふらつき、年周視差が 1"となる星までの距離として定義される。地球と太陽までの距離 (1天文単位) は 1 億 5 千万 km だから、1 pc =  $1.5 \times 10^{13}$  [cm]/( $1/60/60/180 \times \pi$ )  $\approx 3.09 \times 10^{18}$  [cm]。

ば、この位置分解能を達成し、ブラックホールシャドウを観測することは原 理的に可能である。近年、地上の電波干渉計で波長の短いミリ波を用い、よ り高い位置分解能が実現している。それによって、銀河中心のブラックホー ルの大きさに制限をつけたという報告もある<sup>16</sup>。

干渉計は、波長が短くなればなるほど、より精密な制御が必要になるので 技術的に難しくなる。2011年現在、地上での光干渉計の観測は始まっている が、宇宙空間での光干渉計はまだ実現していない。究極的には、宇宙空間で 遠く離れた X 線干渉計<sup>17</sup>が実現できれば、それが人類が持ち得る究極の位置 分解能を持つ観測装置になるだろう。遠い将来、人類は X 線干渉計を用いて、 ブラックホールの X 線写真を撮れるようになるのかも知れない。

## 7.5 シュワルツシルド時空の GPS への応用

地球の半径はそのシュワルツシルド半径に比べてはるかに大きいから、一般 相対性理論の効果は、日常生活では、ほとんど効いてこない。しかし、非常 に精密な測定によって、一般相対性理論の効果が観測されることがある。そ の例が GPS (Global Positioning System)である。GPS は、地球の周りをそ れぞれ 12 時間で周回する 24 個の衛星を用いている。3 個の衛星からの正確 な距離がわかれば、地球上あらゆる場所の位置が正確にわかる。衛星からの 距離は、光の発射時刻と受信時刻の差に光速を掛けて求める。時刻の補正に は 4 つめの衛星を使う。地球上のどこからでも、(視界が開けていれば)常に 4 つの衛星が受信できるように、衛星軌道が配置されている。

地球表面で自転運動している観測者と GPS 衛星上で公転運動している観 測者を考える<sup>18</sup>。式 (6.22) と同様に一般相対論でも固有時を考えることがで きる。式 (7.2) から、天体から動径座標一定  $(dr_{shell} = 0)$  の距離で公転運動し ている座標系に乗った人  $(d\phi = 0)$  の計る固有時間を  $d\tau$  とすると、

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 \tag{7.14}$$

だから、(7.3)と合わせて、

$$c^{2}d\tau^{2} = c^{2}\left(1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}\right)dt^{2} - \frac{dr^{2}}{1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}} - r^{2} d\phi^{2}$$
(7.15)

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>http://www.nature.com/nature/journal/v455/n7209/abs/nature07245.html

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup>そういう計画はあります:http://maxim.gsfc.nasa.gov

<sup>&</sup>lt;sup>18</sup>地球は回転しているので、厳密にはシュワルツシルドメトリックではなくカーメトリック を使う必要があるが、地球の回転速度は光速に比べて十分小さいので、シュワルツシルドメト リックで十分良い近似になっている。

となる。十分遠方の観測者がこの運動を見ているとき dr = 0 だから、

$$c^{2}d\tau = c^{2}\left(1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}\right)dt^{2} - r^{2}d\phi^{2}$$
(7.16)

である。よって、

$$c^{2} \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{2} = c^{2} \left(1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}\right) - r^{2} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^{2}$$
$$= c^{2} \left(1 - \frac{2GM/c^{2}}{r}\right) - v^{2}.$$
(7.17)

ここで、vは、地表の自転速度、または GPS 衛星の速度である。地球表面の 観測者の固有時間を  $dt_{earth}$ 、人工衛星上の観測者の固有時間を  $dt_{satellte}$  とす ると、(7.17)を、地表と GPS 衛星について比を取って、

$$\left(\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{satellite}}\right) - (v_{satellite}/c)^2}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{earth}}\right) - (v_{earth}/c)^2}.$$
(7.18)

この式が、地表における時間と、GPS 衛星における時間の進み方のずれを表 す。*r<sub>satellite</sub>*,*r<sub>earth</sub>* は地球のシュワルツシルド半径に比べてはるかに大きいか ら、いくつかの近似が可能である。

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx \frac{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{satellite}} - (v_{satellite}/c)^2\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{earth}} - (v_{earth}/c)^2\right)^{1/2}} (7.19)$$

$$\approx \left(1 - \frac{GM/c^2}{r_{satellite}} - (v_{satellite}/c)^2/2\right) \left(1 + \frac{GM/c^2}{r_{earth}} + (v_{earth}/c)^2/2\right)$$

$$\approx 1 - \frac{GM/c^2}{r_{satellite}} - (v_{satellite}/c)^2/2 + \frac{GM/c^2}{r_{earth}} + (v_{earth}/c)^2/2. (7.20)$$

ここで、 $v_{satellite}^2$ ,  $v_{earth}^2$  の項は、特殊相対論だけからも出てくる事に注意しよう。 *G*が入っている項が、一般相対論の効果、重力による時間の進み方の違いを表す。この式からただちにわかるように、 $(GM/c^2)/r_{earth} \geq (GM/c^2)/r_{satellite}$ はどちらも非常に小さな数であるが、その違いが無視できない、ということが本質的である。

GPS 衛星の周期が 12 時間ということから、 $r_{satellite}$  と  $v_{satellite}$  を求めよう。円運動の公式から<sup>20</sup>、

$$\frac{v_{satellite}^2}{r_{sattellite}} = \frac{GM}{r_{satellite}^2},\tag{7.21}$$

<sup>&</sup>lt;sup>20</sup>この計算には一般相対論を使っていないが、それで精度は十分である。

$$P_{satellite} = \frac{2\pi r_{satellite}}{v_{satellite}}.$$
(7.22)

これを変形して、

$$r_{satellite} = \left(\frac{GMP_{satellite}^2}{4\pi^2 c^2}\right)^{1/3} c^{2/3}, \qquad (7.23)$$

$$v_{satellite} = \left(\frac{2\pi GM}{P_{satellite} c^2}\right)^{1/3} c^{2/3}.$$
(7.24)

 $GM/c^2 = 4.4 \times 10^{-3}$ m、P=12時間=43200 sec を代入して、 $r_{satellite} = 2.66 \times 10^7$ m (2万 6600km)、 $v_{satellite} = 3.87 \times 10^3$  m/s となる。

 $r_{earth} = 6.37 \times 10^{6} {
m m}$  だから、(7.20) に代入して、運動による  $v_{satellite}^{2}$ 、  $v_{earth}^{2}$ の項を無視すると、

 $\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx 1 - 1.65 \times 10^{-10} + 6.91 \times 10^{-10} \approx 1 + 5.26 \times 10^{-10}.$  (7.25)

重力の効果だけを考慮した場合、この割合で、地表の時間よりも人工衛星上 の時間のほうが、速く進むことになる。ただし、すでに特殊相対論で学んだ ように、「速く進む時計の時間はゆっくり進む」。よって、さらに人工衛星の 速さと地表の速さの違いを考慮すると、このずれは小さくなるはずである。

 $v_{earth}$ として赤道上の値を使うと、 $v_{earth} = 4 \times 10^7 \text{ m/86400} = 463 \text{ m/s}$ 。 (7.20) に $v_{satellite}$ 、 $v_{earth}$ の項も入れて、

 $\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx 1 + 5.26 \times 10^{-10} - 8.32 \times 10^{-11} + 0.12 \times 10^{-11} \approx 1 + 4.44 \times 10^{-10}.$ (7.26)

一日 (86400 秒) で、このずれは、38 マイクロ秒になる。その間に、光は 11km も進む! これを補正しないと、GPS は全く使いものにならないだろう。

## Chapter 8

# 二体問題

ここまでの講義で、人工衛星(4節,7.5節)、地球の公転運動(6.8節)、ブラック ホール連星系(7.3節)の話題が出てきた。これらは共通して、二つの天体(物 体)が重力相互作用を及ぼし合う、二体問題として扱うことができる。これ はとても重要かつ美しい古典力学の応用問題なので、ぜひ理解しておきたい。

二体問題は、二つの質点からなる系の運動を解く問題であり、これは解析 的に解ける(=解を式で表すことができる)。二体問題を解いて得られる天体 の軌道は、もう片方の天体をひとつの焦点とする楕円、放物線、または双曲 線である。これから、ケプラーが惑星の精密観測から発見した経験則、「惑星 の軌道は太陽をひとつの焦点とする楕円を描く」というケプラーの第一法則 が直ちに導かれる。

宇宙にはたくさんの天体があるわけで、厳密な解を得るにはコンピュー ターを走らせて、たくさんの連立運動方程式を数値的に解くことが必要なわけ だが、多くの場合、二体問題に、他の天体による微細な影響(摂動)を考えれ ば十分である。たとえば、人工衛星の運動を解くときは地球の重力のみ、(太 陽や月の影響は微少)、惑星の運動を解くときは太陽の重力のみ(他の惑星や 恒星の重力は微少)を考えれば、大体、事足りる。

## 8.1 二体問題の例

地球の公転:精密な天体観測を行う際、地球の公転運動を考慮に入れることが 重要である。たとえば、パルサー(高速回転している中性子星)のタイミング 観測を行うとき、地球がパルサーに近づいているか、遠ざかっているかで、見 かけ上のパルス周期がドップラー効果に依って変化する。これを補正するた めに、地球の公転運動を精密に解き、天体からのパルスを解析するときには、 そのパルス到達時刻 (pulse-arrival time)を、太陽系重心 (barycenter)で測定 した値に直す<sup>1</sup>。これを barycentric correction と呼ぶ。

