慶応大学理工学部

物理学科

「応用物理学第1」 2016年7月5日、12日

海老沢 研

(JAXA 宇宙科学研究所)

2016 年7月14日

目 次

第1章	はじめに:宇宙の広がり 5		
1.1	目然界における最も重要な3つの定数5		
1.2	ノフノク时间、ノフノク長、ノフノク員重 0		
1.0			
1.4	ノノダクホールとノノノク松士 ・・・・・・・・・・・・・・・・	1	
第2章	準備:X 線観測データを理解するために	9	
2.1	基本事項	9	
	2.1.1 基本中の基本	9	
	2.1.2 電磁気学の単位系	10	
2.2	原子物理の復習・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	12	
	2.2.1 覚えておくと便利な数値や公式	12	
2.3	宇宙物理の基礎	15	
	2.3.1 エディントン限界光度	15	
	2.3.2 白色矮星と中性子星	16	
第3章	ブラックホール	19	
3.1	ブラックホールの特徴	19	
	3.1.1 ブラックホールのキホン	19	
	3.1.2 ブラックホールの密度	21	
3.2	Innermost Stable Circulr Orbit (ISCO) とブラックホール		
	のエネルギー効率.....................	21	
第4章	降着円盤の X 線観測	23	
4.1	X 線天文学と降着円盤	23	
4.2	ディスクの厚さ、温度とポテンシャルエネルギーの関係	25	
4.3	標準降着円盤からの X 線放射	25	
	4.3.1 標準降着円盤の温度の半径依存性	25	
	4.3.2 Multicolor disk blackbody の光度	26	
	4.3.3 ブラックホールの周りの降着円盤の温度	26	
付録A	問題	29	

3

第1章 はじめに:宇宙の広がり

1.1 自然界における最も重要な3つの定数

自然界におけるもっとも重要な3つの定数は、重力常数(*G*)、光速(*c*)、 プランク定数(*h*)である。

 $\begin{aligned} G &= 6.67428(67) \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \text{ (m}^3/\text{kg/s}^2) \\ c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \\ h &= 6.62606896(33) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \end{aligned}$

 $\hbar \equiv h/2\pi$ もよく用いられる。

 $\hbar = 1.054571628(53) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})$

これらの定数の単位に注意しよう。それらは、kg, m, s、つまり質量、 長さ、時間の組み合わせで表されている。

ニュートン力学では、基礎的な方程式に重力定数Gは入ってきても、光速cは入ってこなかった。これは重力によって生じるモノの速さが光速cに比べてはるかに小さい場合のみを扱ってきたからである。光に近い早さでモノが動く状況を記述するには、特殊相対性理論(特殊相対論)が必要になり、そこには光速cが出てくる。しかし、そこでは重力は扱っていないので、Gは出てこない。重力によって生じるモノの速さが光速cに比べて無視できない場合を扱うのが、一般相対性理論で、その基本方程式には $c \ge G$ の両方が出てくる。一般相対性理論は巨視的な世界を扱う理論なので、そこにはプランク定数hは出てこない。

プランク定数hは、小さなスケールに於ける物理現象を記述する量子力 学に出てくる。ただし、シュレディンガー方程式にはhはでてくるが、cもGも出てこない。これは、素粒子が光速に近い速度で動いていること を考慮せず、また素粒子同士の重力を考慮していないからである。実際に は、素粒子は光速に近い速さで運動しているので、シュレディンガー方程 式に特殊相対性理論の効果を考慮したディラック方程式が必要になり、こ こには必然的にhとcが出てくる。

その後、素粒子論は発展し、現在では、自然界に存在する四つの力、電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用、重力相互作用のうち、重力相 互作用をのぞく三つを統一する標準理論(hとcを用いて記述される)が研 究されている。そのような理論を検証するには、素粒子をほとんど光速まで加速して衝突させて、とことんばらばらにする必要があり、そのために CERNのLarge Hadolon Collider¹のような巨大加速器実験が行われている訳である²。

さらに、素粒子間の重力まで考慮に入れて、4つの相互作用を統一的に 説明する理論、h、c、Gが同時に出てくる理論はあるのだろうか?その ような量子重力理論はまだ存在しない。少なくとも、正しい、と広く受け 入れられているものは。また、そのような理論の検証には、言ってみれば 素粒子間に働く重力の測定が必要であり、それは地上ではほぼ不可能であ る。それが実現しているのは、この宇宙ではビッグバンの瞬間にしかない わけで、必然的に素粒子論の研究は、ビッグバンの起源を探る研究になる。

1.2 プランク時間、プランク長、プランク質量

宇宙を記述する3つの物理量は、時間、空間(長さ)、質量である。実際、 上で示したように、宇宙を記述するもっとも重要な3つの物理量、*c*,*h*,*G* は、これらの単位の組み合わせで表される。

c,h,Gから自然に導かれる時間と長さと質量が、(プランク時間)、(プ ランク長)、(プランク質量)である。プランク質量とプランク長から、プ ランク密度を定義することができる。プランク時間、プランク長が、現在 の物理学で考えられる時間と空間の最小単位である。すなわち、現在知ら れている物理常数をどう捻っても、これ以上短い時間や空間は作れない。 非常に大雑把に言って、ビッグバンからプランク時間後の宇宙の大きさが プランク長、そのときの宇宙の密度がプランク密度である。

Planck 時間 =
$$t_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.39 \times 10^{-44}$$
 [sec] (1.1)

