2014年度 新潟大学理学部物理学科
「プラズマ物理学特論」
講義ノート

JAXA 宇宙科学研究所
海老沢　研

2014 年 8 月 7 日

Contents

[1]本講義は、「プラズマからの輻射」、特に宇宙プラズマからの X 線放射を中心に扱う。本講義の理解に必要なのは、基礎的な電磁気学、力学、統計力学、量子力学である。さらにプラズマからの輻射の理解には、「輻射輸送」の知識が必須であるが、それは本講義の中で扱う。

Chapter 1

プラズマ物理学概観

1.1 プラズマとは？

原子が電離して、原子核と電子からなる気体になったような状態をプラズマと呼ぶ。固体・液体・気体につづく物質の第四の状態と言われる。本講義では、そのようなプラズマからの「輻射 (光子の放射)」を主に扱う。本講義では扱わないが、良く耳にする「プラズマ」に関連する用語を以下に簡単に解説する。

- 核融合プラズマ
  恒星の内部は非常に高温のプラズマ状態になっており、水素が結合してヘリウムに変換する「核融合反応」によってエネルギーが生成されている。そのような「核融合プラズマ」を工学的に地上で実現し、実用的なエネルギー源として利用しようとする試みがある。そのためには、「核融合炉」の中で、プラズマを一億度以上まで加熱し、制御する必要がある。「プラズマ物理学」には、そのような核融合炉を実現するための実用的な研究としての意味もある[1]。その際、プラズマを電離流体と捉え、その物性的な特質を理解したうえで、地上で閉じ込めて制御する技術の開発などが主な研究目的となる。

- クォークグルオンプラズマ
  素粒子の標準模型によると、陽子、中性子、中間子などからなるハドロンは、クォークとグルオンからなっている。原子が高温になると原子核と電子に電離してプラズマ状態になるように、ハドロンも超高温になるとクォークとグルオンに分かれると考えられている。これを「クォークグルオンプラズマ」と呼ぶ。クォークグルオンプラズマの研究は、現代の素粒子物理学において、最先端のテーマのひとつである[2]。

[1] 私が学部生だった 1980 年代前半から、核融合炉の実現はあと 10 年から 20 年みたいなことがずっと言われてきました。もう 30 年以上経っているのだけどな…。ITER に頑張ってもらいましょう (http://www.naka.jaea.go.jp/ITER)。

[2]「プラズマ物理学」の研究ではないだろうな。

1.2 プラズマの種類とプラズマからの輻射[3]

プラズマは原子が電離した状態であるわけだが、電子を電離させるには外部からのエネルギーが必要である。正確に言うと、原子核に束縛されている電子に電離ポテンシャル以上のエネルギーを与えることが必要、ということ。そのエネルギーが熱的なものであるか、非熱的なものであるかによって、プラズマは**熱的プラズマ**と**非熱的プラズマ**に分類される。

水素の電離ポテンシャルはよく知られているように、13.6 eV。1 eV は 11,604 T に対応するから、大雑把に、13.6 eV $\approx$ 16 万度になると、水素が電離する。よって、物質は約 10 万度以上になると水素が電離を始め、熱プラズマ状態になると考えて良い。さらに温度が上がると、ヘリウム、さらに大きな原子番号を持った重元素が電離を始める. 宇宙には比較的鉄が多く、また鉄の K 吸収端のエネルギーは 7.1 keV (中性) から 9.3 keV (H-like) の間にある[4]。9.3 keV $= 9.3 \times 1,000 \times 11,604$ T ≈ 1 億度なので、 物質は約 1 億度以上になると、鉄も 26 個の電子がすべて原子核からはぎ取られ、完全なプラズマ状態になる.

熱的プラズマのうち、電子とイオンが熱平衡 (電離平衡) 状態になっている (同じ温度を持つ) ものを**熱平衡 (電離平衡) プラズマ** 、熱平衡状態になっていないものを**非熱平衡 (非電離平衡) プラズマ** (Non-equilibrium ionization plasma) と呼ぶ。熱平衡プラズマは、単一の温度で特徴付けられる。

熱平衡プラズマ、非熱平衡プラズマからは、電子が原子核の電磁場によって曲げられる際、**熱制動輻射**によって**連続スペクトル**が放射される (4.2 節参照)。また、プラズマ中で、局所的にはイオンと電子が電離/結合を繰り返しているので、その際に各元素のイオンに特徴的な**スペクトル輝線**や**吸収線**が観測される (5.1.3 節参照)。

磁場、ショック (衝撃波) など、なんらかの非熱的な加速機構によって、原子にエネルギーが与えられ、プラズマ状態になったものが**非熱的プラズマ**である。多くの場合、非熱的な加速機構によって、電子のエネルギーは、$E^{-\gamma}$ というべき分布 (power-law) を持つ。その際、そのような非熱的プラズマから放射される光子スペクトルもベキ分布になることが知られている (4.1 節参照)。宇宙において、活動的銀河核、超新星残骸、パルサーなどから、$\sim$TeV ガンマ線領域にいたるまで高エネルギー光子スペクトルが観測されているが、そこでは、効率的な非熱的加速機構が働いていると考えられている。

1.3 電磁気学の単位系について

電磁気学においては、複数の単位系が存在することに注意が必要である。力学的な物理量については、独立した単位として、長さ、質量、時間がある。電気、磁気のクーロンの法則を、それぞれ、以下のように書こう。

$$F = \frac{1}{h_1\epsilon}\frac{qq'}{r^2}, \tag{1.1}$$

$$F = \frac{1}{h_2\mu}\frac{mm'}{r^2}. \tag{1.2}$$

ここで、h_1, h_2 は比例係数、ϵ, μ が単位 (元) を持つ量である。左辺は力、[質量・長さ・時間 $^{-2}$] と決まっているので、電荷 q、磁荷 m をどのような単位で表すかによって、ϵ および μ の単位が決まってくる。

[3]本講義は、「プラズマからの輻射」、特に宇宙プラズマからの X 線放射を中心に扱う。本講義の理解に必要なのは、基礎的な電磁気学、力学、統計力学、量子力学である。さらにプラズマからの輻射の理解には、「輻射輸送」の知識が必須であるが、それは本講義の中で扱う。

[4]これは多くの X 線観測装置によって観測可能なエネルギー (波長) 範囲に含まれる。典型的に、2–10 keV が X 線天文学が対象とするエネルギー範囲。

1.3.1 MKSA 単位系

長さ、質量、時間を m、kg、s で表し、さらに電流についてアンペア (A) という新たな基本単位を導入する。電荷の単位はクーロン (C) となり、これは 1A の電流が 1 秒に運ぶ電荷と定義される。真空中のクーロンの法則は、以下のようになる。

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{r^2}, \tag{1.3}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{mm'}{r^2}. \tag{1.4}$$

ここで、ϵ_0 は、(1.3) より、[アンペア ^{2}・時間 ^{4}・長さ $^{-3}$・質量 $^{-1}$] という次元を持つことになる。電磁気学より、光速を c として、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\,\mu_0}} \tag{1.5}$$

なので、これから μ_0 の次元がわかる。さらに、(1.4) から、磁荷の単位が決まる。MKSA 単位系は、「電流」という日常的な物理量が様に陽に出てくるために、実用的に用いられる。学部段階の電磁気学の講義や教科書では MKSA 単位系を採用していることが多い。

1.3.2 Gauss 単位系

クーロンの法則を、もっとも単純に、

$$F = \frac{qq'}{r^2}, \tag{1.6}$$

$$F = \frac{mm'}{r^2}. \tag{1.7}$$

と書くこともできる。このとき、電荷と磁荷は、[質量 $^{1/2}$・長さ $^{3/2}$・時間 $^{-1}$] という単位を持つことになる。自然現象の記述には、こちらのほうがシンプルなので、素粒子論や天体物理学では、この Gauss 単位系が良く用いられる。本講義では、Gauss 単位系を用いる。

1.3.3 電磁気の基礎方程式

単位系によって、電磁気の基礎方程式の表記が変わってくる。それを以下に示す。

	MKSA 単位系	Gauss 単位系
$\mathrm{div}\boldsymbol{D} =$	ρ	$4\pi\rho$
$\mathrm{div}\boldsymbol{B} =$	0	0
$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} =$	$\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$
$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} =$	$-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	$-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
$\boldsymbol{D} =$	$\epsilon\boldsymbol{E}$	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\boldsymbol{E}$
$\boldsymbol{B} =$	$\mu\boldsymbol{H}$	$\frac{\mu}{\mu_0}\boldsymbol{H}$

1.4 覚えておくと便利な数値、関係式など

光速 $c \approx 3 \times 10^{10}$ cm/s

X 線の波長とエネルギーの換算式

$$E\,[\mathrm{keV}] \approx \frac{12.4}{\lambda\,[\text{Å}]}$$

「12.4 keV の X 線の波長は 1 Å」と覚えておこう。

X 線のエネルギーと温度の換算式

$$1\ \mathrm{eV} = 11604\ \mathrm{K} \approx 10^4\ \mathrm{K}$$

非常に大ざっぱに言って、「1 keV で光っている天体の温度は約 1000 万度」。

エネルギーの単位の換算 1 eV $\approx 1.6 \times 10^{-12}$ erg

ボルツマン定数 $k = 1.38 \times 10^{-16}$ **erg/K**

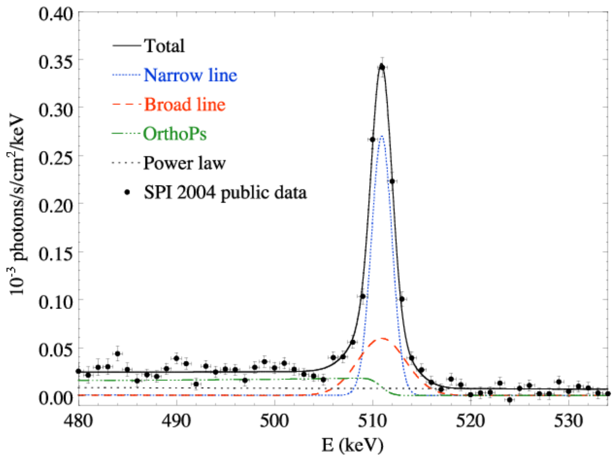
ステファン-ボルツマン定数 $\sigma = 1.03 \times 10^{24}$ **erg/s/cm^2/keV^4**