惑星の運動、人工衛星の運動:惑星と太陽の二体問題を解いて、惑星の軌道は、 第9.1節で説明する軌道六要素を用いて記述される。たとえば、「理科年表」 を見ると、それらの軌道六要素が記述されている。地球と人工衛星の二体問 題を問いて、人工衛星の軌道も、軌道六要素で記述される。地球大気による 擾乱や、地球が扁平している効果によって、人工衛星の軌道はゆっくりと変 化している。よって、軌道六要素を出す場合は、いつ測定した値であるかを 明示する必要である。

惑星や人工衛星の位置を測定した時刻を元期 (エポック、Epoch) と呼ぶ。 エポックと軌道六要素が与えられらば、その前後の時刻における惑星や人工 衛星の位置は、解析的に求めることができる。人工衛星の「軌道ファイル」に は、六要素がエポックの関数として与えられている<sup>2</sup>。

探査機:地球の重力圏を脱出した探査機は、主に太陽の重力の影響を受け、太陽を焦点とするほぼ楕円軌道を描き、太陽系内を運動する。軌道を変えるために、地球や月によるスイングバイを利用する。その時の軌道は、地球や月 を焦点とする双曲線、放物線になっている。

X 線連星系:太陽は連星系ではないが、多くの恒星は、連星系を成している。 特に、通常の星とコンパクト星(白色矮星、中性子星、ブラックホール)から 成る連星系は、通常の星からコンパクト星に物質が落ちるときの大きな重力 エネルギーが開放されて、X 線連星系となる。特にコンパクト星が回転して いる中性子星の場合、これは X 線パルサーとして観測され、公転運動による ドップラー効果の測定から、視線方向の速度がわかり、二体問題を解くこと によって、その軌道を正確に決めることができる。

図 8.1 が X 線連星パルサーの軌道の例である。それぞれの天体名と、伴 星の質量が書いてある。相対的なスケールは正しく示されている (左下の線 が 100 光秒)。中性子星の質量はどれも大体  $1.4M_{\odot}$ 。4U0115+63(e = 0.34) や GX301-2(e = 0.47) は離心率の大きい楕円軌道であるが、離心率もドップラー 効果の観測から測定できることに注意。

重力波の間接的検証:

電荷を持った物体が加速度運動すると電磁波を放出するように、質量を 持った物体が運動すると重力波が放出される、と一般相対論は予言している。 重力波はあまりにも弱いので、今だ直接検出されていないが、連星パルサー の観測から、間接的に重力波の存在が検証されている。ハルスとテイラーは、

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>太陽系重心を求めるにはすべての惑星を考慮にいれるが、木星の影響が一番大きい。それ でも、太陽系重心は太陽の中心とはそれほどずれておらず、太陽の中にある。

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>あるいは、すでに六要素から計算された人工衛星の位置が、より細かい時間ビンで入って いることもある。



Figure 8.1: X 線バイナリーパルサーの軌道の例。Joss and Rappaport, 1984, Annual Review of Astronomyand Astrophysics, 22, 537 より。

PSR 1913+16 という連星パルサーを、プエルトリコにある電波望遠鏡を用 い、1974年の発見以来、長期間モニター観測を行った。その結果、その軌道 がほんの少しずつ変化していることがわかった。これはニュートン力学では 説明できない。一方、一般相対論によると、重力波の放射によって、連星パ ルサーはエネルギーを失ない、それによって、徐々に軌道が変化していく。そ の計算結果と観測された軌道変化がピタリと一致した。これが、今日では(唯 一)の重力波の観測的証拠だと考えられている。ハルスとテイラーは、この業 績により、1993年のノーベル物理学賞を受賞した<sup>3</sup>。

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>http://nobelprize.org/nobel\_prizes/physics/laureates/1993/press. html,http://nobelprize.org/nobel\_prizes/physics/laureates/1993/illpres/ 参照。

#### 8.2 角運動量、中心力、角運動量保存則

時刻 t における質点の位置ベクトル r(t) と、運動量 p(t) との外積  $r \times p$  を、 原点 O に関する質点の、時刻 t における角運動量と言う (以下、l で表す。)。

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{m} \, \boldsymbol{v}. \tag{8.1}$$

角運動量ベクトルは、*r* と *v* を含む平面に垂直で、その向きは、*r*,*v*,*l* が右手系をなす向きである。質点が原点の周りに描く扇型の面積速度は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \tag{8.2}$$

であるから、角運動量は面積速度の2m倍である(図8.2)。



Figure 8.2: 面積速度の説明。時間  $\Delta t$  の間に質点が掃く扇型の面積が  $\Delta S$ 。

(8.1) 式を微分し、運動方程式 dp/dt = F を用いると、

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}.$$
(8.3)

右辺を力のモーメントまたはトルクと呼ぶ。ある時刻における質点の角運動 量の時間変化の割合は、その時刻に質点に作用する力のモーメントに等しい。

特に、力のモーメントがゼロの時、角運動量は一定に保たれる。これを角 運動量保存則、あるいは面積速度保存則と言う。力がゼロでなくても、それ が働く方向が原点 O を通る場合 (中心力)、 $r \ge F$  は平行なので、 $r \times F = 0$ 。 よって、質点が重力によって原点 O に引かれながら運動するとき、O の周り の角運動量と面積速度は運動中一定に保たれる。これから、「惑星と太陽を結 ぶ動径は、単位時間に一定の面積を掃く」というケプラーの第二法則が導か れる。 8.3. 換算質量

角運動量の大きさ  $|l| \in h$  とする。速度ベクトル  $v \in r$  に平行な成分  $v_r$  と 垂直な成分  $v_{\theta}$  に分解すると、図 8.3 からわかるように、

$$v_r = dr/dt, v_\theta = rd\theta/dt \tag{8.4}$$

である。



Figure 8.3: 速度ベクトルを極座標で表示。

 $h = mrv_{\theta}$  だから、

$$h = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \tag{8.5}$$

である。

## 8.3 換算質量

天体が原点 O の重力に引かれて運動するときは、O の周りの角運動量が保存 するので、その問題は簡単になる。しかし、一般に二つの天体が重力で引き あっているときには、両方の運動を考えなくてはいけないので、問題は複雑 になるのではないだろうか?その心配がないことを以下で述べる。

例として、惑星 (質量 m)が太陽 (質量 M)のまわりを公転運動する場合を 考えよう。それぞれの位置ベクトルを $r_1, r_2$ とすれば、

$$m\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}, \ M\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\mathbf{F}.$$
 (8.6)

これを足しあわせると、

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\mathbf{r}_1 + M\mathbf{r}_2) = 0. ag{8.7}$$

ところで、 $\mathbf{R} \equiv (m\mathbf{r}_1 + M\mathbf{r}_2)/(m+M)$ は、惑星と太陽の重心の位置ベクトルを表わすから、上式は、 $d^2\mathbf{R}/dt^2 = 0$ ,すなわち重心は等速運動をする (初速度がゼロならば静止している)ことを示している。

一方、(8.6)から次式も導ける。

$$\frac{mM}{m+M}\frac{d^2(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}{dt^2} = \boldsymbol{F}.$$
(8.8)

これは、太陽に対する惑星の位置 $(r_1 - r_2)$ に、換算質量 $\frac{mM}{m+M}$ の天体がある場合の運動を表わす運動方程式である。

一般に二つの質点が互いに力を及ぼしあって運動するとき、個々の質点の 運動方程式を、質量中心の運動方程式と、一方の質点が静止しているかのよう にみなしたときの他方の質点の運動方程式(ただし、質量が換算質量にかわっ ている)に書き換えることができる。二体問題(8.6)を解くかわりに、それと 等価な一体問題(8.8)を解けば良いことになる。

### 8.4 人工衛星の軌道、惑星の軌道

地球の周りの人工衛星の軌道や、太陽のまわりの惑星の軌道を考えてみよう。 以下で、mは人工衛星または惑星の換算質量、rは、地球中心に相対的な人 工衛星の位置、あるいは太陽に相対的な惑星の位置を示す。

まず、運動方程式をたてる。

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{8.9}$$

であるが、動径方向の単位ベクトル $e_r$ とそれと直交する単位ベクトル $e_{\theta}$ を基底 する極座標で考える。惑星の速度ベクトルは $dr/dt = d(re_r)/dt = \dot{r}e_r + r\dot{e}_r = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_{\theta}$ で表される。さらにそれを微分して、

$$d^2 \boldsymbol{r}/dt^2 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \tag{8.10}$$

よって、運動方程式を動径方向、角度方向に分解して書きくだすと、それ ぞれ、

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2} \tag{8.11}$$
$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \tag{8.12}$$

となる。(8.5)を用いて、(8.12)は

$$\frac{1}{r}\frac{dh}{dt} = 0 \tag{8.13}$$

と書ける。これはまさに角運動量保存則に他ならない。 また、(8.11) は、やはり(8.5)を用いて、

$$m\ddot{r} - \frac{h^2}{mr^3} = -\frac{GMm}{r^2}$$
 (8.14)

とかける。 $\dot{r} = dr/dt = v_r$ であることに注意して、上式を積分する。

$$m\frac{dv_r}{dt} - \frac{h^2}{mr^3} = -\frac{GMm}{r^2}$$
(8.15)

$$m\frac{dv_r}{dt}dr - \frac{h^2}{mr^3}dr = -\frac{GMm}{r^2}dr$$
(8.16)

$$m\int v_r dv_r - \int \frac{h^2}{mr^3} dr = -\int \frac{GMm}{r^2} dr$$
(8.17)

$$\frac{m}{2}v_r^2 + \frac{h^2}{2mr^2} = \frac{GMm}{r} + E$$
(8.18)

$$\frac{m}{2}(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{GMm}{r} = E.$$
(8.19)