Planck 長さ =
$$l_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.61 \times 10^{-35}$$
 [m] (1.2)

$$Planck \; \mathbf{\tilde{g}} \mathbf{\Xi} = m_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.18 \times 10^{-8} \; [\text{kg}] \tag{1.3}$$

$$Planck \ \mathbf{\hat{g}}\mathbf{E} = \rho_P \equiv \frac{c^5}{\hbar G^2} = 5.16 \times 10^{96} \ [\text{kg/m}^3] = 5.16 \times 10^{93} \ [\text{g/cm}^3]$$
(1.4)

¹http://lhc.web.cern.ch/lhc/

²素粒子物理学の解説として、おこちゃま向けですが、http://www.kek.jp/kids は 良く書かれています。

1.3 宇宙の年齢と大きさ

宇宙の年齢は約138億年と測定されている (4.3×10¹⁷ 秒)。よって、観 測可能な宇宙の大きさは138億光年と考えられる (1.3×10²⁶ m)。それぞ れ、プランク時間 (1.1)、プランク長 (1.2) と比較すると、約61桁大きい。 つまり、我々の物理的考察の対象である宇宙とは、約61桁にわたる時間 的、空間的な広がりである。

1.4 ブラックホールとプランク粒子

質量 M の天体のシュワルツシルド半径 R_S は $2GM/c^2$ で与えられる。 非常に大雑把に、ブラックホールの「半径」がシュワルツシルド半径と 思っても良い³。プランク質量とプランク長の関係は、 $l_P = Gm_P/c^2$ で与 えられるので、factor 2 を無視すれば、プランク質量を持ち、大きさ(半 径)がプランク長である仮想的な粒子はブラックホールと考えられる。こ れをプランク粒子と呼ぶ。

一方、質量 m の粒子の静止エネルギーに対応するエネルギーを持つ光 の波長がコンプトン波長 λ_C である:

$$E = mc^2 = h\nu = hc/\lambda_C. \tag{1.5}$$

すなわち、

$$\lambda_C = \frac{h}{m c}.\tag{1.6}$$

Planck 長 (1.2) と Planck 質量 (1.3) との関係は、

$$l_P = \frac{\hbar}{m_P \ c}.\tag{1.7}$$

で与えられるので、2πを無視すれば、プランク粒子のシュワルツシルド 半径とコンプトン波長は一致する。シュワルツシルド半径は質量に比例 し、コンプトン波長は反比例するので、質量がこれ以上小さくなると、コ ンプトン波長がシュワルツシルド半径を超えてしまう。これはあり得ない ので、プランク質量は宇宙で最小のブラックホール質量を与えると考えら れる。

これらの値を現実の素粒子の質量、大きさ(コンプトン波長)と比較して みよう。陽子の質量は 1.67×10^{-27} kg、コンプトン波長は 1.3214×10^{-15} m である⁴。つまり、仮想的なプランク粒子は現実の素粒子に比べてはるか に重く、はるかに小さい。

³太陽のシュワルツシルド半径は約 3km、地球のシュワルツシルド半径は約 9mm であることを覚えておこう。

⁴陽子の質量 (静止エネルギー) を $m_p c^2 \approx 1 \text{ GeV}$ と覚えておこう。また、 $\hbar c \approx 2000$

 $[\]overline{\text{eV-A} \ \epsilon \hat{\textbf{g}} \hat{\textbf{z}} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{s} \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{\text{s}}}$ これから、陽子のコンプトン波長は、 $h/mc = 2\pi\hbar c/mc^2 \approx 2\pi \times 2000 [\text{eV} \cdot \text{A}]/10^9 [\text{eV}] \approx 10^{-15} \text{ m.}$ また、 $1 \text{ eV} \approx 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg} \ \text{t} \hat{\textbf{g}} \hat{\textbf{z}} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{s}$ これから、陽子の質量については、 $m_p \approx 1 [\text{GeV}]/c^2 \approx 10^9 \times 1.6 \times 10^{-12} [\text{erg}]/(3 \times 10^{10} [\text{cm/s}])^2 \approx 2 \times 10^{-24} \text{ g.}$

第2章 準備:X線観測データを理解するために

2.1 基本事項

2.1.1 基本中の基本

以下の数値や公式を覚えておくと便利である。ただし、ここではガウス 単位系を用いる。

1 pc (パーセク) $\approx 3 \times 10^{18}$ cm

年周視差が 1″ になる星までの距離が 1pc である。よって、1″ をラジア ンで表し、以下の関係がある:

$$1 \text{ pc} \approx \frac{1 \text{ A.U.}}{\frac{\pi}{180 \times 60 \times 60}}$$

光速 $c \approx 3 \times 10^{10}$ cm/s

1 年 = $3.15 \times 10^7 \approx \pi \times 10^7$ 秒

地球と太陽間の距離 $\equiv 1$ 天文単位 (Astronomical Unit; AU) ≈ 500 光秒

X線の波長とエネルギーの換算式

$$E \,[\mathrm{keV}] \approx \frac{12.4}{\lambda \,[\mathrm{\AA}]}$$

「12.4 keVのX線の波長は1Å」と覚えておこう。

X線のエネルギーと温度の換算式

$$1 \text{ eV} = 11604 \text{ K} \approx 10^4 \text{ K}$$

非常に大ざっぱに言って、「1 keV で光っている天体の温度は約1000万度」。

エネルギーの単位の換算

$$1 \text{ eV} \approx 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

ボルツマン定数

$$k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$$

ステファン-ボルツマン定数

$$\sigma \approx 1.0 \times 10^{24} \ \mathrm{erg/s/cm^2/keV^4}$$

この単位で覚えておくと実用的。たとえば、2 keV の黒体輻射をしてい る半径 10 km の中性子星の光度 *L* は、

$$L = 4 \pi (10 \text{ km})^2 \sigma (2 \text{keV})^4 \approx 2 \times 10^{38} \text{ erg/s}.$$