この単位で覚えておくと実用的。たとえば、2 keV の黒体輻射をしている半径 10 km の中性子星の光度 L は、

$$L = 4\,\pi\,(10\ \mathrm{km})^2\,\sigma\,(2\mathrm{keV})^4 \approx 2 \times 10^{38}\ \mathrm{erg/s}.$$

電子/陽電子の質量

$m_e c^2 \approx 511$ keV e^+-e^- の対消滅で、二つのガンマ線光子が発生する。これが、511 keV の対消滅線 (annihilation line) として、銀河中心から観測されている (下図参照)。



Knödlseder et al. 2006, A&A, 445, 579 より。

コンプトン波長

電子の静止エネルギー 511 keV を波長で表したのが電子の「コンプトン波長」

$$m_e\, c^2 = h\nu = hc/\lambda$$

より、$\lambda_c = h/m_e\, c$. 波長で表すと、12.4 keVÅ/511 keV ≈ 0.024$\mathring{A}$。

核子の質量

$m_p c^2 \approx m_n c^2 \approx 940$ MeV ≈ 1 GeV

微細構造定数

$$\frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

プランク定数の覚え方

$$\hbar c = 1973 \text{ eV Å} \approx 2000 \text{ eV Å}$$

これと微細構造定数を覚えておけば、いろいろな基本的なパラメターを導ける。

古典電子半径

古典的には電子は「古典電子半径」r_0 を持った球と近似できる。 r_0 は電気ポテンシャルと静止質量が等しくなる条件

$$\frac{e^2}{r_0} = m_e c^2$$

で定義される。上で示した数値を覚えておけば値を導くことができる。

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = \frac{e^2}{\hbar c}\frac{\hbar c}{m_e c^2} \approx \frac{1}{137}\frac{2000 \text{ eV Å}}{511 \text{ keV}} \approx 3 \times 10^{-5} \text{ Å}.$$

より正確には $r_0 = 2.818 \times 10^{-5}$ Å.

トムソン散乱の断面積 σ_T

古典電子半径を持つ球の断面積と思っていいが、正確には

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi r_0^2 = 6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2.$$

その逆数は、1.5×10^{24} cm^{-2}。水素柱密度 N_H がこれを越える物質は、トムソン散乱に対して光学的に厚くなる (Thomson thick; Compton thick)。

ボーア半径

単純に電子が陽子の回りで半径 r_B の円運動をしていて、角運動量は量子化されていると考える。

$$m_e \frac{v^2}{r_B} = \frac{e^2}{r_B^2}$$

$$m_e\, v\, r_B = \hbar$$

これから v を消去して

$$r_B = \frac{\hbar^2}{m_e\, e^2}.$$

$r_B \approx 0.5\AA$ と覚えておくと良いが、微細構造定数と $\hbar c$ を覚えておけば、以下のようにしても導ける。

$$\frac{\hbar^2}{m_e\, e^2} \approx \frac{\hbar c}{m_e c^2}\frac{\hbar c}{e^2} \approx \frac{2000\ \mathrm{eV\AA}}{511\ \mathrm{keV}}\ 137 \approx 0.5\ \mathrm{\AA}.$$

電子を一個だけ残して電離したイオン (hydrogenic-ion) についても、同様の議論ができる。原子番号 Z の時、原子核の正電荷は Ze。一つの e の代わりに Ze としたら良いから、電子の半径はボーア半径の $1/Z$ となる。(正電荷が強いので、より中心集中する。)

水素のライマンエッジ

水素原子中の電子の結合エネルギー (binding energy) は、

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{r_B} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r_B} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}.$$

電子にこれだけのエネルギーを与えてやれば、陽子から離れられる (無限遠で $v > 0$)。これがライマンエッジに対応する。13.6 eV と覚えておくと良いが、以下のように導くこともできる。

$$\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = \frac{m_e\, c^2}{2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 = \frac{511\ \mathrm{keV}}{2}\left(\frac{1}{137}\right)^2 = 13.6\ [\mathrm{eV}].$$

また、波長にすると、12.4 [keV Å]/13.6 eV = 911 $\AA$ も覚えておこう。

Hydrogenic-ion のライマンエッジ

水素原子の結合エネルギーは

$$E = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r_B}$$

であったが、原子番号 Z の原子が電子一つだけを残して電離したとき (hydrogenic-ion) は、r_B は $1/Z$ になり (上記参照)、ひとつの e の代わりに Ze とすればよい。よって、原子番号 Z の hydrogenic-ion の結合エネルギーは、水素の場合の Z^2 倍になるので、13.6 Z^2 eV。

特に X 線天文で重要なのが、鉄 ($Z = 26$) の K エッジのあたりの構造。Fe 26 の K エッジのエネルギーは、13.6 [eV] $\times 26 \times 26 \approx 9.2$ keV。

磁場の単位とエネルギー密度

おそらく教養、学部の電磁気学の授業では MKSA 単位系 (応用物理には便利) を用いたと思うが、天体物理のほとんどの教科書では Gauss 単位系を用いていて (このノートでもすでにそうだが)、実際このほうが天文学の議論には便利。

特に磁場の強さ B を [gauss] で表わすと、エネルギー密度 ϵ [erg/cm^3] は、

$$\epsilon\ [\mathrm{erg/cm^3}] = \frac{1}{8\pi}\left(B\ [\mathrm{gauss}]\right)^2 \tag{1.8}$$

と簡単に表わされる。MKSA では、真空の透磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [kg·m· C^{-2}=N/A^2] を用いて、以下のようになる。

$$\epsilon\ [\mathrm{J/m^3}] = \frac{1}{2\mu_0}\left(B\ [\mathrm{Wb/m}]\right)^2.$$

1 [Wb/m] = 10^4 [gauss]、[Wb/m]=[N/(A·m)] を思い出せば上の二つの式が等価であることがわかる。

サイクロトロン振動数

磁場中の電子の、磁力線に垂直方向の運動を考える。

$$m_e\frac{v^2}{r} = \frac{e\,v\,B}{c} \tag{1.9}$$

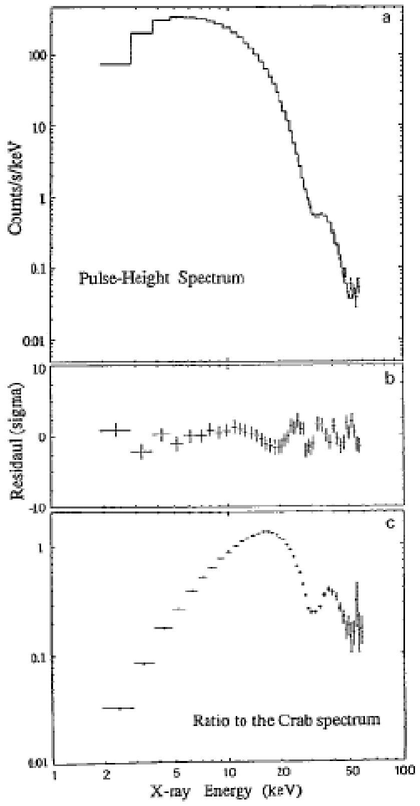
電子は磁力線のまわりに円運動を行う。上式より、その角振動数は $\omega = v/r = eB/mc$ で、同じ角振動数の電磁波が放射される (サイクロトロン放射)。よってサイクロトロンエネルギー E_c は、

$$E_c = \frac{\hbar e B}{m_e c} = \frac{\hbar e}{2m_e c}\ \ 2B.$$

ここで、$\hbar e/(2m_e c)$ は「ボーア磁子」で、9.3×10^{-21} erg/gauss という値を持つ。X 線観測では以下の値を覚えておくと便利。

$$E_c = 11.6\ \ \mathrm{keV}\ \ \frac{B}{10^{12}\ [\mathrm{Gauss}]} \tag{1.10}$$

実際、X 線連星パルサー中の中性子星は 10^{12} Gauss 以上の強い磁場を持ち、中性子星大気中のサイクロトロン吸収線が、式 (1.10) で表わされるエネルギーに観測されている。



「ぎんが」が観測した X0331+35 からの 28.5 keV のサイクロトロン吸収線 (Makishima et al. 1990, ApJ, 365, L59)。これから、式 (1.4) を使って、中性子星の磁場は 2.5×10^{12} ガウスと導かれる。

Chapter 2

輻射輸送

2.1　光学的厚み (optical depth)

光学的厚み τ の物質を輻射が通過すると、強度が $e^{-\tau}$ になる。考えている物質の厚さを L [cm]、水素柱密度を N_H [cm^{-2}]、密度を ρ [g/cm^3] とすると、

$$\tau = \alpha[\mathrm{cm}^{-1}]\, L[\mathrm{cm}] = \kappa[\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}]\, \rho[\mathrm{g/cm}^3]\, L[\mathrm{cm}] = N_H[\mathrm{cm}^{-2}]\, \sigma_H[\mathrm{cm}^2]. \tag{2.1}$$

α は吸収係数 (absorption coefficient)、κ は質量吸収係数 (mass absorption coefficient; opacity)、σ_H は水素原子あたりの吸収断面積 (cross section)。一般に、これらのパラメーターは波長と場所の関数である。