ここで、積分定数を E とした。これは、エネルギー保存則に他ならない。 ここで (8.5) から、

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \frac{h}{mr^2}\frac{d}{d\theta}.$$
(8.20)

よって、独立変数を時刻 t から θ に変換して (8.18) は、

$$\frac{m}{2}\left(\frac{h}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{h^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E$$
(8.21)

と書ける。この微分方程式が $r \ge \theta$ の関係を与えるので、 $r \ge \theta$ の関数として 求めれば、惑星の軌道が求められたことになる。ここで、 $1/r = u \ge c$ 変数を変 換すると、以下のように変形できる。

$$\frac{h^2}{2m} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{h^2 u^2}{2m} - GMmu = E, \qquad (8.22)$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(u - \frac{GMm^2}{h^2}\right)^2 - \frac{G^2M^2m^4}{h^4} = \frac{2mE}{h^2},$$
 (8.23)

$$\pm \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{h^2} + \frac{G^2 M^2 m^4}{h^4} - \left(u - \frac{GMm^2}{h^2}\right)^2}} = d\theta.$$
(8.24)

ここで積分公式、 $\int dx/\sqrt{a^2-x^2} = \cos^{-1}(x/a)$ を用いて、

$$\pm \cos^{-1} \frac{u - \frac{GMm^2}{h^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{h^2} + \frac{G^2M^2m^4}{h^4}}} = \theta.$$
(8.25)

よって、

$$r = \frac{\frac{h^2}{GMm^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2M^2m^3}\cos\theta}}.$$
 (8.26)

ここで、

$$l \equiv \frac{h^2}{GMm^2},\tag{8.27}$$

$$e \equiv \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2 M^2 m^3}} \tag{8.28}$$

と定義すれば、(8.26)は、

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}.\tag{8.29}$$

と書ける。これは原点 (太陽または地球)を焦点の一つとする円錐曲線の式で、 eは離心率、lは半直弦と呼ばれる。円錐曲線は、円錐を任意の断面で切った ときの断面の形で、楕円 (e < 1)、放物線 (e = 1)、双曲線 (e > 1)、のいずれ かである。図 8.4 に、異なる離心率の円錐曲線の例を示す。

実際に太陽の周りの惑星 (彗星) や地球の周りの人工衛星 (探査機) の軌道も、 楕円、放物線、双曲線のどれかである。(8.28)より、離心率e < 1, e = 1, e > 1はそれぞれエネルギー E < 0, E = 0, E > 0 に対応している。すなわち、全 エネルギー E が負のときは、人工衛星は地球の重力に束縛されて、地球の周 りを楕円軌道を描いて周回する (ケプラーの第一法則)。運動エネルギーが増 加するにつれ、離心率が大きくなり、やがて軌道は放物線となり、人工衛星 は地球の重力圏を脱出する。無限遠でエネルギーはゼロになる。さらに運動 エネルギーが大きい場合は、双極線軌道になり、無限遠でも正のエネルギー を持つ。



Figure 8.4: 同じ円錐曲線  $r = l/(1 + e \cos \theta)$  で、離心率  $e \ge 0$  (円), 0,5, 0,7, 0,9 (楕円), 1.0 (放物線), 2.0 (双曲線) と変化させたもの。半直弦 l が、円の場合は半径に対応していることに注意。

## 8.5 楕円軌道

楕円は、二つの焦点からの距離の和が等しい点をつなげたものである。下図のように長半径を a、短半径を b とする。楕円の面積は πab で与えられる。

 $\theta = 0$ の点が A, $\theta = \pi/2$ の点が Q, $\theta = \pi$ の点が C である。右側の焦点、F からの距離を考える。A が近日点、C が遠日点である。

下図と (8.29) より、 $r_A = l/(1+e), r_Q = l, r_C = l/(1-e)$ 。よって、

$$r_A + r_C = 2a = l/(1+e) + l/(1-e) = 2l/(1-e^2).$$
 (8.30)

これから、長半径は

$$a = l/(1 - e^2) \tag{8.31}$$

と書けることがわかる。よって、

$$r_A = \frac{l}{1+e} = a \frac{1-e^2}{1+e} = a(1-e)$$
(8.32)

だから、図 8.5 から OF = a - a(1 - e) = ae である。



Figure 8.5: 長半径 a, 短半径 b、離心率 e、半直弦 l の楕円。

次に短半径をaとeで表わす。楕円の定義より、<br/> BF+BF'=FA+F'Aである。

$$BF + BF' = 2\sqrt{a^2e^2 + b^2}, FA + F'A = a(1-e) + 2ae + a(1-e) = 2a.$$
(8.33)

よって、

$$b^2 = a^2(1 - e^2) = al. (8.34)$$

ここで、(8.31)を使った。 (8.27),(8.28)と(8.31)より、

$$a = -GMm/2E. \tag{8.35}$$

つまり、軌道長半径は、エネルギー*E*だけで決まる。同様に、(8.34)と(8.27) を使って、

$$b^2 = -h^2/2Em. (8.36)$$

これら二つの式は、M, m, E, hが与えられらば、一意的にa, b、つまり楕円軌 道が決まることを表わしている。

### 8.6 ケプラーの第三法則

楕円の長半径をa、短半径をbとしたとき、その面積は $\pi ab$ で与えられる。角 運動量をh、天体の質量をmとするとすると、面積速度はh/2mである。よっ て、天体の公転周期Tは、

$$T = \frac{\pi a b}{h/2m}.\tag{8.37}$$

である。ここで、(8.34)と(8.27)を使って、 $b=\sqrt{al}=\frac{h}{m}\sqrt{\frac{a}{GM}}$ だから、

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}.$$
 (8.38)

これが、「惑星の公転周期の二乗が軌道長半径の三乗に比例する」、というケ プラーの第三法則である。

#### 8.7 円軌道の場合

円運動の場合 (離心率 e = 0)の運動方程式は、半径 r、公転速度を v として、

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \tag{8.39}$$

である。周期Tは、 $T = 2\pi r/v$ だから、

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \tag{8.40}$$

となり、ケプラーの第三法則が得られた。

# Chapter 9

# 人工衛星の軌道

ここでは二体問題の応用例として、人工衛星の軌道を考えてみよう。

## 9.1 軌道六要素

ある時刻 (エポック) における人工衛星の軌道 (一般に楕円軌道) と位置は、以 下で示す軌道六要素を用いて記述できる。図 9.1 は「人工衛星の力学と制御八 ンドブック」より<sup>1</sup>。

- a:軌道長半径 (semi-major axis)。円軌道のときは、円の半径。
- e:離心率 (eccentricity) e = 0 は円軌道。
- *i*:軌道傾斜角 (inclination)。地球の赤道面と人工衛星の軌道面がなす角度。
- Ω:昇交点赤経 (right ascension of the ascending node)。*i* ≠ 0 のとき、
   地球の赤道面と人工衛星の軌道面が交差する点の赤経。
- ω:近地点引数 (argument of perigee)。楕円軌道の場合、昇交点から測って近地点が軌道面上のどこに来るかを表わす。
   以上5つのパラメーターで軌道は決まる。
- *M*:平均近点離角 (mean anomaly)。与えられたエポックにおける人工衛 星の軌道上での位置を表す。

図 9.2 に、1987 年 2 月 5 日に打ちあげられ、1991 年 11 月 1 日に大気圏に 再突入した「ぎんが」衛星の軌道六要素の時間変化を示す。 $e \approx 0$  から、ほぼ

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>http://spaceflight.nasa.gov/realdata/elements/graphs.html も参考に



Figure 9.1: 人工衛星の軌道を記述する軌道六要素。「人工衛星の力学と制御 ハンドブック」より。

円軌道であることがわかる。地球の半径は、約6378km だから、ぎんが衛星の打ち上げ時の高度は、約550 km。軌道傾斜角 *i* が、「ぎんが」衛星が打ち上げられた内之浦宇宙空間観測所の緯度に対応していることに注意しよう。地球の自転速度を稼ぐために、人工衛星は真東に打たれる。その結果、軌道傾斜角が打ち上げ地の緯度に一致することになる。

もし衛星の軌道の地球に対する相対的な位置が不変ならば、 $\Omega$  も a, e, i と 同じくほぼ一定のはずであるが、 $\Omega$  は周期的に変化している。これは、地球 が扁平である影響で人工衛星の軌道面が歳差運動をしているためである。ほ ぼ円軌道なので、近地点の位置を表わす $\omega$  はあまり意味を持たない。

ミッションの終了近くになって、大気の摩擦のために、急激に a が減少 (衛 星が降下) していることがわかる。また、もともと離心率は小さくほぼ円軌道 であったが、衛星が降下するにつれて、さらに円軌道からのずれが「なまさ れて」、離心率も減少していることがわかる。

式 (8.38) より、a から衛星の公転周期が求められる。地球のシュワルツシ ルド半径、 $2GM/c^2 = 8.87 \text{ mm}$ を使うと、以下のように簡単に計算できる。

$$T = \frac{2\sqrt{2\pi a^{3/2}/c}}{\sqrt{2GM/c^2}} = \frac{2\sqrt{2\pi}(a/6900 \text{ km})^{3/2}(6900 \text{ km})^{3/2}/(300000 \text{ km/s})}{\sqrt{8.87 \text{ mm}}}$$
$$= 95 \min(a/6900 \text{ km})^{3/2}. \tag{9.1}$$