2.1.2 電磁気学の単位系

電磁気学においては、複数の単位系が存在することに注意が必要であ る。力学的な物理量については、独立した単位として、長さ、質量、時間 がある。電気、磁気のクーロンの法則を、それぞれ、以下のように書こう。

$$F = \frac{1}{h_1 \epsilon} \frac{qq'}{r^2},\tag{2.1}$$

$$F = \frac{1}{h_2 \mu} \frac{mm'}{r^2}.$$
 (2.2)

ここで、 h_1, h_2 は比例係数、 ϵ, μ が単位 (元) を持つ量である。左辺は力、 [質量・長さ・時間⁻²] と決まっているので、電荷 q、磁荷 m をどのような 単位で表すかによって、 ϵ および μ の単位が決まってくる。

MKSA 単位系

長さ、質量、時間をm、kg、s で表し、さらに電流についてアンペア(A) という新たな基本単位を導入する。電荷の単位はクーロン(C)となり、こ れは1Aの電流が1秒に運ぶ電荷と定義される。真空中のクーロンの法則は、以下のようになる。

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2},\tag{2.3}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{mm'}{r^2}..$$
 (2.4)

ここで、 ϵ_0 は、(2.3) より、[アンペア²・時間⁴・長さ⁻³・質量⁻¹] という 次元を持つことになる。電磁気学より、光速を *c* として、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \ \mu_0}},\tag{2.5}$$

なので、これから µ0 の次元がわかる。さらに、(2.4) から、磁荷の単位が 決まる。MKSA 単位系は、「電流」という日常的な物理量が様に陽に出て くるために、実用的に用いられる。学部段階の電磁気学の講義や教科書で は MKSA 単位系を採用していることが多い。

Gauss 単位系

クーロンの法則を、もっとも単純に、

$$F = \frac{qq'}{r^2},\tag{2.6}$$

$$F = \frac{mm'}{r^2}.$$
(2.7)

と書くこともできる。このとき、電荷と磁荷は、[質量^{1/2}・長さ^{3/2}・時間⁻¹]という単位を持つことになる。自然現象の記述には、こちらのほうがシンプルなので、素粒子論や天体物理学では、この Gauss 単位系が良く用いられる。本講義では、Gauss 単位系を用いる。

電磁気の基礎方程式

単位系によって、電磁気の基礎方程式の表記が変わってくる。それを以下に示す。

	MKSA unit-system	Gauss unit-system
$\operatorname{div} \boldsymbol{D} =$	ρ	$4\pi ho$
$\operatorname{div} \boldsymbol{B} =$	0	0
$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} =$	$oldsymbol{j} + rac{\partial oldsymbol{D}}{\partial t}$	$rac{4\pi}{c} oldsymbol{j} + rac{1}{c} rac{\partial oldsymbol{D}}{\partial t}$
$\mathrm{rot} E =$	$-\frac{\partial B}{\partial t}$	$-rac{1}{c}rac{\partial oldsymbol{B}}{\partial t}$
D =	$\epsilon oldsymbol{E}$	$rac{\epsilon}{\epsilon_0}oldsymbol{E}$
B =	\muoldsymbol{H}	$\frac{\mu}{\mu_0} H$

磁場の単位とエネルギー密度

磁場の強さ B を [gauss] で表わすと、エネルギー密度 ϵ $[erg/cm^3]$ は、

$$\epsilon \,[\mathrm{erg/cm}^3] = \frac{1}{8\pi} \left(B \,[\mathrm{gauss}] \right)^2. \tag{2.8}$$

と簡単に表わされる。MKSA では、真空の透磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [kg·m·C⁻²=N/A²] を用いて、以下のようになる; :

$$\epsilon \, [\mathrm{J/m^3}] = \frac{1}{2\mu_0} \, (B \, [\mathrm{T}])^2 \,.$$
 (2.9)

1 [T] = 1 [Wb/m²] = 10^4 [gauss], [Wb/m²]=[N/(A·m)] に風位すると、 これらの式が等価であることがわかる。

2.2 原子物理の復習

2.2.1 覚えておくと便利な数値や公式

以下では、Gauss 単位系を用いる。

電子/陽電子の質量

$$m_e c^2 \approx 511 \text{ keV}$$

 e^+-e^- の対消滅で、二つのガンマ線光子が発生する。これが、511 keV の 対消滅線 (annihilation line) として、銀河中心から観測されている (図 2.1 参照)。

コンプトン波長

電子のコンプトン波長 λ_c は、電子の静止エネルギー 511 keV がすべて 電磁波に変換されたとしたときの波長。

$$m_e c^2 = h\nu = hc/\lambda_c.$$

よって、 $\lambda_c = hc/m_e \ c^2 \approx 12.4 \ [\text{keV} \cdot \text{Å}]/511 \ \text{keV} \approx 0.024 \text{Å}_{\circ}$

核子 (陽子または中性子)の質量

$$m_p c^2 \approx m_n c^2 \approx 940 \text{ MeV} \approx 1 \text{ GeV}$$



図 2.1: INTEGRAL 衛星によって銀河中心から観測された電子-陽電子対 消滅線 (Knödlseder et al. 2006, A&A, 445, 579).