輻射強度でなく、「光子」ひとつひとつに注目すると、**物質中で光子が吸収されずに τ だけ進む確率は $e^{-\tau}$、光子が進む光学的距離の平均が** $\tau = 1$。実際、

$$\int_0^\infty e^{-\tau} d\tau = 1,$$

$$\langle \tau \rangle \equiv \int_0^\infty \tau e^{-\tau} d\tau = 1.$$

$\tau > 1$ のとき、物質は光学的に厚い (不透明；大部分の光子は吸収されてしまう)、$\tau < 1$ のとき、物質は光学的に薄い (透明；大部分の光子は透過する)。光子が光学的に薄い物質に吸収される確率は、$1 - e^{-\tau} \approx \tau$。

光子が実際に進む距離の平均を l とすると、$\tau = \alpha\, l = 1$ より、

$$l = \frac{1}{\alpha}. \tag{2.2}$$

これが平均自由行程 (mean free path)。式 (2.1) と (2.2) より、

$$\tau = \frac{L}{l}. \tag{2.3}$$

2.2　輻射輸送 (radiative transfer)

j_ν を放射率 [erg/s/cm^3/Hz/str]、α_ν [cm^{-1}] を吸収係数として、源泉関数 (source function) S_ν [erg/s/cm^2/Hz/str] は、以下のように定義される。

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}. \tag{2.4}$$

輻射輸送 (radiative transfer) の式,

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu. \tag{2.5}$$

一般に、I_ν (specific intensity [輻射強度]; brightness [輝度]), S_ν (source function [源泉関数]) は、振動数、場所、τ_ν (光学的厚み [optical depth])、その他の諸々の物理量の関数。様々な状況において「輻射輸送」の問題を解いて I_ν を求め、観測と比較するのが、天文学の伝統的な手法。散乱 (scattering) があるとき、S は I に依存し、さらに問題が複雑になる。

輻射輸送の式と、I_ν と S_ν の単位 (次元)、erg/s/cm^2/Hz/str は覚えておこう。

熱平衡の場合、Source function は温度だけで一意的に決まり、プランク関数 $B_\nu(T)$ で与えられる:

$$B_\nu(T) = \frac{2}{c^2}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1} \quad [\mathrm{ergs/s/cm^2/Hz/str}] \tag{2.6}$$

この標識も覚えておくと何かと便利。次元を合わせ、偏光によって factor 2 が出てくることから思いだせるはず。

式 (2.5) を以下のように直観的に解釈できる:

"$I > S$ のとき $dI/d\tau < 0$ で、I は減少、$I < S$ のとき $dI/d\tau > 0$ で、I は増加、すなわち、I は τ に沿って S に近づこうとする。よって、τ が十分大きい (光学的に厚い) とき、I は S に一致する。"

$S_\nu = B_\nu$ を熱的輻射 (thermal emission)、$I_\nu = B_\nu$ を黒体輻射 (blackbody emission) という。**すべての熱的輻射は、光学的に厚い極限では黒体輻射になる。**

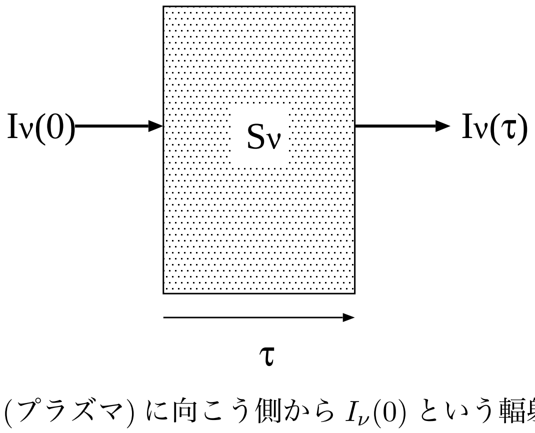
熱的な放射のときはいつでも $S_\nu = B_\nu(T)$ だから、

$$\alpha_\nu = \frac{j_\nu}{B_\nu(T)}. \tag{2.7}$$

これが熱的な吸収と放射を関係づけるキルヒホッフの法則である。

S_ν が一定 (τ に依らない) のとき、(2.5) を解くことができる。

$$I_\nu(\tau) = S_\nu(1-e^{-\tau}) + I_\nu(0)e^{-\tau} \tag{2.8}$$



光学的厚み τ の物質 (プラズマ) に向こう側から $I_\nu(0)$ という輻射が入ってきて、我々に向かって $I_\nu(\tau)$ が出てくる、というイメージ。式 (2.8) より、$\tau \gg 1$(光学的に厚い) のときは、すでに見たとおり、

$$I_\nu(\tau) = S_\nu. \tag{2.9}$$

特に、物質 (プラズマ) が温度 T の熱輻射をしているときは、$I_\nu(\tau) = B_\nu(T)$。つまり、**プラズマの組成が何であろうと、それに入射する輻射があってもなくても、そこから出る輻射は黒体輻射になる。**

$\tau \ll 1$(光学的に薄い) のとき、式 (2.8) は、

$$I_\nu(\tau) = S_\nu\tau + I_\nu(0)(1-\tau). \tag{2.10}$$

入射する輻射がないときは、第二項はゼロ。第一項より、光学的厚みに比例した、「光学的に薄い」輻射が観測される。

特に、ある線スペクトルのところだけで τ が大きい場合は、第二項より「吸収線」が観測される。第一項は輝線を与えるので、輝線が観測されるか吸収線が観測されるかは状況に依る。

式 (2.9)、(2.10) より、熱的な放射、$S_\nu = B_\nu(T)$ を考える限りは、常に $I_\nu(\tau) \leq B_\nu$. つまり、**熱的な放射の強度は、黒体輻射の強度を越えない。**

Chapter 3

黒体輻射 (blackbody radiation)

3.1 黒体輻射の導出

黒体輻射は物質と輻射場が完全に熱平衡にあるときの放射を記述し、[erg/s/cm^2/Hz/str] という単位を持つ (str は立体角)。どんな状況においても熱平衡にあるかぎり黒体輻射は成立するので、二つの準位を持つ原子と輻射場を考える。

上の準位にある原子が単位時間あたり A_{21}[s^{-1}] の割合で下の準位に遷移し、光子を放射する。一方、輻射場の強度を J_ν として、光子は単位時間あたり、$B_{12}J_\nu$ の割合で、吸収される。また、輻射場の強度に刺激されて起きる放射の割合が、$B_{21}J_\nu$ である。下の準位にある原子の密度を n_1、上の密度にある原子の密度を n_2 とし、系が平衡状態にあることから、

$$n_1 B_{12} J_\nu = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} J_\nu \tag{3.1}$$

である。これを J_ν について解けば、

$$J_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}. \tag{3.2}$$

ここで、熱平衡の式より、

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp(h\nu/kT). \tag{3.3}$$

よって (3.2) は、

$$J_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{\exp(h\nu/kT)(B_{12}/B_{21}) - 1}. \tag{3.4}$$

ここで、一般に Einstein の関係式、

$$\begin{aligned} B_{12} &= B_{21}, \\ A_{21} &= \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \end{aligned} \tag{3.5}$$

が成立することがわかっている。前者は、詳細つりあい (detailed balance) を示し、後者では、$2h\nu^3/c^2$ が、[erg/cm^2/s/Hz] という単位を持つフラックスである。係数 2 は、変更の自由度 2 を表わしている。式 (3.5) を用いて、(3.4) は、

$$J_\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad [\text{erg/s/cm}^2\text{/Hz/str}]. \tag{3.6}$$

これが黒体輻射の式で、通常 $B_\nu(T)$ で表す。

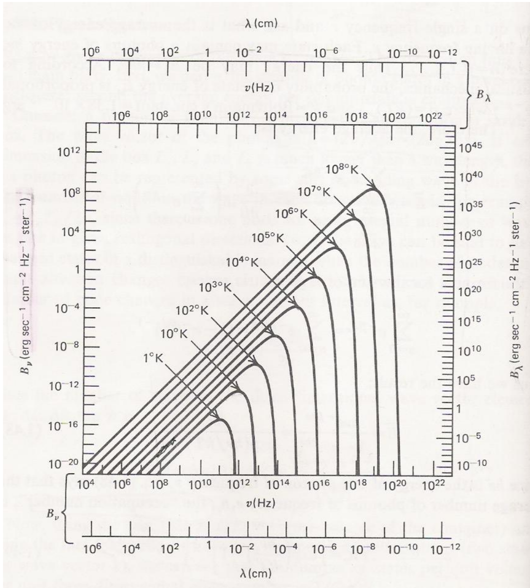


Figure 3.1: いろいろな温度の黒体輻射スペクトル。Rybicki and Lightman "Radiative Processes in Astrophysics" より。 $\partial B_\nu(T)/\partial T > 0$ なので、(あたりまえのことではあるが) どの振動数でも T が大きいほど輻射が強くなることに注意。

3.2 黒体輻射の特徴

ピークを与える周波数と波長

式 (2.6) に対応して、黒体輻射の単位" 波長" あたりの強度を与える関数 $B_\lambda(T)$ を考えると、

$$B_\nu(T)\, d\nu = -B_\lambda(T)\, d\lambda,$$

$c = \lambda\nu$、 $d\nu/\nu = -\, d\lambda/\lambda$ より、

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \ \ [\mathrm{erg/s/cm^2/Å/str}]. \tag{3.7}$$

(2.6) を ν で微分してゼロになるところが、単位周波数あたりの放射のピークを与える周波数 ν_{max} は、

$$h\nu_{max} = 2.82\, kT. \tag{3.8}$$

黒体輻射のエネルギースペクトルのピークが温度の約 3 倍にくることを覚えておくと便利。一方、(3.7) を λ で微分してゼロになるところが、単位波長あたりの放射のピークを与える波長 λ_{max} は、

$$\lambda_{max} = 0.201\, \frac{hc}{kT}. \tag{3.9}$$

$\lambda_{max}\, \nu_{max} = 0.57c \neq c$、つまり、**単位振動数 (エネルギー) あたりの黒体輻射のピークを与える振動数 (エネルギー) と単位波長あたりのピークを与える波長は違う**ことに注意。