このようにして求められた公転周期と a の関係を図 9.3 に示す。

ぎんが衛星のように低高度の衛星は、一日に地球の周りを約15周することがわかる。

#### 9.2 静止衛星

地球の自転周期は23時間56分4.09秒である<sup>2</sup>。(9.1)から、人工衛星の公転周 期が自転周期と等しくなるのは、*a* = 42200 km のとき(高度は約35800 km)。 赤道上、この高さにある衛星は地表から見て静止しているように見えるので、 静止衛星と呼ばれる。常に地表から見えている必要がある通信衛星、放送衛 星、気象衛星などは、静止軌道に打ち上げられる。

#### 9.3 Two Line Elements

軌道六要素で衛星の軌道とある時刻における位置を表わすことができるわけ だが、それと等価な情報とさらに衛星名、国際識別番号などを付加した情報 を記述する、Two Line Elements (TLE)と言う標準的なフォーマットが ある。

NORAD (NORth American aerospace Defence Command; 北アメリカ航 空宇宙防衛司令部;http://www.norad.mil) は、地球の周りを周回している (ほぼ) すべての人工衛星をモニターし、その軌道要素を TLE で公開してい る。TLEの説明については、http://science.nasa.gov/Realtime/rocket\_ sci/orbmech/state/2line.html を参照。そこから TLE の定義を図 9.4 に 再掲する。

軌道長半径 a の代わりに、一日あたりの周回数である、"Mean Motion" が使われていることに注意。いくつかの衛星について、具体的な TLE の値を 見てみよう。現在地球を周回している衛星の最新の TLE は、たとえば http: //celestrak.com から入手できる。

SUZAKU

1 28773U 05025A 08013.93865221 .00000558 0000-0 37528-4 0 6575 2 28773 31.4061 323.8498 0007001 164.9250 195.1602 15.00529329137995 ASTRO-F (AKARI) 1 28939U 06005A 08014.23580039 .00000005 00000-0 11192-4 0 6030 2 28939 98.2316 16.5778 0008622 0.3484 359.7729 14.57435459100351 HINODE (SOLAR-B) 1 29479U 06041A 08013.94377495 .00000087 00000-0 26130-4 0 4426 2 29479 98.0789 23.2007 0014564 229.4553 130.5382 14.62802560 69920 INTEGRAL

<sup>2</sup>24 時間ではないことに注意。太陽に対して同じ向きになる周期が1日=24 時間。

1 27540U 02048A 08012.45833333 .00000061 0000-0 10000-3 0 6500 2 27540 86.3672 23.5282 7969010 276.7243 358.3858 0.33418208 2558 HIMAWARI 6 1 28622U 05006A 08014.77456198 -.00000264 00000-0 10000-3 0 4588 2 28622 0.0211 76.8046 0002163 49.6656 46.0362 1.00271868 10549

これから、以下のことが読みとれる。(1) すざく (X 線天文衛星)、あかり (赤 外線天文衛星)、ひので (太陽天文衛星) は、一日に約 15 周回する、低軌道衛 星である。ひまわりは一日に一周回する、静止衛星である。INTEGRAL 衛星 は三日で一周する、大きな軌道である。(2) INTEGRAL は離心率が大きな楕 円軌道を持つが、他の衛星はほぼ円軌道である。(3) すざくの軌道傾斜角は、 ぎんがと同じく、内之浦から真東に打ちだしているので、内之浦の緯度に対 応して 31.4 度である。ひまわりは赤道上の静止衛星なので、軌道傾斜角は 0 度。あかり、ひのでの軌道は、赤道とほぼ直交している。この二つの衛星は 太陽同期軌道を持ち、軌道面が常に太陽を向いていて、ちょうど昼と夜の境 目を周回している。それによって、ひのでは常に太陽を観測することが可能 である。一方、あかりは、つねに地球と反対向きの空を観測することが可能

巷に、TLE から衛星軌道を計算したり表示させたりするプログラムが 溢れている。たとえば、http://science.nasa.gov/Realtime/jtrack/3d/ JTrack3D.html (衛星の軌道を3次元的に表示し、そのスケールや向きをイ ンターアクティブに変更できる<sup>4</sup>)、http://www.lizard-tail.com/isana/ tracking、http://www.n2yo.com (Google map 上に衛星の位置をリアルタ イムで表示できる) などを参照。

#### 9.4 準天頂衛星

静止衛星は地上から静止しているように見えるので、通信衛星や気象衛星と して利用するのに便利である。しかし、地球上の緯度が高くなると静止衛星 の仰角は低くなるので、地形や建物の陰となって見えにくくなり、不便であ る<sup>5</sup>。では、高緯度の場所からでも、常に天頂近くに見えるような衛星は実現 できないだろうか?まず、軌道周期は、地球の自転周期と同じでなくてはな らないことは明らかである。次に、軌道傾斜角は、その衛星を使う場所の地 球上の緯度とほぼ同じでなくてはいけない。さらに、少々軌道を楕円にして (離心率 > 0)、遠地点がその場所の上空に来るようにすれば、衛星がその地点

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>地球は赤外線を出すので、赤外線衛星にとってはノイズ源になる。

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>なんと、2011年1月時点でリンク切れ!これほど良いサイトがどこにいったのか…。NASA 頑張れ!

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>緯度の高い国に行く機会があったら、衛星放送アンテナの向きがほとんど地面と並行に なっていることを確かめてみてください!

の上空にとどまる時間が長くなる (面積速度普遍の法則!)。このように軌道 をデザインしたのが、準天頂衛星である<sup>6</sup>。準天頂衛星の軌道を地球表面に投 影すると、8の字になる。しかし、準天頂衛星は地上から見て同じ位置にと どまり続けることはできないので、実用性を持たせて、常に天頂付近に衛星 があるようにするには、昇交点赤経Ωの異なる三機の準天頂衛星が必要にな る<sup>7</sup>。

「みちびき」の TLE は以下の通りである<sup>8</sup>。

1 37158U 10045A 11015.18584668 -.00000050 00000-0 10000-3 0 607 2 37158 040.9221 193.2641 0749201 270.0188 212.6145 01.00271298 1281

これから、以下のことが読み取れる。

- 一日辺りの周回数、Mean Motion は当然ながら、ほぼ 1.00。
- 軌道傾斜角は 40.92 度 (青森県北部に対応)。
- 離心率は0.0749 だから、ちょっとだけ円からずれている。
- 近地点引数は270度。赤道面を南から北へ横切って、位相が270度(3/4 周期)進んだところが近地点になっている。つまり、位相が90度進ん だとき、青森県の上空が遠地点になっている。

現在、2011年1月現在、日本の準天頂衛星は一機だけであるが、第二機、三機の打ち上げが計画されている。それらが打ち上げられたら、TLEで軌道を確認してみよう。それらのTLEは昇交点赤経(上記の193.2641)と平均地点離角(212.6145)だけが異なって、あとは全く同じはずである。

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>日本初の準天頂衛星「みちびき」が 2010 年 9 月 11 日に打ち上げられた。http:// qz-vision.jaxa.jp/

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>準天頂衛星の解説、http://www.satnavi.jaxa.jp/project/qzss/movie/index.html、 日本上空を通過する三機の準天頂衛星の運動を示したアニメーション、http://upload. wikimedia.org/wikipedia/commons/b/ba/Qzss-01-120s2.gif、が大変良くできている。こ れらの作者に感謝します。現在の「みちびき」の位置:http://www.n2yo.com/?s=37158 あ るいは、百聞は一見にしかず: https://il.youtube.com/watch?v=kMrmgspfu5o

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>なぜか、http://www.n2yo.com/satellite/?s=37158 というサイトにあった。



Ginga orbital six parameters

Figure 9.2: ぎんが衛星の軌道六要素の打ち上げから大気圏再突入までの時間 変化。



Seconds from the beginning of 1987





Figure 9.4: 人工衛星の軌道と位置を記述する Two Line Elements (TLE)の説 明。http://science.nasa.gov/Realtime/rocket\_sci/orbmech/state/ 2line.html より。

# Chapter 10

# 統計入門

理科系の大学生だったら、1,2年生で、確率・統計の講義はおそらく必修だろう。私もそうだったが、大学院になって真剣にX線衛星データ解析をおこなう段になって、「これほど統計が重要だったら、もっと早く言ってくれよ!」、という気持ちになった。どんな研究、仕事でもそうだが、実際に、現場でそれに携わって手を下すまでは、そこで必要とされているツールの重要性はなかなかわからないものである<sup>1</sup>。

ここでは、普段、私たちが研究の現場で使っている統計の知識を、えいやっと、できるだけ短く詰め込んでみる ("Statistics in a Nutshell")。

#### 10.1 ポアソン分布

図 10.1 の光度曲線 (ライトカーブ)は、実際の X 線衛星データから取ってきたものである。

暗い天体を観測し、一秒ごとに、X線検出器に入射するX線の数を、100秒の間、カウントした<sup>2</sup>。その値を書き下してみると、以下の通りである。

全部で100 ビンのうち、0 カウントのビンが59、1 カウントが31 ビン、2 カウントが8 ビン、3 カウントが0 ビン、4 カウントが2 ビンあることがわか るだろう。これを、1 ビンに光子が0,1,2,3,4 カウント入る確率は、それぞ

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>だからこそ、この講義は一般教養で学ぶ基礎的な勉強と研究の最先端の現場をつなぐよう な意識でやっているのだが...。

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>観測を行っている時間間隔の単位をビン (bin) と呼ぶ。つまり、ここでは幅が一秒のビン が 100 ビンある。



Figure 10.1: 暗い X 線天体を 1 ビン 1 秒で、100 秒観測したときの光度曲線。 横軸は時間、縦軸は、1 ビンあたりの X 線光子数。平均値 0.55 に横線を引 いた。