微細構造定数

$$\frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

プランク定数の覚え方

$$\hbar c = 1973 \text{ eV} \text{ Å} \approx 2000 \text{ eV} \text{ Å}$$

これと微細構造定数を覚えておけば、いろいろな基本的なパラメターを 導ける。

古典電子半径

古典的には電子は「古典電子半径」 r_0 を持った球と近似できる。 r_0 は電気ポテンシャルと静止質量が等しくなる条件から、

$$\frac{e^2}{r_0} = m_e c^2,$$

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar c}{m_e c^2} \approx \frac{1}{137} \frac{2000 \text{ eV \AA}}{511 \text{ keV}} \approx 3 \times 10^{-5} \text{ \AA}.$$
より正確には、 $r_0 = 2.818 \times 10^{-5} \text{ \AA}.$

トムソン散乱の断面積 σ_T

古典電子半径を持つ球の断面積と思っていいが、正確には

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi r_0^2 = 6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2.$$
 (2.10)

その逆数は、 $1.5 \times 10^{24} \text{ cm}^{-2}$ 。水素柱密度 N_H がこれを越える物質は、 トムソン散乱に対して光学的に厚くなる。

ボーア半径

単純に電子が陽子の回りで半径 *r_B*の円運動をしていて、角運動量は量子化されていると考える。

$$m_e \frac{v^2}{r_B} = \frac{e^2}{r_B^2}$$
$$m_e v r_B = \hbar$$

これから v を消去して

$$r_B = \frac{\hbar^2}{m_e \, e^2}.$$

 $r_B \approx 0.5 \text{\AA}$ と覚えておくと良いが、微細構造定数と $\hbar c$ を覚えておけば、以下のようにしても導ける。

$$\frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx \frac{\hbar c}{m_e c^2} \frac{\hbar c}{e^2} \approx \frac{2000 \text{ eV}\text{\AA}}{511 \text{ keV}} \ 137 \approx 0.5 \text{ \AA}.$$

電子を一個だけ残して電離したイオン (hydrogenic-ion) についても、同様の議論ができる。原子番号 Z の時、原子核の正電荷は Ze。一つの e の 代わりに Ze としたら良いから、電子の半径はボーア半径の 1/Z となる。 (正電荷が強いので、より中心集中する。)

水素のライマンエッジ

水素原子中の電子の結合エネルギー (binding energy) は、

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{r_B} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r_B} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}$$

電子にこれだけのエネルギーを与えてやれば、陽子から離れられる(無限 遠で v > 0)。これがライマンエッジに対応する。13.6 eV と覚えておくと 良いが、以下のように導くこともできる。

$$\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = \frac{m_e c^2}{2} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 = \frac{511 \text{ keV}}{2} \left(\frac{1}{137}\right)^2 = 13.6 \text{ [eV]}.$$

2.3. 宇宙物理の基礎

また、波長にすると、

 $12.4 \, [\text{keVÅ}] / 13.6 \text{eV} = 911 \text{\AA}.$

Hydrogenic-ion のライマンエッジ

水素原子の結合エネルギーは

$$E = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r_B}.$$

であったが、原子番号 Z の原子が電子一つだけを残して電離したとき (hydrogenic-ion) は、 r_B は 1/Z になり (上記参照)、ひとつの e の代わ リに Ze とすればよい。よって、原子番号 Z の hydrogenic-ion の結合エネ ルギーは、水素の場合の Z^2 倍になるので、 $13.6 Z^2$ eV。

特に X 線天文で重要なのが、鉄 (Z = 26)の K エッジのあたりの構造。 Fe 26 の K エッジのエネルギーは、13.6 $[eV] \times 26 \times 26 \approx 9.2 \text{ keV}$ 。

2.3 宇宙物理の基礎

2.3.1 エディントン限界光度

コンパクト天体に落ちていく物質は、天体が放射する光による圧力を受ける。球対称の場合、物質がコンパクト天体から受ける重力と光による圧力が釣り合う限界光度があり(エディントン限界、*L_{Edd}*)、天体はそれ以上明るくなることはできない。ここでは簡単のために、天体に落ち込む物質として水素だけを考える。水素の質量を*m_H*として、重力と輻射圧のつりあいの式は以下のように書ける。

$$\frac{\sigma_T}{c} \frac{L_{Edd}}{4\pi r^2} = \frac{GMm_H}{r^2}.$$
(2.11)

ここで $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ はトムソン断面積である。

これから、

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c GM}{\sigma_T/m_H} = \frac{4\pi c GM}{\kappa_T}.$$
(2.12)

ここで、 κ_T = $\sigma_T/m_H \sim 0.4~{
m cm}^2/{
m g}$ 。よって、

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c^3}{\kappa} \frac{GM_{\odot}}{c^2} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \approx 1.3 \times 10^{38} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \text{ [erg/s]}.$$
(2.13)