低周波数側と高周波数側での近似式

$h\nu \ll kT$ のとき、(2.6) から、

$$B_\nu(T) \approx \frac{2\nu^2 kT}{c^2}. \tag{3.10}$$

これが古典的な Rayleigh-Jeans の法則。h **が現われないこと、**T **に比例すること**に注意[1]。

$h\nu \gg kT$ のときは、

$$B_\nu(T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-kT/h\nu}. \tag{3.11}$$

これが Wien の法則。

電波天文では Rayleigh-Jeans 側を扱うことが多いが、X 線観測では、黒体輻射のピークのあたりから Wien 側からを見ることが多い。典型的な観測範囲は 2 –10 keV、X 線バーストは ∼2 keV、降着円盤の内縁は ∼ 1 keV 等。**X 線観測 (2 − 10 keV) が Rayleigh-Jeans 側に対応するほど高温の黒体輻射をしている天体は宇宙に (ほとんど) 存在しない。**

3.2.1 黒体輻射のエネルギー密度、フラックス

$$\begin{aligned} u &= \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty B_\nu(T)d\nu \\ &= \frac{8\pi k^4}{h^3c^3}T^4\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx \end{aligned}$$

積分の値は $\frac{\pi^4}{15}$ (Mathematica を使おう!) だから、

$$u = a\,T^4$$

$$\begin{aligned} a \equiv \frac{8\pi^5k^4}{15h^3c^3} &= 7.56\times10^{-15}\ \ [\mathrm{erg\ cm^{-3}\ deg^{-4}}]^2. \\ &= 1.37\times10^{14}\ \ [\mathrm{erg\ cm^{-3}\ keV^{-4}}]. \end{aligned}$$

黒体輻射している表面からのフラックスを F とすると、

$$F \equiv \int I\cos\theta\, d\Omega$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^\infty B_\nu(T)d\nu\right\}\cos\theta\sin\theta\,d\theta \\ &= \pi\int_0^\infty B_\nu(T)d\nu = \frac{c}{4}\,u = \frac{ac}{4}\,T^4 \equiv \sigma T^4, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{2\pi^5k^4}{15h^3c^2} &= 5.67\times10^{-5}\ \ [\mathrm{erg\ cm^{-2}\ deg^{-4}\ s^{-1}}] \\ &= 1.03\times10^{24}\ \ [\mathrm{erg\ cm^{-2}\ keV^{-4}\ s^{-1}}]. \end{aligned}$$

これがステファン-ボルツマン定数。p.8 も参照。

[1] エネルギー密度は $4\pi/c$ を掛けて、$(8\pi\nu^2/c^3)kT$。古典的な電磁的固有振動の密度が $8\pi\nu^2/c^3$ であることを思いだして、一固有振動あたり kT のエネルギーが付随していると解釈できる。

[2] 宇宙背景黒体輻射の温度は 2.725 K だから、エネルギー密度は $4.17\times10^{-13}\mathrm{erg/cm^3} \approx 0.26\ \mathrm{eV/cm^3}$.

3.2.2 黒体輻射の光子密度

黒体輻射の光子密度を n とすると、

$$n = \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty B_\nu(T)/h\nu \, d\nu$$

$$= \frac{8\pi k^3 T^3}{h^3 c^3}\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx.$$

$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1} dx = 2.404$ だから、

$$n = 60.4 \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 = C\, T^3,$$

$$C = 20.3 \text{ [photons cm}^{-3} \text{ deg}^{-3}]^3$$

$$= 3.17 \times 10^{22} \text{ [photons cm}^{-3} \text{ keV}^{-3}].$$

また、(3.9) を用いて、

$$n \approx 0.5 \lambda_{max}^{-3}.$$

典型的な波長 λ_{max} を持つ黒体放射の光子が、空間にぎっしり詰まっている様子を思い浮かべればよい。

3.3 色温度、有効温度、輝度温度

黒体輻射の「温度」はユニークであるが、黒体輻射と「似た」輻射については黒体輻射の性質に基づいた 3 つの温度を定義することができる。黒体輻射のときは、これら 3 つの温度が一致するが、黒体輻射からの「ずれ」が大きくなるにつれて、これら 3 つの温度の違いが顕著になる。

有効温度 (effective temperature)

天体の表面から発っする、全エネルギーで積分したフラックスを F として、有効温度 T_{eff} を

$$\sigma T_{eff}^4 \equiv F$$

で定義する。球対象を仮定し、天体の半径を R とすると、光度は $L = 4\pi R^2 F$。一方、天体までの距離を d, 観測されたフラックスを f とすると、$f = L/4\pi d^2$。よって、

$$\sigma T_{eff}^4 = F = \left(\frac{d}{R}\right)^2 f$$

となり、d/R がわかっていれば、観測されたフラックスから有効温度が一意的に決まる。しかし、通常 d/R はわからず、有効温度は決まらない。一方、天体の T_{eff} を理論モデルから計算することができるので (例えば、降着円盤からの輻射)、観測されたフラックス f から、d/R を推定することができる。ただし有効温度と色温度の違いに注意 (以下参照)。

[3] 宇宙背景黒体輻射の温度は 2.725 K だから、光子密度は ~ 410 photons/cm^3.

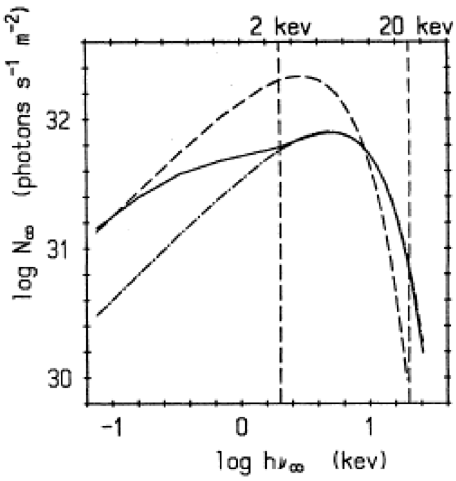


Figure 3.2: 数値計算で求めた、バースト中の中性子星大気からの X 線スペクトル (実線)。光子が逆コンプトン散乱を受けて電子からエネルギーを貰うので、黒体放射より高エネルギー側にずれる。色温度 T_{col} が、有効温度 T_{eff} よりも高くなっている。その有効温度 T_{eff} を持つ黒体輻射が破線。モデルスペクトルは、2–20 keV の範囲で、"diluted blackbody"、$(T_{eff}/T_{col})^4 B_\nu(T_{col})$ で良く近似できる (一点鎖線)。Ebisuzaki 1987, PASJ, 39, 287 より。

色温度 (color temperature)

観測されたエネルギースペクトルの「形」を黒体輻射の「形」に合わせ、いちばん良く合う温度を色温度 (T_{col}) と言う。**色温度は、観測データだけから決まる** (天体までの距離や天体の輻射面積によらない) ことに注意。

標準的な解析手法である **X 線のスペクトルフィットで求められる温度は色温度**である。これが一般には有効温度とは異なることに注意。

輝度温度 (brightness temperature)

ある狭い周波数 (エネルギー) 範囲で、specifici intensity I_ν を測定したとき、

$$I_\nu = B_\nu(T_b)$$

を与えるのが輝度温度、T_b。「もし天体が黒体輻射をしているとした時、観測された輝度を実現するための温度。」Rayleigh-Jeans 近似が成立し、黒体輻射が単純に温度に比例する電波天文では良く使うが、X 線天文ではほとんど使わない。

温度 T の天体が**熱的な輻射**をしているとき (熱制動放射等)、それは黒体輻射よりも効率が悪いので (section 2.5)、$T > T_b$ である。一方、天体が効率の良い**比熱的な輻射**をしているとき (シンクロトロン放射など) $T \ll T_b$ になりうる。

3.4 黒体輻射の観測例

3.4.1 宇宙背景放射

黒体輻射は宇宙のいたるところで観測されるが、最も普遍的なのが**宇宙背景輻射 (Cosmic Microwave Background Radiation; CMBR)** である。これは、ビッグバンから数十万

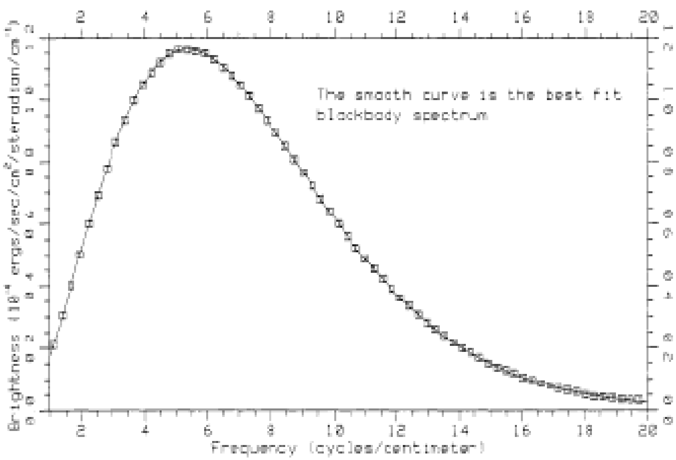


Figure 3.3: COBE 衛星が測定した CMBR のスペクトル。四角が測定点、実線は 2.735 K の黒体輻射。Matehr et al. 1990, Astrophysical Journal, 354, L37 より。後に検出装置の較正が進み、最終的に COBE チームが 1999 年に発表した CMBR の温度は 2.725 ± 0.002 K である。横軸の単位が波数 (=波長の逆数=振動数/光速) であること、横軸、縦軸ともに線型表示であることに注意。