れ、0.59,0.31,0.08,0,0.02 と考えても良い。そのヒストグラムは、図 10.2 の通り。また、平均値は、 $(1 \times 31 + 2 \times 8 + 4 \times 2)/100 = 0.55$  である。

図 10.2 で赤丸で示したのは、以下の式で、 $\mu = 0.55$  のときに、i =0,1,2,3,4,5,、に対応する点である。

$$P_P(i;\mu) = \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu}$$
(10.1)

この式が、平均 $\mu$ のポアソン分布に他ならない( $\mu$ は実数であるが、iは整数 値、0,1,2,3,,の場合にのみポアソン分布が定義されている事に注意せよ)。 ポアソン分布の具体的解釈の一つの例として、検出装置の1ビンに平均 $\mu$ 個 の割合で光子が入射してくる場合を考える。統計的な揺らぎにより、実際に1 ビンあたりに検出される光子の数は、μのまわりでばらつく。実際に検出され る光子数が *i* = 0,1,2,3,,, である確率が、(10.1) で与えられる。この状況が 図 10.2、図 10.4 で示されている訳である。「天体を観測したとき、1 時間ビン あたりに落ちる光子数の分布はポアソン分布に従う」ことを覚えておこう<sup>3</sup>。

式(10.1)は暗記してしまうと良い。思い出すために手がかりと成るのは、 平均 $\mu$ のとき、1ビンに全く光子が入らない確率は、 $e^{-\mu}$ ということである。

当然であるが、平均 μ の値によらず、1 ビンに入る光子数 i が 0.1.2.3... で ある確率をすべて足すと1になることに注意しよう。

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_P(i;\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!} = e^{-\mu} e^{\mu} = 1.$$
(10.2)

また、すでに「式 (10.1) の分布の平均は µ」、と言ってしまっている訳だ が、平均 (mean) の定義からその値が µ になることを確認しておこう。

$$Mean \equiv \sum_{i=0}^{\infty} i P_P(i;\mu) = \sum_{i=i}^{\infty} i P_P(i;\mu) = e^{-\mu} \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\mu^i}{i!} = e^{-\mu} \mu \sum_{i-1=0}^{\infty} \frac{\mu^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$= e^{-\mu} \mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{\kappa}}{k!} = e^{-\mu} \mu e^{\mu} = \mu.$$
(10.3)

さて、一般の確率分布関数で、平均の回りにその分布がどれだけばらつい ているか、を分散 (Variance) で表す<sup>4</sup>。分散が大きいほど、ばらつきが大き い。各ビンに入る光子数iと平均の光子数 $\mu$ について、 $(i - \mu)^2$ をすべてのiについて平均したものが分散になる。

$$Variance \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (i-\mu)^2 P_P(i;\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} (i^2 - 2i\mu + \mu^2) P_P(i;\mu)$$

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>ただし、ここで天体に固有の時間変動は存在しない事を仮定している。たとえば、自転し ているパルサー、爆発的に増光するバースターなどの時間変動はここでは考えていない。



Figure 10.2: 観測された X 線データのヒストグラム(黒)と平均 0.55 のポア ソン分布(赤)。



Figure 10.3: 明るN X 線天体を1ビン1秒で、100秒観測したときの光度曲 線。平均値 25.1 に横線を引いてある。

$$=\sum_{i=0}^{\infty} i^2 P_P(i;\mu) - 2\mu \sum_{i=0}^{\infty} i P_P(i;\mu) + \mu^2 \sum_{i=0}^{\infty} P_P(i;\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 P_P(i;\mu) - \mu^2$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu} - \mu^2 = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu} - \mu^2 = \mu \sum_{i-1=0}^{\infty} i \frac{\mu^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\mu} - \mu^2$$
$$= \mu \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} - \mu^2 = \mu(\mu+1) - \mu^2 = \mu.$$
(10.4)

導出はちょっとやっかいだったが、ここで得られたとても大切な事実、「ポ アソン分布の分散は平均に等しい」ということは暗記しておこう。

## 10.2 正規分布

図 10.1 よりも、もう少し明るい X 線天体を、やはり 1 ビン 1 秒で、100 秒間 観測した場合の光度曲線が図 10.3 である。

#### 各ビンで検出された X線光子の数は以下の通りである。

 各ピンに落ちる光子数の平均は 25.1 である。各ビンに落ちる光子数のヒ ストグラムは図 10.4 である。赤で示したのが、平均の値  $\mu = 25.1$  を (10.1) 式 に代入したポアソン分布である。一方、緑で描いたのが、平均の値  $\mu = 25.1$ 、 分散  $\sigma^2 = 25.1$  で表される正規分布である。赤い線と緑の線が良く似ている 事を確認しよう。

一般に、平均 $\mu$ 、分散 $\sigma^2$ を持つ正規分布は以下の式で表される。

$$P_G(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$
(10.5)

数学的な証明もあるのだが、「ポアソン分布の平均  $\mu$  が大きくなると、それは平均  $\mu$ 、分散  $\mu$  の正規分布で良く近似されるようになる」、ということを 直感的に覚えておこう。それを図示したのが、図 10.5 である。いろいろな  $\mu$ の値について、平均  $\mu$  のポアソン分布と、平均  $\mu$ 、分散  $\mu$  の正規分布を比較 した。ただし、正規分布は連続的な関数であるのに対し、ポアソン分布は離 散的な値に対してのみ定義されている事を明確にするために、赤棒線グラフ で示したことに注意<sup>5</sup>。

xは確率変数で、xが $x_0$ から $x_1$ の間の値を取る確率は、

$$\int_{x_0}^{x_1} P_G(x;\mu,\sigma) \, dx \tag{10.6}$$

で与えられる。よって、xが $-\infty$ から $+\infty$ の値を取る確率は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_G(x;\mu,\sigma) \, dx = 1 \tag{10.7}$$

であることを、以下の通り確認しておこう。

まず,準備として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{10.8}$$

を証明しよう。この積分の値をIとすると、積分変数は何でも良いから、

$$I^{2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^{2}} dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^{2}+y^{2})} dx dy$$

<sup>5</sup>正規分布については、緑線の下の面積が1になっていて、ポアソン分布については、赤線の長さを全部足すと、1になっているわけです。



Figure 10.4: 観測された X 線データのヒストグラム(黒)と平均 25.1 のポア ソン分布(赤) 平均 25.1、分散 25.1 の正規分布(緑)。



Figure 10.5: いろいろな値  $\mu$  について、平均  $\mu$  のポアソン分布と (赤)、平均  $\mu$ 、分散  $\mu$  の正規分布 (緑) の比較。

10.2. 正規分布

$$= 2\pi \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=\infty} = \pi.$$
(10.9)

よって、 $I = \sqrt{\pi}$ が証明された。これを使って、

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_G(x;\mu,\sigma) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 1.$$

また、その定義から、正規分布の平均が $\mu$ 、正規分布の分散が $\sigma^2$ であることを、手を動かして確認しておこう。

$$Mean \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x \ P_G(x;\mu,\sigma) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \ e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \ e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \ e^{-y^2} dy + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \mu = \mu.$$

正規分布の分散が σ<sup>2</sup> になっていることを計算で確認する前に、一般の確 率分布で、分散は「二乗の平均-平均の二乗」になっていることを確認しよう (この決まり文句も暗記しておく事)。

$$Variance \equiv \int (x-\mu)^2 f(x) dx = \int (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx$$
$$= \int x^2 f(x) dx - 2\mu \int x f(x) dx + \mu^2 \int f(x) dx = \int x^2 f(x) dx - 2\mu^2 + \mu^2$$
$$= \int x^2 f(x) dx - \mu^2.$$
(10.10)

まず、正規分布について、二乗の平均をもとめる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_G(x;\mu,\sigma) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu+\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$



Figure 10.6: 平均  $\mu = 15$ , 標準偏差  $\sigma = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  の正規分布の比較。

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \mu^2$$
$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy + \mu^2$$
$$= \sigma^2 + \mu^2. \tag{10.11}$$

ただしここで、 $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}/2$ を使った。よって、式 (10.5) で表される正規分布について、

$$Variance = \sigma^{2} + \mu^{2} - \mu^{2} = \sigma^{2}$$
 (10.12)

であることが確認できた。

#### 10.3 標準偏差と偏差値

分散、 $\sigma^2$ の平方根、 $\sigma$ が標準偏差である。これは、確率分布がどれだけ平均の回りに集中しているかを示す量である。同じ平均 $\mu$ を持つ正規分布でも、 $\sigma$ が小さい分布は「細く」、 $\sigma$ が大きい分布は「太い」ことがわかるだろう(図 10.6)。いつでも確率分布をxで積分すると1になることに注意。正規分布を、横軸を平均 $\mu$ からのずれを $\sigma$ を単位にして描いてみよう(図 10.7)。この図は、



Figure 10.7: 正規分布において、横軸をσを単位として表したときの確率分布

正規分布において、確率変数の平均からのずれが $-1\sigma$ から $+1\sigma$ のあいだに ある確率は68.26%、というように見る。同様に、平均からのずれが $+2\sigma$ よ りも大きい確率は、約2.27%であることがわかる。

ある確率変数が、どれだけ平均からずれているかを表すときに、「何々シ グマ」という言い方をする。たとえば、仮に日本人男性の身長の分布が165cm で、標準偏差が8cmの正規分布に従うとすると、身長181cmの人は平均より も2シグマ背が高く、それよりも背が高い人は、人口の中の約2.27%である。 身長189cmの人は平均よりも3シグマ背が高く、それよりも背が高い人は、 人口の中の約0.13%である。

いわゆる「偏差値」は、平均を 50,1 シグマを 10 としたときに、平均から どれだけずれているかを示す指標である。たとえば、偏差値 70 というのは平 均よりも 2 シグマ上位にいることで、それよりも上位の人は全体の約 2.27 % である。