コンパクトオブジェクト、すなわち、白色矮星、中性子星、またはブラッ クホールを考えよう。白色矮星の最大質量 (チャンドラセカール限界) は 1.4*M*_☉ で、それが中性子星の平均質量に対応している。中性子星の最大 質量は ~ 3*M*_☉ で、それより重いコンパクト星はブラックホールである。 よって、(2.13) に従って、一般に白色矮星よりも中性子星のほうが、中性 子星よりもブラックホールの方が、明るく光ることができる。また、ブ ラックホールについては、質量が大きいほど、明るく光ることができる。

2.3.2 白色矮星と中性子星

白色矮星

16

- ・ 白色矮星が電子の縮退圧で支えられる最大限界質量 ≈ 1.4M_☉.
 これを Chandrasekhar limit という。Chandrasekhar は、1983 年の
 ノーベル物理学章受賞。Chandra 衛星の名前は Chandrasekhar の業
 績に由来する。
- 典型的な質量 ≈ 1M_☉
- 典型的な半径 ≈ 6000 km 太陽くらいの質量で地球くらいの大きさ、と覚えておく。
- 組成と状態方程式が決まれば、質量と半径の間に一意的な関係がある。重いほど小さくなる。

中性子星

- 典型的な質量 ≈ 1.4M_☉
 進化した星 (Type II 超新星の progenitor)の縮退したコアの質量が Chandrasekhar limit に対応している
- 典型的な半径 ≈ 10 km
- 中心での密度は、~10¹⁵ [g/cm³]。 宇宙でもっとも高密度な物理 状態。
- 最大限界質量 $\approx 3M_{\odot}$ (これ以上重くなると中性子の縮退圧で支え きれなくなる)
- 組成と状態方程式が決まれば、質量と半径の間に一意的な関係がある。重いほど小さくなる。
- 磁場が強くて自転している中性子星は、パルサーとして観測される。
 電波からガンマ線まで、幅の広い波長範囲で、電磁波を放出する。



図 2.2: 白色矮星 (左; Hamada and Salpeter 1961, ApJ, 134, 683) と中性 子星 (右; Baym and Pethick ARAA 1979, 415) の質量-半径関係。

• 典型的な磁場の強さは $\sim 10^{12}$ ガウス。 マグネターは特に磁場が強く、 $\sim 10^{15}$ gauss の磁場を持つ。宇宙でもっとも強磁場の天体。

第3章 ブラックホール

- 3.1 ブラックホールの特徴
- 3.1.1 ブラックホールのキホン
 - 最小質量 \approx 中性子星の最大限界質量 $\approx 3M_{\odot}$
 - 伝統的な手法(伴星の連星運動の観測)で測定されている最大の
 stellar black holeの質量 = 15.7 M_☉ (M33 X-7)¹。その次は ~ 14M_☉
 (GRS1915+105)
 - 2015 年 9 月、ブラックホールの合体による重力波が検出された。 36M_☉ と 29M_☉ のブラックホールが合体し、62 M_☉ のブラック ホールが誕生した (Abbott et al. 2016, PRL, 116, 061102)。
 - ・ 天の川銀河の中心のブラックホールの質量、*, (3.7±0.2)×10⁶[R₀/(8 kpc)]³M_☉
 (Ghez et al. 2005, ApJ, 620, 744)
 - 星の進化の最終段階でできるブラックホール (stellar blackhole)の 質量の上限: ~ 40M_☉? (Fryer 1999, 522, 413) まだよくわかってい ない。
 - 恒星ブラックホール (~ 10M_☉) と、銀河の中心に存在する超巨大ブ ラックホール (≳ 10⁶M_☉)の二種類がある。
 - 中間質量ブラックホール」 $(100 1000 M_{\odot})$ は存在するだろうか? \longrightarrow 未だ解決していない問題。
 - 10⁴⁰ ~ 10⁴² erg/sの光度を持つ超高光度 X 線天体 (Ultra-luminous X-ray Sources; ULX)の起源はまだ不明。中間質量ブラックホールか、超エディントン光度で光っている恒星ブラックホールか?
 - 質量 M の天体のシュワルツシルド半径は $2GM/c^2 \approx 3(M/M_{\odot})$ [km]。 大雑把に、これがブラックホールの半径と思って良い。
 - 地球のシュワルツシルド半径は、~9 mm。

¹http://chandra.harvard.edu/photo/2007/m33x7/

シュワルツシルド半径は、アインシュタイン方程式を解くことによって得られる。しかし、ニュートン力学を用いても,以下のように導くことができる。

$$\frac{1}{2}v_{escape}^2 = \frac{GM}{r},\tag{3.1}$$

ここで、 $v_{escape} = c$ とすると、

$$r = \frac{2GM}{c^2}.$$
(3.2)

• ブラックホールのスピンは無次元量、 $0 \le a \le 1$ で表される。回転 していないブラックホールが「シュワルツシルドブラックホール」 で、a = 0。回転しているブラックホールが「カーブラックホール」 で、 $0 < a \le 1$ 。

ブラックホールの見かけの大きさ

 \approx

質量 M のブラックホールまでの距離を d とすると、シュバルツシルト 半径の見かけの大きさは、

$$\Delta \theta = \frac{2GM/c^2}{d} = \frac{30 \text{ km}(M/10M_{\odot})}{10 \text{ kpc}(d/10 \text{ kpc})}$$
$$10^{-16} \frac{(M/10M_{\odot})}{(d/10 \text{ kpc})} \approx 2 \times 10^{-11} \text{ arcsec } \frac{(M/10M_{\odot})}{(d/10 \text{ kpc})}$$

銀河系内のブラックホールに関しては、これほど小さいものを直接観測す るのは、現在のテクノロジーの予想内では不可能。

一方、銀河中心にある巨大ブラックホールを考えると、d= 8 kpc and $M = 3.7 \times 10^6 M_{\odot}$ だから、

$$\Delta \theta \approx 8 \mu \mathrm{arcsec}$$

となる。

一般に、望遠鏡の角度分解能は、

$$\Delta \theta \approx \lambda / D,$$

で与えられる。ここで、 λ は観測波長、 D は望遠鏡の口径、または干渉 計の場合は基線長。現実的な数値として、波長を $\lambda = 1 \text{ mm}$ 、基線長 Dを 10,000 km とすると²、

$$\Delta\theta \approx \lambda/D = 1$$
[mm]/10,000[km] = $10^{-10} \approx 20\mu$ arcsec.