年後、宇宙が約 3000 K の黒体輻射に満ちていたときの光が、宇宙が 1000 倍膨張した結果、温度 (エネルギー) が 1/1000 に下がった (赤方偏移) ものである。NASA の COBE 衛星はその温度を正確に 2.725 ± 0.002 K と測定した (図 3.3)。COBE 衛星の業績により、Mather と Smoot の 2 人は 2006 年のノーベル物理学賞を受賞している[4]。さらに、CMBR の微少な空間的ゆらぎを測定することにより、宇宙膨張のパラメーターに制限がつき、宇宙の年齢を知ることができる。WMAP 衛星の測定によって、それは 138 億年と求められている。

3.4.2 放射温度計

放射温度計では、赤外線領域で赤外線放射量を量り、それから輝度温度を測定する。ただし、そのためには、黒体からのずれ (放射率) をあらかじめ設定する必要がある。二色を用いて、色温度を測定しているものもある。その際、放射率を知らなくても、色温度の測定が可能になる[5]。

[4] `http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2006`。特に、"Advanced Information" は天文学を学ぶ大学院生にも参考になる (`http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2006/advanced-physicsprize2006.pdf`)。

[5] `http://mitsui-photonics.com/product/thermera_tec.html` などを参考に。

Chapter 4

制動放射、逆コンプトン放射、シンクロトロン放射

4.1　電子分布とエネルギースペクトル

黒体輻射の場合を除けば、ある電子分布 (熱的プラズマの場合は Maxwellian) から放出される光子のエネルギースペクトルは、電子一個の電磁相互作用によって放出、あるいは散乱される一個の光子を考え、それを電子の分布で積分することによって得られる。

一般に、エネルギー E を持つ電子の位相空間での分布確率を $n(E)$, エネルギー E の電子一個から周波数 ν の光子が放出される割合を $\mathcal{F}(\nu, E)$ とすると、エネルギースペクトルは電子分布を位相空間で積分して、

$$F(\nu) = \int d^3p\, n(E)\ \mathcal{F}(\nu, E). \tag{4.1}$$

あるいは、エネルギー空間での電子分布を $N(E)dE$ として、

$$F(\nu) = \int dE\ N(E)\ \mathcal{F}(\nu, E). \tag{4.2}$$

電子が熱的な場合は、$n(E) \approx \exp(-E/kT)$。エネルギー E の電子が作る光子の最大周波数は $h\nu = E$ で与えられ、一般に $\mathcal{F}(\nu, E)$ は、ν に対してゆっくりと変化する関数。よって、非常に大ざっぱな近似として、

$$\mathcal{F}(\nu, E) \sim \begin{cases} \mathcal{F}_0 & \text{for } h\nu \le E, \\ 0 & \text{for } h\nu > E, \end{cases} \tag{4.3}$$

と考えても良い。すると、(4.1) は、

$$\begin{aligned} F(\nu) &\sim \mathcal{F}_0 \int_{E=h\nu}^{\infty} d^3p\ \exp(-E/kT) \\ &\sim \mathcal{F}_0 \int_{E=h\nu}^{\infty} \sqrt{E}\ \exp(-E/kT)\, dE \\ &\sim \mathcal{F}_0 \exp(-h\nu/kT), \end{aligned} \tag{4.4}$$

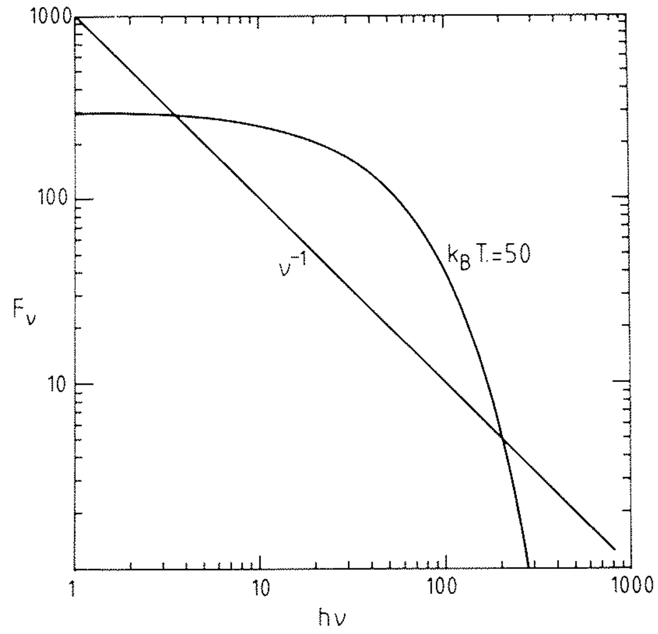


Figure 2.1. Spectral shapes.

Figure 4.1: (黒体輻射以外に)X 線天体から典型的に観測される熱的なスペクトルと powar-law 的スペクトル。Katz の"High Energy Astrophysics" より。

となる。ここで、exp に比べてゆっくり変化する $\sqrt{E}$ の項は一定と大胆に近似した。つまり、温度で決まる ($\sim kT$) カットオフエネルギーまではほぼ一定で、それより高エネルギー側で exponential で急激に落ちる特徴的なエネルギースペクトルが観測されることがわかる。

次に電子が非熱的な分布をしていて、最高エネルギーが静止エネルギーよりもはるかに高い場合[1]を考える。電子一個のエネルギーは、$E = mc^2\gamma$ であるが、非常に良く出てくるのは電子のエネルギー分布がべき関数、

$$N(E)dE \propto \gamma^{-p}\, d\gamma \tag{4.5}$$

で表わされる場合である。様々な物理機構、天体において、このような電子のエネルギー分布が実現していると考えられている。また、エネルギー $E = mc^2\gamma$ を持つ一つの電子を考えたとき、

1. 放出される光子の典型的なエネルギー ($\equiv h\nu_c$) が γ^2 に比例し、

2. 振動数 ν を持つ光子が放出される割合は $\mathcal{F}(\nu, E) = S(\nu/\nu_c)$ という関数形で表わされる

[1] $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-(v/c)^2} \gg 1$; こういう場合を "相対論的" (relativistic) という。

場合を考える。相対論的な電子によるシンクロトロン放射、逆コンプトン放射では、これらの条件を満たすことがわかっている (ここがポイント!)。

すると、(4.2) は、

$$F(\nu) = \int S(\nu/\nu_c)\gamma^{-p}\, d\gamma$$

と書ける。ここで、$\nu_c \propto \gamma^2$ を使って、積分変数を γ から ν_c に変換する (ここがもう一つのポイント!)。

$$\frac{d\gamma}{\gamma} \propto \frac{d\nu_c}{\nu_c} \propto \nu_c\, d\left(\frac{1}{\nu_c}\right)$$

だから、ν は γ と ν_c に依存しない変数であることに注意して、

$$\frac{d\gamma}{\gamma} \propto \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-1} d\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)$$

が成り立つ。これを使って、

$$\begin{aligned}
F(\nu) &= \int S(\nu/\nu_c)\gamma^{-p+1}\ \frac{d\gamma}{\gamma} \\
&= \int S(\nu/\nu_c)\nu_c^{-p/2+1/2}\ \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-1} d\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \\
&= \int S(\nu/\nu_c)\left(\frac{\nu_c}{\nu}\right)^{-p/2+1/2} \nu^{-p/2+1/2}\ \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-1} d\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \\
&= \nu^{-\frac{p-1}{2}} \int S(\nu/\nu_c)\ \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{\frac{p-3}{2}} d\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

(4.5) の電子分布が十分広いエネルギー範囲に渡っているとき、積分範囲を 0 から ∞ にすると、積分値は ν に依らない。結局、**相対論的な電子のエネルギー分布が power-law、γ^{-p} で表わされるとき、そこから期待されるシンクロトロン放射あるいは逆コンプトン放射のエネルギースペクトルも power-law になり、そのべきは、**

$$s = \frac{p-1}{2} \tag{4.7}$$

になる、という重要な結果が得られる。

4.2 制動放射 (bremsstrahlung)

プラズマ中の自由電子が原子核 (主に陽子) のクーロン力によって曲げられ、それに伴う電気双極子の加速度運動によって発生する電磁波が制動放射 (bremsstrahlung) である。電子-電子、あるいは陽子-陽子では電気双極子にならないので、制動放射は発生しない。また、陽子が原子核のクーロン力に受ける影響は電子に比べてはるかに弱いので、陽子からの制動放射も考えなくて良い。

光学的に薄い熱的プラズマからは、熱制動放射 (thermal bremsstrahlung) による連続スペクトルが観測される。熱制動輻射では連続成分だけを考えるが、実際には数 keV の高温

プラズマ中では重元素の電離と再結合が繰り返され、プラズマの温度 (電離状態) に応じた、たくさんの輝線が観測される。

2.2 節で述べたように、**光学的に十分厚い熱的輻射はすべて黒体輻射になり、それが熱的輻射の中では最大の輻射強度を与える**。中性子星大気、ブラックホールや中性子星の周りの標準降着円盤などは光学的に厚く、黒体輻射に近いスペクトルが X 線領域で観測される (前節参照)。一方、熱制動放射は光学的に薄いプラズマから観測される。数 keV の高温プラズマによる熱制動放射による X 線を放出している天体として、白色矮星 (激変星; Cataclysmic Variables)、超新星残骸、銀河、銀河団などがある。黒体輻射の強度は強いので、とても小さい天体 (中性子星、降着円盤) からも強い X 線が観測されるが、熱制動放射の放射効率はずっと低いので、X 線で熱制動放射が観測されている天体は黒体放射をしている天体よりもはるかに大きい (**大きくなくては観測にかからない**) ことに注意。

4.2.1 準備 1: 電場の変化とエネルギースペクトル

時間変化する電磁場で電場と磁場は直交し、ポインティングベクトル

$$S \equiv \frac{c}{4\pi}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) \tag{4.8}$$