# 10.4 $\chi^2$ (カイニ乗)分布

平均  $\mu$ ,標準偏差  $\sigma$  である正規分布に従う確率変数 x を、えいやっ、と取って きて  $(x - \mu)/\sigma$  という量を作ってみよう。これは、0 の回りに対称にばらつ き、大きく 0 からずれることは稀なので、-1 から+1 の間の値を取る事が多い



Figure 10.8: 自由度 1, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 20 の  $\chi^2$  分布。"Statistical and Computation Methods in Data Analysis"(ISBN 0-7204-0334-0) より。

だろう。

では、同じ正規分布を考え、そこから $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ というN 個の値を とってきて、

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \tag{10.13}$$

という量を定義したら、その値はどうなるだろうか? 各項は1の回りにばら ついているので、 $\chi^2$  は N の回りにばらつくはずである。 $\chi^2$  の従う確率分布 を自由度 N の  $\chi^2$  分布 (カイ二乗分布) と呼ぶが、その平均は上記の推測通り N である。また、その分散は 2N であることがわかっている。 $\chi^2/N$  のことを reduced  $\chi^2$  ( $\equiv \chi^2_N$ ) と呼び、この値は1に近い。

 $\chi^2$ 分布の表式はやや複雑なので、ここには記さないが、それをプロット したものは図 10.8 の通りである。それぞれ、自由度が平均になっていること、 (当然であるが)積分すると1になっていることに注意。

#### 10.5 カイニ乗検定

さて、図 10.3,10.4 の例で、この X 線天体の強度が本当に一定かどうか、検定 してみよう。各時間ビンに入る X 線光子数はポアソン分布に従う訳だが、十 分に明るいので(ービンあたりのカウント数の平均は約 25)、図 10.5 から明 らかなように、これは正規分布で近似してよい。よって、N = 100 ビンにつ いて、(10.13) に従って  $\chi^2$ を計算すると、それは自由度 100 の  $\chi^2$ 分布に従っ ているはずである。しかし、この天体の「真の」平均  $\mu$  と標準偏差  $\sigma$  を我々 は知らない。限られた観測データから、それらを推定できるだけである。観 測データから求めた平均を

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{10.14}$$

として、ポアソン分布では分散は平均に等しいこと標準偏差は平均の平方根 に等しい)から、

$$\chi^{2} = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{x_{i} - \bar{x}}{\sqrt{\bar{x}}} \right)^{2}$$
(10.15)

という値を観測データだけから計算することができる。この新たな  $\chi^2$  には、 「自由な」パラメーターは N 個ではなく、N-1 個である事に注意<sup>6</sup>。よって、 式 (10.15) に従って計算した  $\chi^2$  は、自由度 N-1 の  $\chi^2$  分布に従う。

計算してみると、 $\chi^2 = 86.18, \chi^2_N = 86.18/99 = 0.871$ となる。ここで、  $\chi^2$ 分布の表 (図 10.9) と照らし合わせる<sup>7</sup>。表には自由度 99 はないが、それほ ど変わらないので、自由度 100 の  $\chi^2$ 分布を見てみる。ここには、「上側確率」 の値と、それを与える  $\chi^2_N$ の値が書いてある。たとえば、上側確率が 0.5, 0.1, 0.01, 0.001 となる  $\chi^2_N$ の値は、それぞれ 0.993, 1.358, 1.494 である。これは、 自由度 100 の  $\chi^2$ 分布において、 $\chi^2_N$ が 1.494 以上であるような事象の起きる 確率は 0.001 以下 (非常に稀) であることを意味している。それにたいして、 現在の  $\chi^2_N = 0.871$  という値は、「なんてことのない」値で、自由度 100 の  $\chi^2$ 分布において普通に起こりうる。よって、図 10.3 のライトカーブ、図 10.4 の ヒストグラムで与えられる天体の時間変動は一定だと考えてよい。

では、図 10.10 で与えられるライトカーブの場合はどうであろうか?これ は先のライトカーブで、一ビンだけ、カウント数を 15 から 65 に作為的に変更 したものである。もし、このようなライトカーブが観測されたとしたら、こ れは統計的なゆらぎで起きうることだろうか?あるいは、「X 線フラッシュ」<sup>8</sup> のような宇宙現象であろうか?先の例と同様に、平均を計算すると 25.58 とな

 $<sup>^{6}</sup>N-1$  個の  $x_i$  と  $\bar{x}$  の値が与えられば、残り 1 個の  $x_i$  の値も決まる

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>電卓、ポケコンによっては、ポアソン分布、正規分布、 $\chi^2$ がライブラリとして入っているものがある。そういうモノを買おう!私の愛機、FX-860Pは残念ながら製造中止のようだが。。。

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>実際に、そういう現象が知られている。

		0.001	10.827	6.908 5.423	4.617 4.102	3.743	3.266	3.097 2.959	2.842 2.742	2.656 2.580	2.513	2.453 2.399	2.266	2.194	2.079	1.990	616.1	1.888 1.861	1.812	1.770	1.751	1.660	1.560	1.494	1.446	1.381 1.358	1.338
		0.01	6.635	4.605 3.780	3.319 3.017	2.802	2.511	2.407	2.248	2.130 2.082	2.039	2.000 1.965 1.034	1.878	1.791	1.755 1.724	1.696	1.649	1.628 1.610	1.576	1.562 1.548	1.535 1.523	1.473	1.404	1.358	1.299	1.278 1.261	1.247
		0.02	5.412	3.912 3.279	2.917 2.678	2.375	2.271	2.1187	2.056 2.004	1.959	1.884	1.852 1.823	1.773	1.712	1.648	1.599	1.559	1.541 1.525 1.511	1.497	1.485 1.473	1.462	1.410	1.351	1.311	1.283	1.243	1.216
	4	0.05	3.841	2.996 2.605	2.372 2.214	2.099	1.938	1.831	1.789	1.720	1.666	1.644 1.623 1.604	1.571	1.542	1.496 1.476	1.459	1.429	1.417 1.405 1 304	1.384	1.375	1.358	1.318	1.273	1.243	1.221	1.191	1.170
		0.10	2.706	2.303 2.084	1.945	1.774	1.670	1.632	1.570	1.524	1.487	1.471 1.457 1.444	1.432	1.401	1.368	1.342	1.321	1.311 1.303 1.295	1.288	1.281	1.269	1.240	1.207	1.185	1.169	1.146	1.130
	/	0.20	1.642	1.609	1.497	1.426	1.379	1.360	1.330	1.296	1.287	1.279	1.258	1.241	1.223	1.208	1.196	1.191 1.186 1.182	1.178	1.174	1.167	1.150	1.130	1.117	1.107	1.093	1.083
	-	0.30	1.074	1.222	1.220	1.198	1.191	1.184	1.173	1.163	1.155	1.151 1.148 1.145	1.142	1.134	1.125	1.118	1.112	1.106	1.102	1.100	1.096	1.087	1.076	1.069	1.063	1.055	1.050
		0.40	0.708	0.916 0.982	1.011	1.035	1.044	1.046	1.048	1.049	1.049	1.049 1.048 1.048	1.048	1.047	1.045	1.044	1.042	1.042	1.040	1.039	1.038	1.036	1.032	1.029	1.027	1.024	- 1.022
= $\chi^2/\nu$ corresponding mber of degrees of	of	0.50	0.455	0.693	0.839 0.870	0.891	0.918	0.934	0.940 0.945	0.949 0.953	0.956	0.959 0.961 0.963	0.965	0.970	0.974 0.976 0.978	0.979	0.980	0.983	0.984 0.985	0.986	0.987	066.0	0.993	0.994	0.995	0.996	
	correspoi	0.60	275.0	0.511	0.688 0.731	0.762	0.803	0.817 0.830	0.840 0.848	0.856 0.863	0.869	0.874 0.879 0.883	0.887 0.890	0.902	0.907 0.911 0.915	0.918	0.921	0.926 0.928	0.930	0.934 0.936	0.937	0.949	0.955	0.962	0.965	0.970	
	= $\chi^2 / \nu$ (mber of	0.70	0 148	0.357	0.549 0.549 0.600	0.638	0.691	0.710	0.741 0.753	0.764 0.773	0.781	0.789 0.796 0.802	0.808 0.813	0.823 0.831	0.838 0.845 0.850	0.855	0.860 0.864	0.868 0.872	0.875 0.878	0.881 0.884	0.886	0.905	0.921	0.928	0.934 0.938	0.942 0.945	
	uare $\chi^2_{\nu}$ = vs. the nu	0.80	0.0642	0.223	0.469	0.512	0.574	0.598	0.635	0.664 0.676	0.687	0.697 0.706 0.714	0.722 0.729	0.753	0.771 0.771 0.779	0.786	0.792 0.798	0.804 0.809	0.813 0.818	0.822 0.825	0.829	0.856	0.873	0.890	0.898	0.910	
a a a	ed chi-square ding $\chi^2$	P 0.90	0.0158	0.105	0.266 0.322	0.367	0.436	0.463 0.487	0.507 0.525	0.542	0.570	0.582 0.593 0.604	0.613 0.622	0.638 0.652	0.665 0.676 0.687	0.696	0.704	0.720 0.726	0.733 0.738	0.744 0.749	0.754	0.790	0.814 0.824	0.839	0.850 0.860	0.868 0.874	
$P_x(x^2, \nu)$	the reduc ) of excee	10.95	0.00303	0.0515	0.1178 0.178 0.229	0.273	0.342	0.369 0.394	0.416 0.436	0.453 0.469	0.484	0.498 0.510 0.522	0.532 0.543	0.561	0.592 0.605 0.616	0.627	0.637 0.646	0.655 0.663	0.670 0.677	0.683 0.690	0.695	0.739	0.768	0.798	0.812 0.823	0.833 0.841	
	tibution. Values of or obbility $P_{\chi}(\chi^2; \nu)$	0.98	0 00063	0.0202	0.107 0.150	0.189	0.254	0.281 0.306	0.328 0.348	0.367 0.383	0.399	0.413 0.427 0.439	0.451 0.462	0.482 0.500	0.516 0.530 0.544	0.556	0.567 0.577	0.587 0.596	0.604 0.612	0.620 0.627	0.633	0.684	0.718 0.731	0.753	0.770	0.796 0.806	
		0.99	0.00016	0.0100	0.0742	0.145	0.206	0.232 0.256	0.278 0.298	0.316 0.333	0.349	0.363 0.377 0.390	0.402 0.413	0.434 0.452	0.469 0.484 0.498	0.511	0.523 0.534	0.554	0.563 0.572	0.580 0.587	0.594	0.649	0.701	0.724	0.758	0.771 0.782	
	TABLE ( $\chi^2$ district to the p freedom	A	-	- (1 (	n 4 w	0	- 80	9 10	11	13	15	16 17 18	28	22	26 30 30	32	34	38 40	42 44	46 48	50	02	00 100	120	140	200	