²大体、ハワイ島のマウナケアとチリの ALMA 望遠鏡の距離。

3.2. Innermost Stable Circulr Orbit (ISCO) とブラックホールのエネルギー効率21

まだ銀河中心のブラックホールを分解するには、少し足りない。

将来的に、X 線干渉計衛星が実現したら³、それが究極の角分解能を実現するだろう。仮に基線長 $D \sim 20 \text{m}$ のX線干渉計で、 $\lambda \sim 1 \text{Å}$ のX線を 観測したとすると、空間分解能は、

 $\lambda/D = 1 \text{ Å}/20 \text{ m} \approx 5 \times 10^{-12} \approx 1 \mu \text{arcsec.}$

将来(数十年後?) X線干渉計が実現したら、銀河中心のブラックホール 周辺を直接観測できるようになるかもしれない。

3.1.2 ブラックホールの密度

仮にブラックホールをシュバルツシルト半径 R_s を持つ古典的な球と思って、その密度 ρ を質量/球の体積で定義しよう。

$$ho = rac{M}{4\pi R_s^3/3} pprox 2 imes 10^{16} \left(rac{M}{M_\odot}
ight)^{-2} {
m g/cm^3}.$$

ここで、太陽質量、 $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{33}$ [g] を用いた。普通の物質の質量は 半径の3乗に比例するが、質量が半径に比例するというのがブラックホー ルの特徴。よって、"密度"は半径(質量)の2乗に反比例する。 $\gtrsim 10^8 M_{\odot}$ のブラックホールの密度は水の密度よりも小さくなる!「ブラックホール は高密度」というわけではない。

3.2 Innermost Stable Circulr Orbit (ISCO) とブ ラックホールのエネルギー効率

ニュートン力学では、質量 M の天体の周りの安定円軌道について、その最小半径は存在しない。実際、無限小の半径も可能で、そこでは重力ポテンシャルが無限大になるので、破綻している。

ー般相対性理論では、ブラックホールの周りの質点の運動を解くと安定 な円軌道の最小半径 (Innermost Stable Circlar Oribit; ISCO)が、ブラッ クホールの角運動量 $a(0 \le a \le 1)$ の関数として得られる。それは、回転し ていないブラックホールの周辺、シュワルツシルド時空の場合 (a = 0)

$$R_{ISCO} = 3R_S = \frac{6GM}{c^2} \tag{3.3}$$

³http://bhi.gsfc.nasa.gov

である。ブラックホールの回転と円運動の方向が一致しているときは、aとともに R_{ISCO} は減少し、角運動量最大 (a = 1) のとき、

$$R_{ISCO} = 0.5R_S = \frac{GM}{c^2} \tag{3.4}$$

である。

無限遠から質量 m の物質が角運動量を受けて(渦を巻いて)落ち込ん でいき、降着円盤を作り、最終的に R_{ISCO} に達すると考える。簡単のた めにニュートン力学で考えると、その場における全エネルギーを E、回転 速度を v として、

$$E = -\frac{GMm}{R_{ISCO}} + \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.5}$$

$$= -\frac{GMm}{2R_{ISCO}}.$$
(3.6)

ここで運動方程式、

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \tag{3.7}$$

を用いた。つまり、質量 m の物質あたり $\frac{GMm}{2R_{ISCO}}$ のエネルギーが降着円盤 中で解放されるわけだが、単位時間あたり \dot{m} の質量の物質が落ちるとき、 円盤の光度は、

$$L_{disk} \approx \frac{GM\dot{m}}{2R_{ISCO}} \tag{3.8}$$

となる。 R_{ISCO} として、シュワルツシルドブラックホールの場合、極端 なカーブラックホール (a = 1)の場合、それぞれについて (3.3)、(3.4) を 代入し、

$$L_{disk} \approx \frac{1}{12} \dot{m} c^2 \approx 0.08 \dot{m} c^2$$
 (Schwarzschild black hole) (3.9)

$$L_{disk} \approx 0.5 \ \dot{m} \ c^2 \ (\text{Extreme Kerr black hole})$$
 (3.10)

が得られる。厳密に、一般相対論的な計算によると上記の係数(エネルギー効率)はそれぞれ、 $1 - \sqrt{8/9} \approx 0.057, 1 - \sqrt{1/3} \approx 0.42$ である。

一方、熱核融合反応の時、水素が鉄に達するまでの平均で、エネルギー 効率は 0.009 である。ブラックホールへ物質が落ち込む際の重力エネル ギーの解放が非常に効率的であることを理解しよう。