が、電磁波の進行方向のエネルギーの流れを示す。ガウス単位系で $|E||B|, |E|^2, |B|^2$ はそれぞれ、エネルギー密度 [erg/cm^3] の単位を持つことので、ポインティングベクトルは [erg/s/cm^2] という単位になることに注意。電磁波では電場と磁場の大きさは同じだから、単位時間、単位面積あたりの電磁波のエネルギーの流れ [erg/s/cm^2] は

$$\frac{dW}{dtdA} = \frac{c}{4\pi}E(t)^2 \tag{4.9}$$

となり、ある電場変化の「パルス」によって生じる全エネルギー [erg/cm^2] は

$$\frac{dW}{dA} = \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(t)^2 dt \tag{4.10}$$

と書ける。$E(t)$ のフーリエ変換、

$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{i\omega t}dt \tag{4.11}$$

を考える。フーリエ変換の性質より

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(t)^2 dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega, \tag{4.12}$$

また、$E(t)$ は実数だから、

$$\hat{E}(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-i\omega t}dt = \hat{E}^*(t) \tag{4.13}$$

以上を使うと、(4.10) は、

$$\frac{dW}{dA} = c\int_0^{\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega \tag{4.14}$$

とかける。つまり、ひとつのパルスからの、単位振動数あたりのエネルギーフラックス [erg/cm^2/Hz] は、

$$\frac{dW}{dAd\omega} = c|\hat{E}(\omega)|^2 \tag{4.15}$$

となる。

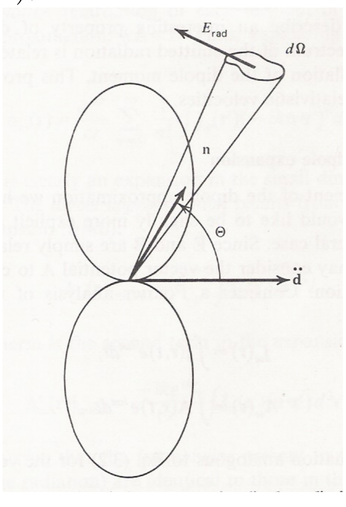
フーリエ変換の性質より、周波数の幅 $\Delta\omega$ とパルスの持続時間 T の間に、$\Delta\omega \approx 1/T$ という関係があることに注意。たとえば、電子が単振動しているとき、エネルギースペクトルはその振動数の単色になる (サイクロトロン放射がその例; section 1.4)。一方、**電場の変化が非常に短いパルスによって引き起こされるとき、広い範囲のエネルギースペクトルが観測される** (シンクロトロン輻射がその例; 次節参照)。

4.2.2 準備 2:電気双極子放射 (electric dipole radiation)

ここでは非相対論的な場合だけを考える。$\mathbf{d} \equiv \sum_i q_i \mathbf{r}_i$ を電気双極子ベクトルとすると、それが加速度運動しているとき、方位ベクトル $\mathbf{n}$、距離 R の点に生じる電場は[2]、

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}})}{c^2\, R}, |\mathbf{E}_{rad}| = \frac{|\ddot{\mathbf{d}}| \sin\theta}{c^2\, R}, \tag{4.16}$$

θ は $\ddot{\mathbf{d}}$ と方位ベクトル $\mathbf{n}$ のなす角。導出は、Rybicki and Lightman などの教科書参照。次元が合っていることだけは確認しておくこと。$\ddot{\mathbf{d}}$ の方向には放射はされず、その垂直方向で放射強度が最大になる (下図参照)。



Rybicki & Lightman "Radiative and Processs in Astrophysics", chapter 3 より。

(4.9)、(4.16) と、立体角 $d\Omega = dA/R^2$ を使って、電気双極子から単位立体角あたりに輻射されるエネルギー [erg/s/str] は、

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta. \tag{4.17}$$

立体角で積分して ($\int \sin^2\theta d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sin^3 d\theta = \frac{8\pi}{3}$)、電気双極子から放出されるパワー [erg/s] は、

$$P = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}. \tag{4.18}$$

[2]静電磁場は R^{-2} で距離とともに落ちていくが、輻射場は R^{-1} でしか減少しないことがポイント。これについては Rybicki & Lightman に直感的で美しい説明があるので参考にしてください。

電気双極子放射のエネルギースペクトルを考えるには、電場強度のフーリエ変換が必要。(4.16) より、

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\sin\theta}{c^2 R}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{d}\, e^{i\omega t}dt. \tag{4.19}$$

電気双極子のフーリエ変換、

$$\hat{d}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d(t)e^{i\omega t}dt \tag{4.20}$$

を定義すると、

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{d}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \tag{4.21}$$

$$\ddot{d}(t) = -\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\hat{d}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{4.22}$$

だから、(4.19) は、

$$\begin{aligned}\hat{E}(\omega) &= -\frac{\sin\theta}{c^2 R}\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty}\omega'^2\hat{d}(\omega')e^{-i\omega' t}e^{i\omega t}dtd\omega'. \\ &= -\frac{\sin\theta}{c^2 R}\int_{-\infty}^{\infty}\omega'^2\hat{d}(\omega')\delta\left((\omega'-\omega)t\right)dt \\ &= -\frac{\sin\theta}{c^2 R}\omega^2\hat{d}(\omega). \end{aligned} \tag{4.23}$$

(4.15) と (4.23) より、(4.18) と同様に立体角 $d\Omega = dA/R^2$ を使って、電気双極子から放射される単位振動数、単位立体角あたりのエネルギー [erg/Hz/str] は、

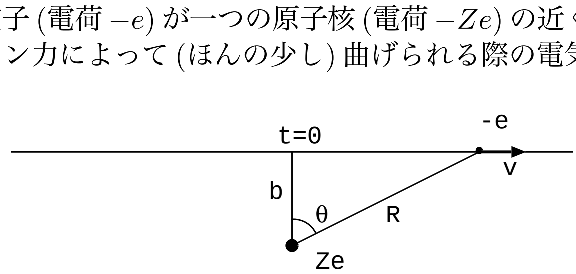
$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{c^3}\omega^4|\hat{d}(\omega)|^2\sin^2\theta. \tag{4.24}$$

立体角で積分して、電気双極子放射の単位振動数あたりのエネルギー [erg/Hz] は、

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{8\pi}{3c^3}\omega^4|\hat{d}(\omega)|^2. \tag{4.25}$$

4.2.3 制動放射のパワー

下図のように一つの電子 (電荷 $-e$) が一つの原子核 (電荷 $-Ze$) の近くを通り (インパクトパラメーター b)、クーロン力によって (ほんの少し) 曲げられる際の電気双極子輻射を、(4.25) に従って考える。



電子の速度ベクトルを $\mathbf{v}$ とすると、$\ddot{\mathbf{d}} = -e\dot{\mathbf{v}}$。(4.22) のフーリエ変換をとって、

$$\omega^2\hat{d}(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{d}(t)\, e^{i\omega t}dt$$

$$= \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t)\, e^{i\omega t} dt. \tag{4.26}$$

電子が原子核のクーロン場の影響を受ける時間スケールは、$\tau \equiv b/v$ なので、上式で $-\tau < t < \tau$ の時間範囲での積分が効く。もし $\omega\tau \gg 1$ ならば、exponential の項は振動するので、打ち消し合って積分はゼロになると近似してよい[3]。一方、$\omega\tau \ll 1$ のときは、exponential の項は 1 と近似して、垂直方向の運動方程式 $m\, dv/dt = Z \cos\theta e^2/R^2$ を用いて、

$$\begin{aligned}\omega^2 \hat{d}(\omega) &= \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ze^2 \cos\theta}{mR^2} dt \\ &= \frac{Ze^3}{2vb\pi m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \\ &= \frac{Ze^3}{vb\pi m}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

結局、(4.25) を用いて、速度 v を持つ一つの電子が一つの原子核の影響を受けて放出する制動輻射のエネルギー [erg/Hz] は (b の関数と考える)

$$\begin{aligned}\frac{dW(b)}{d\omega} &\approx \frac{8Z^2e^6}{3\pi c^3 m^2 v^2 b^2} \quad (b \ll v/w) \\ &\approx 0 \qquad (b \gg v/w).\end{aligned} \tag{4.28}$$

(4.28) は、$b \to 0, v \to 0$ で発散するので、実際には現実的な b, v の下限値を設定しなくてはいけない。

電子密度 n_e [cm^{-3}], イオン密度 n_i [cm^{-3}] のプラズマ中で電子が一様な速さ v を持っていると過程して、単位体積、単位時間あたりに放射されるエネルギー [erg/s/cm^3/Hz] を考える。ひとつのイオンに対して、インパクトパラメーター b と $b + db$ の間を単位時間あたり通過する電子の数は、$2\pi b\, db\, v\, n_e$ [s^{-1}] であることを用いて、

$$\begin{aligned}\frac{dW(b)}{d\omega dV dt} &= n_e n_i 2\pi v \int_{b_{min}}^{\infty} \frac{dW(b)}{d\omega} b\, db \\ &\approx n_e n_i 2\pi v \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{8Z^2e^6}{3\pi c^3 m^2 v^2 b^2} b\, db \\ &= \frac{16e^6}{3c^3m^2v} n_e n_i Z^2 \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) \\ &= \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3m^2v} n_e n_i Z^2 \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) \\ &= \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3m^2v} n_e n_i Z^2 g_{ff}(v,\omega).\end{aligned} \tag{4.29}$$

ここで、$g_{ff}(v,w) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln(b_{max}/b_{min})$ は、"Gaunt factor" と呼ばれ[4]、電子のエネルギーと制動放射で放射される振動数の関数であるが、大体 ~ 1 のオーダーと思って良い。

[3] 4.2.1 節の議論より、「パルス」の持続時間は $\sim \tau$ だから、電磁波は $\Delta\omega \sim 1/\tau$ の振動数の幅を持つ。電子が速く運動しているほど高周波の電磁波が放射される (電子がゆっくり運動しているときは高周波の電磁波は放出されない)。