Figure 10.9:  $\chi^2$  分布の表(上側確率)。"Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences", Bevington and Robinson (ISBN 0-07-911243-9) より。今時は、PC で簡単に計算できてしまうが、昔はこのような表から値を



Figure 10.10: 図 10.3 のライトカーブのうち、1 ビンだけ、カウント数を 15 から 65 に変えたもの。平均値 25.58 に横線を引いてある。

る。 $\chi^2 = 141.84, \chi_N^2 = 1.432$ である。 $\chi^2$ 分布の表と照らし合わせると、このように大きな $\chi_N^2$ の値が起きる確率は、0.01以下であるが、0.001以上であることがわかる。ライトカーブから作った $\chi^2$ が、もし $\chi^2$ 分布に従うとしたら非常に稀なことが起きた、ということは、そもそもそれが $\chi^2$ 分布に従っていないこと、つまり各ビンに落ちてくるX線光子数の分布は、ある平均値の回りの正規分布にしたがっていない(=この天体は時間変動している)ことを示唆する。

まとめると、図 10.10 のような X 線天体の時間変動が観測されたとき、こ の天体の強度が一定であると言う仮説は、危険率 0.01 で棄却できる (これほ ど稀な事は、偶然には 100 回に一回も起こらない)。しかし、危険率 0.001 で は棄却できない (これほど珍しい事でも、1000 回に一回は偶然起きることが ある)。





Figure 10.11: 図 10.10 に対応するヒストグラム。図 10.4 と比較すると、15 カ ウント入るビンが一つ減り、65 カウント入るビンが一つ増えている。

# Chapter 11

# 大雑把に天体の物理量を求める事

ブラックホール、中性子星、白色矮星というコンパクト星を含む連星系は「X線」連星系として観測される。なぜ、これらの連星系はX線で明るく観測されるのだろうか?ここでは、それを考えてみよう。

## 11.1 重力エネルギーの解放

中性子星やブラックホールと対をなす伴星から物質が中性子星、ブラックホールに落ちていくとき、重力エネルギーが解放される。単位時間あたり $\dot{M}$  [g/s] の物質が落ちていくとすると、重力エネルギーが解放される割合、L [erg/s] は、以下のように見積もられる。

$$L \approx \frac{GMM}{r_{in}}.$$
 (11.1)

ここで、*r<sub>in</sub>*は、重力エネルギーが解放される一番内側の半径である。中性子 星のときは中性子星の半径、ブラックホールの場合は降着円盤の内縁の半径<sup>1</sup>。

半径  $\sim 10 \text{ km}$ 、  $\sim 1.4 M_{\odot}$ の典型的な中性子星を考えよう。近接連星系において、伴星からは  $\sim 10^{18} \text{ g/s}$ の物質が流れ出すことがわかっている。このときの中性子星光度を見積ってみよう。

$$L \approx \frac{1.4GM_{\odot}10^{18} \,[\text{g/s}]}{c^{2} 10 \,[\text{km}]} c^{2} \left(\frac{10 \,[\text{km}]}{r_{in}}\right) \left(\frac{M}{1.4 \,M_{\odot}}\right) \left(\frac{\dot{M}}{10^{18} \,[\text{g/s}]}\right) \\\approx \frac{1.4 \times 1.5 \times 10^{18}}{10} (3 \times 10^{10})^{2} \,[\text{erg/s}] \left(\frac{10 \,[\text{km}]}{r_{in}}\right) \left(\frac{M}{1.4 \,M_{\odot}}\right) \left(\frac{\dot{M}}{10^{18} \,[\text{g/s}]}\right) \\\approx 2 \times 10^{38} \,[\text{erg/s}] \left(\frac{10 \,[\text{km}]}{r_{in}}\right) \left(\frac{M}{1.4 \,M_{\odot}}\right) \left(\frac{\dot{M}}{10^{18} \,[\text{g/s}]}\right).$$
(11.2)

<sup>1</sup>物質は角運動量を持ってブラックホールに渦巻きながら落ちていくので、ブラックホール のまわりに円盤が形成される。これを降着円盤と呼ぶ。 実際、 $Sco X-1^2$ を始めとする明るいX線源の典型的な光度は $\sim 10^{38} \text{ erg/s}$ である。

#### 11.2 エディントン限界光度

天体にはその質量から決まる、エディントン限界 (Eddington limit) と言う限 界光度がある。それ以上明るくなると、輻射圧によって星の大気が飛ばされ てしまう。宇宙にある元素の大部分が水素である。水素の質量を m<sub>H</sub> として、 重力と輻射圧のつりあいの式は以下のように書ける。

$$\frac{\sigma_T}{c} \frac{L_{Edd}}{4\pi r^2} = \frac{GMm_H}{r^2}.$$
(11.3)

ここで $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ はトムソン断面積<sup>3</sup>で、電子が光を散乱する際の断面積である。これから、

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c GM}{\sigma_T/m_H} = \frac{4\pi c GM}{\kappa_T}.$$
(11.4)

 $\kappa_T$ はトムソン散乱による質量吸収係数で、 $\sim 0.4 \text{ cm}^2/\text{g}$ である。よって、

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c^3}{\kappa_T} \frac{GM_{\odot}}{c^2} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \approx 1.3 \times 10^{38} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \text{ [erg/s]}.$$
 (11.5)

白色矮星の最大質量 (チャンドラセカール限界) は  $1.4M_{\odot}$  で、それが中性 子星の平均質量に対応している。中性子星の最大質量は  $\sim 2M_{\odot}$  で、それよ り重いコンパクト星はブラックホールである<sup>4</sup>。ブラックホールについては、 (11.5) に従って、質量が大きいほど、明るく光ることができる。

前節で示したとおり、~10<sup>18</sup> erg/s で質量降着している中性子星はほぼエ ディントン限界で光っていることに注意。これより質量降着率が大きくなっ ても、より明るく光ることはできない(物質は降着できずに、輻射圧で跳ねと ばされてしまう)。

# 11.3 黑体輻射 (blackbody radiation)

黒体輻射は物質と輻射場が完全に熱平衡にあるときの放射を記述し、[erg/s/cm<sup>2</sup>/Hz/str] という単位を持つ (str は立体角)。どんな状況においても熱平衡にあるかぎり 黒体輻射は成立するので、二つの準位を持つ原子と輻射場を考える。

104

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>さそり座 X-1。全天で一番明るく、最初に発見された X 線源。

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>断面積という概念に慣れておこう。文字通り、一つの電子がこれだけの面積をもって、光の道筋に立ちはだかっていると思ってよい。

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>質量以外にブラックホールの観測的証拠はなかなか見つからないのだが、「ブラックホールしかありえない」、ということ。

上の準位にある原子が単位時間あたり  $A_{21}[s^{-1}]$  の割合で下の準位に遷移 し、光子を放射する。一方、輻射場の強度を  $J_{\nu}$  として、光子は単位時間あた り、 $B_{12}J_{\nu}$  の割合で、吸収される。また、輻射場の強度に刺激されて起きる 放射の割合が、 $B_{21}J_{\nu}$  である。下の準位にある原子の密度を  $n_1$ 、上の密度に ある原子の密度を  $n_2$  とし、系が平衡状態にあることから、

$$n_1 B_{12} J_{\nu} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} J_{\nu} \tag{11.6}$$

である。これを  $J_{\nu}$  について解けば、

$$J_{\nu} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}.$$
(11.7)

ここで、熱平衡の式より、

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp(h\nu/kT).$$
 (11.8)

よって (11.7) は、

$$J_{\nu} = \frac{A_{21}/B_{21}}{\exp(h\nu/kT)(B_{12}/B_{21}) - 1}.$$
(11.9)

ここで、一般に Einstein の関係式、

$$B_{12} = B_{21},$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2}B_{21}$$
(11.10)

が成立することがわかっている。前者は、詳細つりあい (detailed balance) を示し、後者では、 $2h\nu^3/c^2$ が、[erg/cm<sup>2</sup>/s/Hz] という単位を持つフラック スである。係数 2 は、変更の自由度 2 を表わしている。式 (11.10) を用いて、 (11.9) は、

$$J_{\nu} = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad [\rm{erg/s/cm^2/Hz/str}]. \tag{11.11}$$