第4章 降着円盤のX線観測

4.1 X線天文学と降着円盤

1987年に出版された Katz の"High Energy Astrophysics" は優れた教科 書だが、その降着円盤に関する章には、"Unfortunately, Eq.1 and Eq.2 are not supported by any data. There are few astronomical objects in which the continuum radiation from an accretion disk can be unambiguously identified." (ここで、Eq.1 と Eq.2 は、テキスト中でそれぞれ標準降着円 盤の温度とスペクトルを表わす式) という記述がある。実際、これが当時 の降着円盤の観測的研究の状況であった。

1987年から1991年まで稼働していた日本のX線天文衛星「ぎんが」は、 LMC X-3, GS2000+25, GS1124-68などのブラックホール連星系の"High State"のエネルギースペクトル変化を長期間にわたって観測し、どの天 体についても、(1)光学的に厚い降着円盤の内縁の半径は光度が大きく変 化しても変わらないこと(光度は円盤温度の4乗に比例すると言っても良 い)、(2)(内縁の境界条件や黒体輻射からのずれを補正した後)円盤の内 縁半径をシュバルツシルト半径の3倍と仮定して見積もったブラックホー ルの質量は、連星系のドップラー運動から決めた質量とよく一致すること を発見した(図4.1)。これは、ブラックホール連星系の"High State"のエ ネルギースペクトルは、その内縁がシュバルツシルト半径の3倍まで伸び た標準降着円盤からのものであることを強く示唆している。

1994年に出版された Longair, "High Energy Astrophysics" second edition では、「ぎんが」衛星による LMC X-3 の観測結果を引用して、"This is a remarkable result, but it is clearly dependent upon a number of assumptions, particularly that the accretion disk is optically thick." と 書いてある。実際、それまでは明るく光っている標準降着円盤の内縁付近 が光学的に厚いのか薄いのかわかっていなかったのだが、「ぎんが」の観 測によって、常に前者であることが明らかになった。



Figure 16.22. Time histories of the best-fit parameters to the soft component of the X-ray spectrum of LMC X-3 obtained by the Japanese Ginga satellite. (a) The bolometric luminosity of the sources; (b) the inferred temperature at the inner radius of the acccretion disc; (c) the inferred inner radius, r_i , of the accretion disc. *i* is the inclination angle of the plane of the orbit to the plane of the sky. (From H. Inoue (1992). Proc. Texas/ESO-CERN Symposium on Relativistic astrophysics, cosmology and fundamental particles, eds J.D. Barrow, L. Mestel and P.A. Thomas, pp. 86–103. New York: New York Academy of Sciences.)

図 4.1: 「ぎんが」衛星が観測した LMC X-3 の X 線スペクトル変化。ディ スク成分のエネルギースペクトルを、ディスクの内縁と温度を自由パラ メーターにしてフィッティングを行った。光度 (最上段) が変化しても内 縁の半径 (下段) は一定。光度はディスクの温度 (中段) の 4 乗に比例して いる。Longair, "High Energy Astrophysics" から取ってきた。そこでは Inoue (1992) を引用しているが、その基は私の博士論文 (1991年)。投稿 論文になったのは、Ebisawa et al. 1993, ApJ, 403, 684。

4.2 ディスクの厚さ、温度とポテンシャルエネルギー の関係

ガス圧優勢のディスクを考える。圧力 P、密度 ρ 、温度 T、粒子の質量 m として、気体の状態方程式から、

$$P \approx \frac{\rho k T}{m}.\tag{4.1}$$

ディスクの高さ(厚み)を h とすると、鉛直方向の釣り合いより、

$$\frac{dP}{dh}\approx -\frac{GM\rho}{r^2}\frac{h}{r}. \label{eq:gamma}$$

これからオーダーを見積もると、

$$\frac{P}{h} \approx \frac{GM\rho}{r} \frac{h}{r^2}.$$
(4.2)

(4.1) と(4.2) より、

$$\frac{kT}{GMm/r} \approx \left(\frac{h}{r}\right)^2. \tag{4.3}$$

左辺は熱エネルギーと重力ポテンシャルエネルギーの比。よって、(1)幾 何学的に薄い標準降着円盤(*h*/*r* ≪ 1)では、ディスクの熱エネルギーは、 粒子一つあたりの重力ポテンシャルエネルギーよりはるかに小さいこと、 (2) ディスクが幾何学的に厚くなってくると、温度が高くなること、がわ かる。

粒子(主に水素原子)一つあたりの重力ポテンシャルエネルギーは、ブ ラックホール近傍ではシュワルツシルド半径を仮定して、以下のように見 積もれる;

$$\frac{GMm}{R_s} = \frac{GMm}{2GM/c^2} \approx \frac{1}{2}mc^2 \approx 500 \text{ MeV}.$$
(4.4)

一方、恒星ブラックホールの周りの降着円盤の温度は、1 keV 程度で (4.3.3 節)、実際にずっとこれよりも低いことがわかる。

4.3 標準降着円盤からのX線放射

4.3.1 標準降着円盤の温度の半径依存性

質量 M のブラックホールの周りの標準降着円盤(=幾何学的に薄く、光 学的に厚い)を考えよう。物質は質量降着率 M でブラックホールに落ち ていくとする。物がディスク中で dr 落ちる間に、解放される重力ポテン シャルの半分 (ビリアル定理) が熱化され、ディスクの両面から黒体輻射 で放出されるとすると、

$$2 \cdot 2\pi r \, dr \, \sigma T_{eff}^4 \propto \frac{1}{2} d \left(-\frac{GM\dot{M}}{r} \right) = \frac{GM\dot{M}}{2 \, r^2} \, dr,$$
$$T_{eff}(r) \propto \left(\frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}. \tag{4.5}$$