[4] $\sqrt{3}/\pi$ がつくのが標準的な定義だそうだ。

(4.29) の次元 [erg/s/Hz/cm^3] は確認しておくこと。単位時間、単位体積あたりから放射されるエネルギーが $n_e n_i$ に比例するので、**体積 V のプラズマから単位時間に放出される制動輻射のエネルギーは、$n_e n_i V$ に比例する**。$n_e n_i V$ を Emission Measure と呼ぶことがある [cm^{-3}]。

4.2.4 熱制動放射 (thermal bremsstrahlung)

(4.29) は電子が特定の速度 v を持つときの表式だが、これを実際の電子の速度分布について平均してやれば、制動輻射のエネルギースペクトルが得られる。電子分布が熱的 (Maxwell 分布) か、比熱的 (power-law) かによって、熱制動放射、非熱的制動放射になる。電子分布に応じて、前者は電子温度に対応したエネルギー $\sim kT$ にカットオフのあるスペクトルになり、後者は power-law になる。

電子が温度 T の Maxwell 分布をしているとき、速度が v と $v+dv$ の間にある確率 dP は、

$$dP \approx v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

だから、この重みで (4.29) を平均する。積分の下限、v_{min} は、振動数 ν の光を考えているとき、$h\nu = \frac{1}{2}mv_{min}^2$ という条件から決まる (もし $v < v_{min}$ ならエネルギー $h\nu$ の光子は発生しない)。

$$\frac{dW(T,\omega)}{dVdtd\omega} = \frac{\int_{v_{min}}^{\infty} \frac{dW(v,\omega)}{dVdtd\omega}\, v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}{\int_0^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}$$

$\int_0^\infty x^2 \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}/4$ だから、分母は $(2kT/m)^{3/2}\sqrt{\pi}/4$、分子には $\int_{v_{min}}^\infty v\exp(-mv^2/2kT)dv$ という積分が出てくるが、$\int_a^\infty x\exp(-x^2)dx = \frac{1}{2}\exp(-a^2)$ を用いて、これは $\frac{1}{2}(2kT/m)\exp(-h\nu/kT)$。よって、温度と周波数依存性は (Gaunt factor に弱く依存することを除けば)、$T^{-1/2}\exp(-h\nu/kT)$ になる。

結局、熱制動輻射のエネルギースペクトル [erg/s/cm^3/Hz] は、

$$\begin{aligned}\epsilon_\nu^{ff} \equiv \frac{dW}{dVdtd\nu} &= \frac{2^5\pi e^6}{3mc^3}\left(\frac{2\pi}{3km}\right)^{1/2} T^{-1/2}Z^2 n_e n_i e^{-h\nu/kT}\bar{g}_{ff}(T,\nu) \\ &= 6.8\times 10^{-38} T^{-1/2} Z^2 n_e n_i e^{-h\nu/kT}\bar{g}_{ff}(T,\nu) \ \ \text{[CGS unit]}. \qquad (4.30)\end{aligned}$$

ここで、$\bar{g}_{ff}(T,\nu)$ は、電子の速度分布について平均した Gaunt factor で、温度、周波数に依存している。X 線観測では $kT \sim h\nu$ の場合が多いが、このときは $\bar{g}_{ff}(T,\nu) \approx (h\nu/kT)^{-0.4}$ であることを覚えておくと便利。よって、以下の図からもわかるように、熱制動輻射の X 線エネルギースペクトル [erg/s/cm^2/keV] は、$E^{-0.4}\exp(-E/kT)$、光子スペクトル [photon/s/cm^2/keV] は、$E^{-1.4}\exp(-E/kT)$ で近似できる。

(4.30) を振動数で積分すると、温度 T のプラズマから単位時間、単位体積あたり放出される熱制動放射のエネルギー [erg/s/cm^3] になる。

$$\begin{aligned}\int \epsilon_\nu^{ff} d\nu &= 6.8\times 10^{-38} T^{1/2} Z^2 n_e n_i \bar{g}_{ff}(T)\frac{k}{h} \ \ \text{[CGS unit]} \\ &= 1.4\times 10^{-27} T^{1/2} Z^2 n_e n_i \bar{g}_{ff}(T) \ \ \text{[CGS unit]}.\end{aligned}$$

ここで、振動数で平均した Gaunt factor は、 $\bar{g}_{ff}(T) \approx 1.2$, 宇宙組成を仮定して、いろいろなイオンを考えると、$\sum_Z n_e n_Z Z^2 \approx 1.4 n_e^2$ だから[5]結局、熱制動放射の放射効率 [erg/s/cm^3]

[5] Zombeck, "Handbook of Space and Astrophysics" 参照。

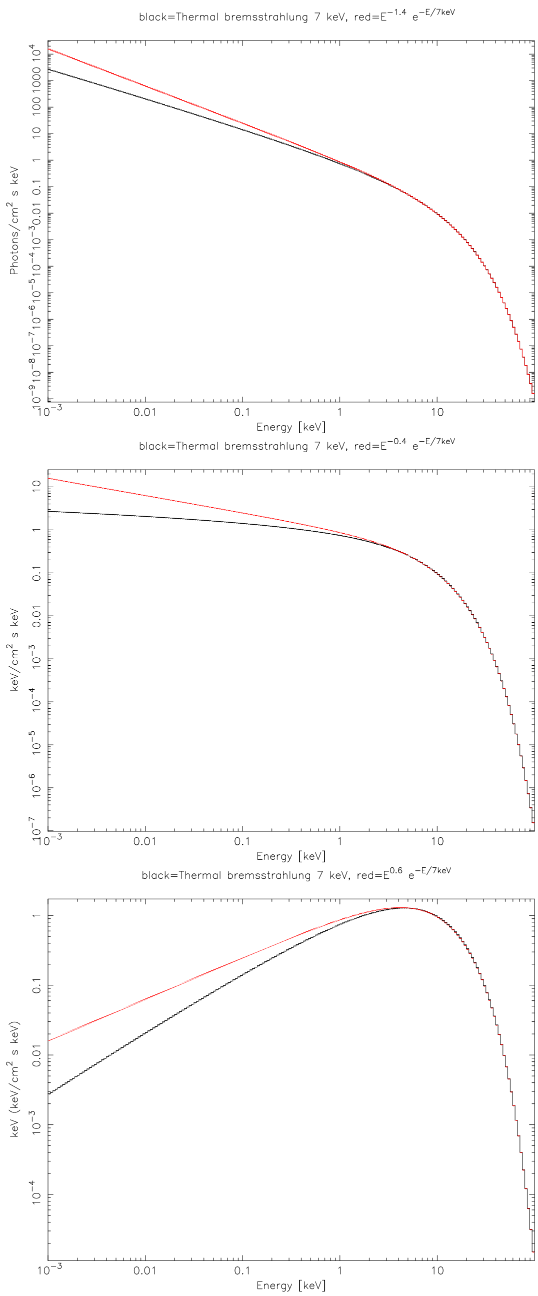


Figure 4.2: 7 keV の熱制動輻射スペクトル (黒; xspec の brems モデル) と、7 keV に cut-off エネルギーを持つ power-law モデル (赤; $\propto E^{-p}\exp(-E/7\,\mathrm{keV})$) の比較。上から順に、光子スペクトル、エネルギースペクトル、(いわゆる)νF_ν プロット。p はそれぞれ、$1.4, 0.4, -0.6$ になる。ここではイオンを考慮していない（電子と陽子だけを考えている）から輝線が入っていないことに注意。実際の熱的プラズマからの放射は温度に応じたたくさんの輝線が放射される。

をプラズマの温度と電子密度だけで表わす便利な公式が得られる：

$$\int \epsilon_\nu^{ff} d\nu = 2.4 \times 10^{-27} T^{1/2} n_e^2 \ \ \text{[CGS unit]}. \tag{4.31}$$

4.2.5 X 線で観測される熱制動輻射の例

光学的に薄い高温プラズマから放出される連続成分は熱制動輻射である。以下のような天体から熱制動輻射による X 線が観測されている。

- 単独の恒星のコロナ、フレア (特に早期型星)
- 晩期型星の連星系。 特に RS Cvn などの active binary。激しい磁気活動により、プラズマが加熱される。
- 激変星と呼ばれる、白色矮星と主系列星の連星系。白色矮星に物質が高速で落ちるときに衝撃波が生じ、物質が加熱される。
- 超新星残骸。衝撃波によって、星間物質が高温に加熱される。
- 楕円銀河、銀河群、銀河団。ダークマターの重力ポテンシャルによって、高温プラズマが引き留められている。

4.2.6 熱制動輻射の特徴

広範囲 (Broad band) のエネルギースペクトル

熱制動輻射の広範囲にわたるエネルギースペクトルを、同じ温度をもつ黒体輻射のスペクトルと比較してみよう（図 4.3）。熱制動輻射の方が大きく広がっていることがわかる。特に低エネルギー側に裾を引く。これは、わずかだけ軌道を曲げられる電子が低エネルギーの電磁波を放射するとして理解できる。なお、図 4.3）の縦軸の単位が keV^2 photons/cm^2/s/keV^{-1} であることに注意 (νf_ν プロットと呼ぶことがある)。エネルギースペクトル $f(E)$ が erg/s/cm^2/keV という単位を持つとしたとき、あるエネルギー範囲におけるフラックスは

$$\int f(E) dE = \int E f(E) dE/E \propto \int E f(E)\ d(\log E) \tag{4.32}$$

と表される。よって、横軸をエネルギーや振動数で対数表示したとき、$Ef(E)$ または νf_ν で表されるスペクトルの形がつくる面積が、そのエネルギー範囲におけるフラックスとなる。これが視覚的にわかりやすいので、νf_ν プロットは良く用いられる。