これが黒体輻射の式で、通常  $B_{\nu}(T)$  で表す。

# 11.4 黒体輻射のスペクトルと波長、振動数、エネルギー の関係

黒体輻射のスペクトル、(11.11)を振動数の関数としてプロットしたのが下図 である (横軸、縦軸ともに対数表示であることに注意)。光の波長 λ と振動数 ν のあいだには光速 c を通じて、

$$c = \lambda \nu \tag{11.12}$$

という関係があることを思いだそう。また、光子のエネルギーEはプランク 定数hを使って、

$$E = h\nu = h\lambda/c \tag{11.13}$$

である。電磁波の波長の長いほうから短いほうに向って、電波、赤外線、可 視光線、紫外線、X線、ガンマ線である。それらの境界は必ずしもはっきり と定義されているわけではない<sup>5</sup>。

天体のエネルギースペクトルを表わすとき、横軸を波長 (単位はÅ,  $\mu$ m など)、振動数 (Hz)、エネルギー (eV) のそれぞれで表す場合があるから注意しよう。プランク定数  $h = 6.626 \times 10^{-27}$  erg/s, 光速  $c = 2.9978 \times 10^{10}$  cm/s、エネルギーの換算式 1 eV =  $1.602 \times 10^{-12}$  erg を使って、

$$1 \text{ [Hz]} \leftrightarrow 4.1357 \times 10^{-15} \text{ [eV]} \leftrightarrow 3.3356 \times 10^{-11} \text{ [cm}^{-1]}$$

である。「理科年表」にこれ以外の単位も含めた詳細なエネルギー換算表があ るから、それを手元に置いておくと便利。

また、ボルツマン定数  $k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$ を用いて、1 eV  $\approx 11600$  K であるから、物質 (天体) の温度を表すのに、[K] で表すかわりに [eV] また [keV] で表してもよい。そうすると、温度 kT [eV] を持つ天体からの黒体輻射 のピークはほぼ  $h\nu \approx kT$  [eV] にくることがわかる<sup>6</sup>。実際、黒体輻射では物 質と輻射 (光子) が平衡状態にあるので、物質の温度に対応したエネルギーの 光子が最も多く放出されるのは自明である。たとえば、 $\sim \text{keV}$ (数千万度)の 温度を持つ中性子星表面やブラックホール周辺の降着円盤からの黒体輻射は、 $\sim \text{keV}$ の X 線でもっとも明るく観測される。

#### 11.5 黒体輻射の例

106

黒体輻射は宇宙のいたるところで観測されるが、最も普遍的なのが宇宙背景 輻射 (Cosmic Microwave Background Radiation; CMBR) である。 これは、ビッグバンから数十万年後、宇宙が約 3000 K の黒体輻射に満ちて いたときの光が、宇宙が 1000 倍膨張した結果、温度 (エネルギー) が 1/1000 に下がった (赤方偏移) ものである。NASA の COBE 衛星はその温度を正確 に 2.725  $\pm$  0.002 K と測定した。COBE 衛星の業績により、Mather と Smoot の 2 人は 2006 年のノーベル物理学賞を受賞している<sup>7</sup>。さらに、CMBR の微 少な空間的ゆらぎを測定することにより、宇宙膨張のパラメーターに制限が つき、宇宙の年齢を知ることができる。WMAP 衛星の測定によって、それは 137 億年と求められている。

 $<sup>{}^{5}</sup>X$ 線天文学では、2-10 keVの波長域 (エネルギーバンド) が、標準的に使われている。

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>厳密には  $h\nu = 2.82kT$  にピークがくる。これは式 (11.11) を  $h\nu$  で微分すれば得られる。 <sup>7</sup>http://nobelprize.org/nobel\_prizes/physics/laureates/2006/phyadv06.pdf。



Figure 11.1: 上: COBE 衛星が測定した CMBR のスペクトル。四角が測定 点、実線は 2.735 K の黒体輻射。Matehr et al. 1990, Astrophysical Journal, 354, L37 より。後に検出装置の較正が進み、最終的に COBE チームが 1999 年に発表した CMBR の温度は 2.725±0.002 K である。横軸の単位が波数 (= 波長の逆数=振動数/光速) であること、横軸、縦軸ともに線型表示であるこ とに注意。下: 同じ 2.725 K の黒体輻射のスペクトルを対数表示したもの。 黒体輻射に限ったことではないが、スペクトルの表示の仕方によって、見た 目の印象は大部違ってくることに注意。



Figure 11.2:

# 11.6 ステファンボルツマンの法則

黒体輻射をしている物体の表面から、単位面積あたり放射されるエネルギー を求めよう(図11.2)。黒体輻射の式に $\cos\theta$ を掛けて(ここに注意!)、全振動 数と、立体角で $\theta = 0$ から  $\pi/2$ まで積分する。立体角で積分する部分は

$$\int \cos\theta d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \pi$$
(11.14)

となる。よって、求めるフラックスは

$$\pi \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \pi \left(\frac{2h}{c^2}\right) \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \tag{11.15}$$

$$= \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 \equiv \sigma T^4 \quad [\text{erg/s/cm}^2]. \tag{11.16}$$

ここで、 $\int_0^\infty x^3/(e^x-1)dx=\pi^4/15$ を用いた。 $\sigma$ がステファンボルツマン 定数であり、以下の値を持つ。

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-5} \,[\mathrm{erg/s/cm^2/K^4}] = 1.03 \times 10^{24} \,[\mathrm{erg/s/cm^2/keV^4}]. \quad (11.17)$$

# 11.7 中性子星、白色矮星の表面温度

エディントン光度  $\sim 10^{38} \, [{\rm erg/s}]$ で光っている、中性子星、白色矮星の表面温度を見積もってみよう。黒体放射を仮定すると、星の半径をRとすると、ス
テファン・ボルツマンの法則から $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ だから、

$$T \approx \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{1/4} \\ \approx \left(\frac{10^{38} \text{ erg/s}}{4\pi (10 \text{ km})^2 10^{24} [\text{erg/s/cm}^2/\text{keV}^4]} \left(\frac{L}{10^{38} \text{ erg/s}}\right) \left(\frac{10 \text{ km}}{R}\right)^2\right)^{1/4} \\ \approx 2 \text{ keV } \left(\frac{L}{10^{38} \text{ erg/s}}\right)^{1/4} \left(\frac{10 \text{ km}}{R}\right)^{1/2}.$$
(11.18)

よって、半径 10 km の中性子星は、 $\sim$ 2 keV の X 線で光っていることがわかる<sup>8</sup>。一方、半径  $\sim$  5000 km の白色矮星の表面温度は、 $\sim$ 90 eV になり、これは軟 X 線源として観測される<sup>9</sup>。実際、このような白色矮星 X 線源が多数観測されており、Super Soft Sources と呼ばれている。

## 11.8 ブラックホールの周りの降着円盤の温度

ブラックホールに表面はないが、前節と同様に、その周りの降着円盤の温度 を見積ることができる。シュワルツシルドプラックホール (回転していないプ ラックホール)を考えよう。すでに 7.2 節で学んだように、シュワルツシルド 半径、 $R_s = 2GM/c^2$ である<sup>10</sup>。

ところで、シュワルツシルド時空では、3 R<sub>s</sub>より内側では安定な円軌道 が存在しないことが知られている<sup>11</sup>。よって、通常、ブラックホールの周りの 降着円盤の内縁の半径は3 R<sub>s</sub>である。実際には円盤の温度は半径に依存する わけだが、非常に大雑把に、内縁付近の円盤の面積を 2π(3R<sub>s</sub>)<sup>2</sup> と仮定し、質 量 M の天体のエディントン限界光度における降着円盤温度を見積もることに しよう。もっとも単純な場合として、降着円盤が黒体輻射をしていると仮定 する。

$$L_{Edd} = \frac{4\pi \, c \, GM}{\kappa} \approx 2\pi \, (3R_s)^2 \, \sigma \, T^4 \tag{11.19}$$

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>1 eV=11604 K だから、~2 keV は、2300 万度と言っても良い。

 $<sup>{}^9</sup>$ エネルギーが低い X 線を軟 X 線、soft X-rays、高い X 線を硬 X 線、hard X-rays と呼ぶ。

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>厳密には  $R_s = 2GM/c^2$  という関係はアインシュタイン方程式を解かないと出てこないの だが、以下のように覚えておくこともできる。質量 m の物体が質量 M、半径 r の天体から脱 出する際の脱出速度は、ニュートン力学で考えると  $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = 0$  より、 $v = \sqrt{2GM/r}$ 。 半径が小さくなっていくと、天体の重力は強くなるので、それから脱出するのに必要な速度は 大きくなる。半径が、 $2GM/c^2$ まで小さくなると、脱出速度は光速に等しくなる。この半径が シュワルツシルド半径。

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>これこそ、運動方程式を一般相対論的に解かないと出てこない。相対論の教科書を参考にしてください。

より温度を求めると、

$$T \approx \left(\frac{c^3}{18\sigma\kappa}\right)^{1/4} \left(\frac{2GM_{\odot}}{c^2}\right)^{-1/4} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-1/4} \approx 1 \text{ keV } \left(\frac{M}{10 M_{\odot}}\right)^{-1/4}.$$
(11.20)

よって、最大光度 (エディントン限界) で光っている質量  $\sim 10 M_{\odot}$  のブラックホールの周りの降着円盤は、 $\sim 1 \text{ keV}$ の温度を持つので、X 線領域で観測されることがわかる。

ブラックホールの質量が大きいほど、降着円盤の温度が低くなることに注意。たとえば、太陽の十億倍の質量を持つブラックホール<sup>12</sup>の降着円盤の温度は~10 eV となり、これは紫外線領域で観測される。

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>このような巨大ブラックホールが、活動的銀河中心核 (Active Galactic Nuclei; AGN) の正体と考えられている。