光学的に厚い標準円盤では、ディスクの有効温度の半径依存性は *r*^{-3/4} で あることを覚えておくと良い。

4.3.2 Multicolor disk blackbody の光度

ディスクの内縁の境界条件を無視し、温度の半径依存性を $r^{-3/4}$ とし、 各半径で黒体輻射をしている場合を考える。この近似に基づいた降着円 盤スペクトルモデルを "Multicolor disk blackbody" モデルと呼び、観測 データを記述するのに良く用いられる。この円盤の光度を求めてみよう。 すなわち、内縁半径と温度をそれぞれ r_{in}, T_{in} として、

$$T(r) = T_{in} \left(r/r_{in} \right)^{-3/4}.$$
(4.6)

円盤の表と裏を考慮して、内縁から外縁 (rout) まで積分して、

$$L_{disk} = 2 \int_{r_{in}}^{r_{out}} 2\pi r \sigma T(r)^4 dr$$

= $4\pi \sigma T_{in}^4 r_{in}^3 \int_{r_{in}}^{r_{out}} r^{-2} dr$
= $4\pi \sigma T_{in}^4 r_{in}^3 (1/r_{in} - 1/r_{out}) \approx 4\pi \sigma r_{in}^2 T_{in}^4.$ (4.7)

ただし、ここで $r_{out} \gg r_{in}$ を用いた。

4.3.3 ブラックホールの周りの降着円盤の温度

シュワルツシルド時空では、 $R_{ISCO} = 3R_s$ である。これを (4.7) の r_{in} とし、降着円盤がエディントン限界光度で光っているとしよう。

$$L_{Edd} = \frac{4\pi \, c \, GM}{\kappa} = 4\pi \, \sigma \, (3R_s)^2 \, T_{in}^4 \tag{4.8}$$

より温度を求めると、

$$T_{in} \approx \left(\frac{c^3}{18\sigma\kappa}\right)^{1/4} \left(\frac{2GM_{\odot}}{c^2}\right)^{-1/4} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-1/4} \approx 2 \text{ keV} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-1/4} \approx 1 \text{ keV} \left(\frac{M}{10M_{\odot}}\right)^{-1/4}.$$

$$(4.9)$$
よって、最大光度 (エディントン限界) で光っている質量 ~ $10M_{\odot}$ のブ
ラックホールの用りの啓差円般は、い1 keV の温度を持つので、X 絶領域

ラックホールの周りの降着円盤は、~1 keVの温度を持つので、X 線領域で観測されることがわかる。

ブラックホールの質量が大きいほど、降着円盤の温度が低くなることに 注意。たとえば、太陽の 10^9 倍の質量を持つブラックホール の降着円盤 の温度は $\sim 10 \text{ eV}$ となり、これは紫外線領域で観測される。

付録A 問題

- 2015年9月14日は人類にとって記念すべき日になった。初めて重 力波イベントが検出されたのである。重力波の存在は1915年に一般 相対性理論が発表された当時から予言されていたが、あまりにも弱 い信号であるため、それを検出する技術を獲得するのに人類は100 年を要したのである。この重力波はブラックホールの合体によって 放出されたものであるが、それによって、空間は約10⁻²¹の割合で 伸び縮みする。これは、地球と太陽間の距離が、どのくらいの長さ 変わることに対応するか?その長さを、水素原子の大きさ(ボーア 半径)と比較して答えよ。
- 3. 鉄は原子番号が26で、宇宙では水素、ヘリウムの次に存在量の多い 元素である。高温プラズマ中では、鉄原子は、他の原子や電子との 衝突により、外殻電子が剥ぎ取られてイオン化する。そのような電 離鉄イオンから、電離度に応じて多くのX線輝線が観測される。
 - (a) 25 個の電子が剥ぎ取られ、電子が1 個だけ残った鉄イオンを
 考える。その電子の束縛エネルギーを求めよ。エネルギーの単位は keV とする。
 - (b) プラズマの温度がその束縛エネルギー程度になると、さらに電 離が進み、鉄原子は26価の原子核と26個の電子に完全電離す る。そのプラズマ温度を、度(Kelvin)を単位として見積もれ。
- 3. 中性子星の「X線バースト」は、中性子星表面における爆発的な核 燃焼で、それは、球対称の黒体輻射として近似される。
 - (a) 球対称の放射をしている質量 M の天体の最大光度 (エディントン限界光度) を、M の関数として見積もれ。単位は erg/s とする。
 - (b) 平均的な質量と半径を持つ中性星における最大光度のX線バー ストの温度を見積もれ。単位は keV とする。
- ブラックホール周辺の降着円盤からのX線放射について考察してみよう。降着円盤の最大光度はエディントン限界光度で与えられると仮定する。

- (a) 光学的に厚い降着円盤の最大温度を、ブラックホールが回転していない場合について、ブラックホール質量 *M* の関数として見積もれ。温度は keV で表すこと。
- (b) $M = 10 M_{\odot}$ の恒星質量ブラックホール、 $M = 10^9 M_{\odot}$ の巨大 ブラックホール,それぞれについて、降着円盤の最大温度の値 を見積もれ。また、それらを観測する場合、どの波長帯が適し ているか?

30