熱制動輻射の輻射効率の低さ

2.2 節ですでに述べたように、熱的な放射の強度は黒体輻射を超えない。X 線天文学の非常に初期の時代、Sco X-1 などの正体がまだ不明だったころ、そのスペクトルの形が熱制動輻射と良く似ていて、それが可視光や赤外線のスペクトルも説明できる、というモデルがあった。しかし、$\sim 10^{38}$ erg/s の光度を熱制動輻射で説明するには、式 (4.31) より、$T = 2 \times 10^7$ K (~ 2 keV) として、エミッションメジャー、$n_e^2 V \approx 10^{61}$ [cm^{-3}] が必要になる。高密度なプラズマでも、密度は $\sim 10^{15}$ cm^{-3} なので、$V \approx 10^{31}$ cm^3 となり、輻射領域の大きさは $R \approx 10^{10}$ cm。これは中性子星の半径、$\sim 10^6$ cm よりはるかに大きい。つまり、端的に言って、**光学的に薄い熱制動輻射で大きな光度を稼ぐには、大きな体積が必要。中性子星のよう**

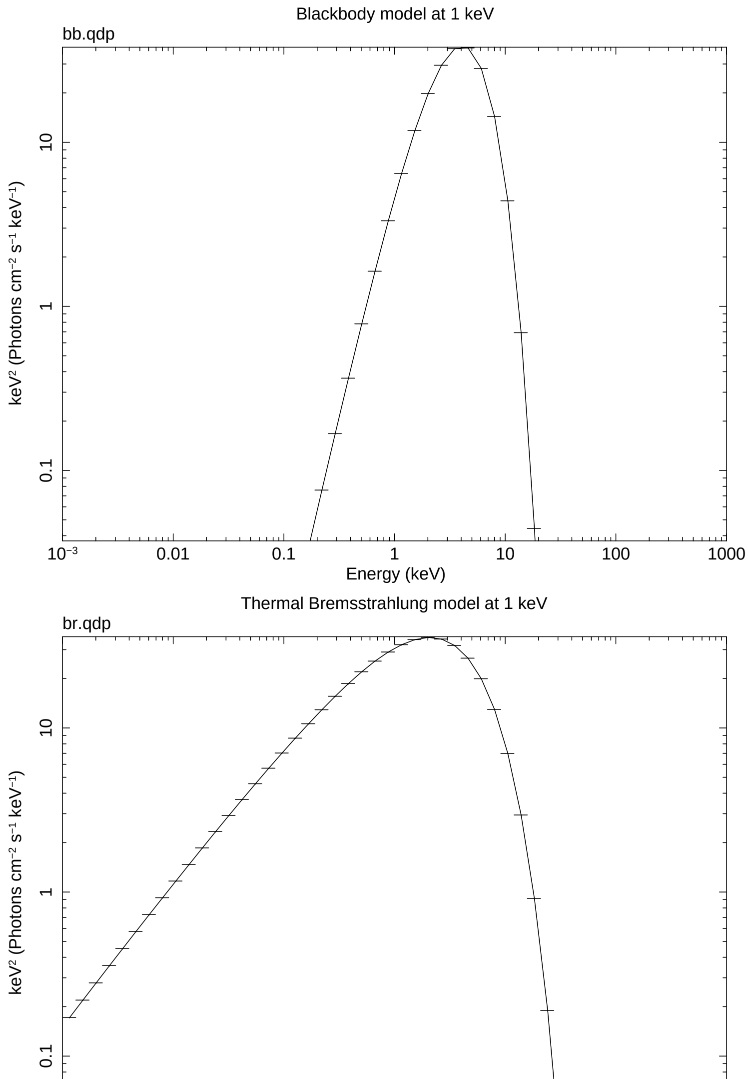


Figure 4.3: $kT = 1$ keV の黒体輻射 (上) と熱制動輻射（下）のエネルギースペクトルの比較。熱制動輻射の方が大きく広がっている。)。

に小さな領域が熱的な輻射で十分明るく輝くためには、光学的に厚い輻射（黒体輻射）しかあり得ない[6]**。**

一方、白色矮星と晩期型星の連星系である激変星（Cataclysmic Variable）から、~ 10 keV の高温熱輻射が観測されている。高温プラズマに特徴的な鉄輝線も観測されており (図 4.5)、その起源が熱輻射であることは間違いない。$R \sim 10^8$ cm^2, $n_e \sim 10^{15}$ cm^{-3}, $T \sim 10^8$ K とすると、式 (4.31）より光度は $\sim 10^{31}$ erg/s となる。白色矮星より二桁小さく一桁低温である黒体輻射をしている中性子星のほうが、7 桁も光度が大きいことに注意しよう。

熱プラズマからの輝線放射

ここまでの熱制動輻射の議論では電子とイオンの間の再結合を考えていなかったので、実は非現実的である。実際には、熱プラズマ中でイオンと電子は電離と再結合を繰り返し、それによってたくさんの輝線が放射される。そのようなプラズマからの複雑なエネルギースペクトルを計算するのは容易ではないが、XSPEC などの標準的なスペクトル解析ツールに、プラズマからの熱放射のモデルが組み込まれていて、観測データとの比較（フィッティング）が簡便に出来るようになっている。

4.3 逆コンプトン放射 (Inverse Comptonization)

4.3.1 用語の整理

トムソン散乱 (Thomson scattering)

長波長 (低エネルギー) の光の自由電子による散乱を言い、短波長 (高エネルギー) の光のコンプトン散乱の低エネルギー極限に対応する。古典電磁気学によると電子は入射光に伴う電場により振動する。その際に電子の得る速度を光速に比べ無視すると、電子は入射光と同じ振動数の散乱光を双極放射する。全断面積は、$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2$ (r_0 は古典電子半径)。

コンプトン散乱 (Compton scattering)

電子による X 線光子の散乱。単色の X 線が電子に当たって散乱されると散乱 X 線の中に入射 X 線と同じ波長の X 線の他に、入射 X 線の波長よりも $\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$ だけ波長が長いものが含まれる (θ は X 線の散乱角)。$\lambda_C = h/mc \approx 0.02426 \mathring{A}$ で、λ_C は電子のコンプトン波長と呼ばれる。この効果は古典電磁気学では説明できない。X 線を光子として扱い、電子との衝突を古典力学の弾性衝突と考えることによって定量的に説明できる。

一般に、トムソン散乱を含めてコンプトン散乱ということもあるが、特に区別する必要のあるときはトムソン散乱を除いた部分を狭義のコンプトン散乱と言う。コンプトン散乱の断面積はクライン-仁科の公式で与えられ、これは入射 X 線の波長が長いとき、トムソン散乱の断面積と一致する。

逆コンプトン効果 (inverse Compton effect)

高エネルギーの電子がマイクロ波や赤外線のようなエネルギーの低い光子と弾性散乱して、エネルギーの高いガンマ線を生じる現象。一方、コンプトン効果は高エネルギーの光子と低エネルギーの電子との弾性散乱によって、より低いエネルギーの光子が生じる現象である

[6]シンクロトロンのような比熱的な輻射の場合は、小さな領域でも明るく輝くことができる。

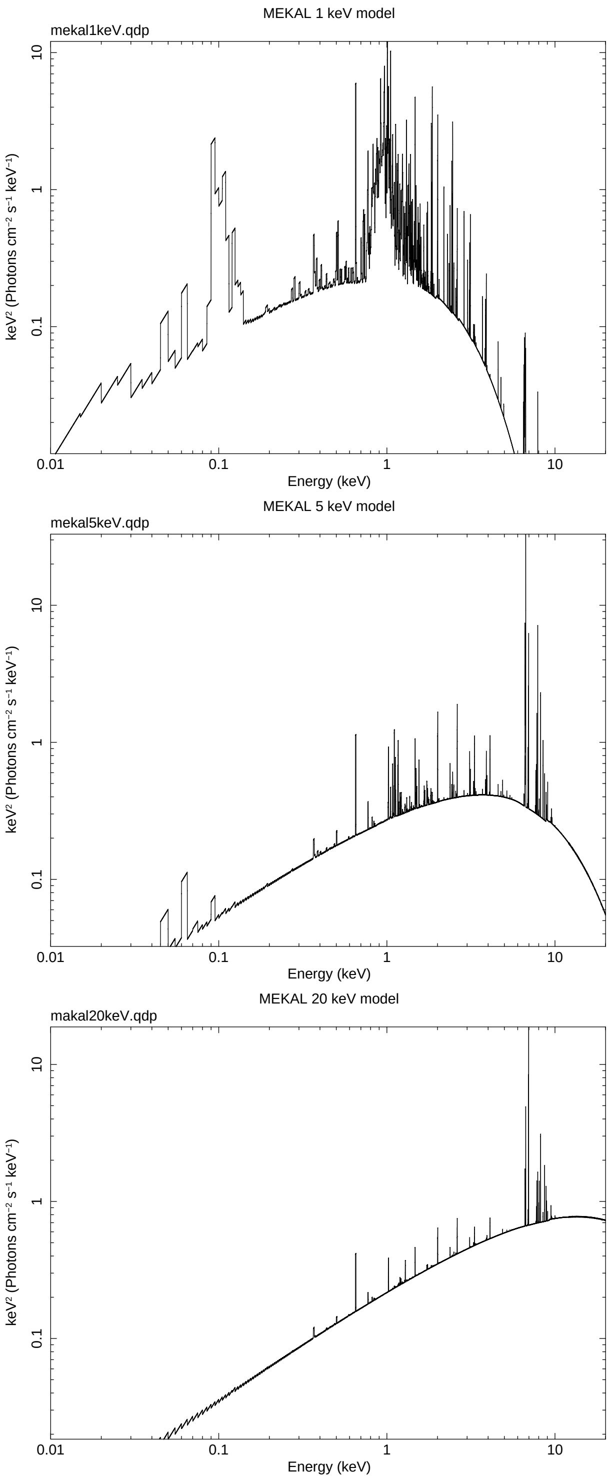


Figure 4.4: 標準的な熱プラズマモデル（mekal）で計算した、1 keV, 5 keV, 20 keV のプラズマからの放射スペクトル。温度が上がるにつれて連続成分のピークが高エネルギー側にずれるとともに、より重い元素の輝線が顕著になる。

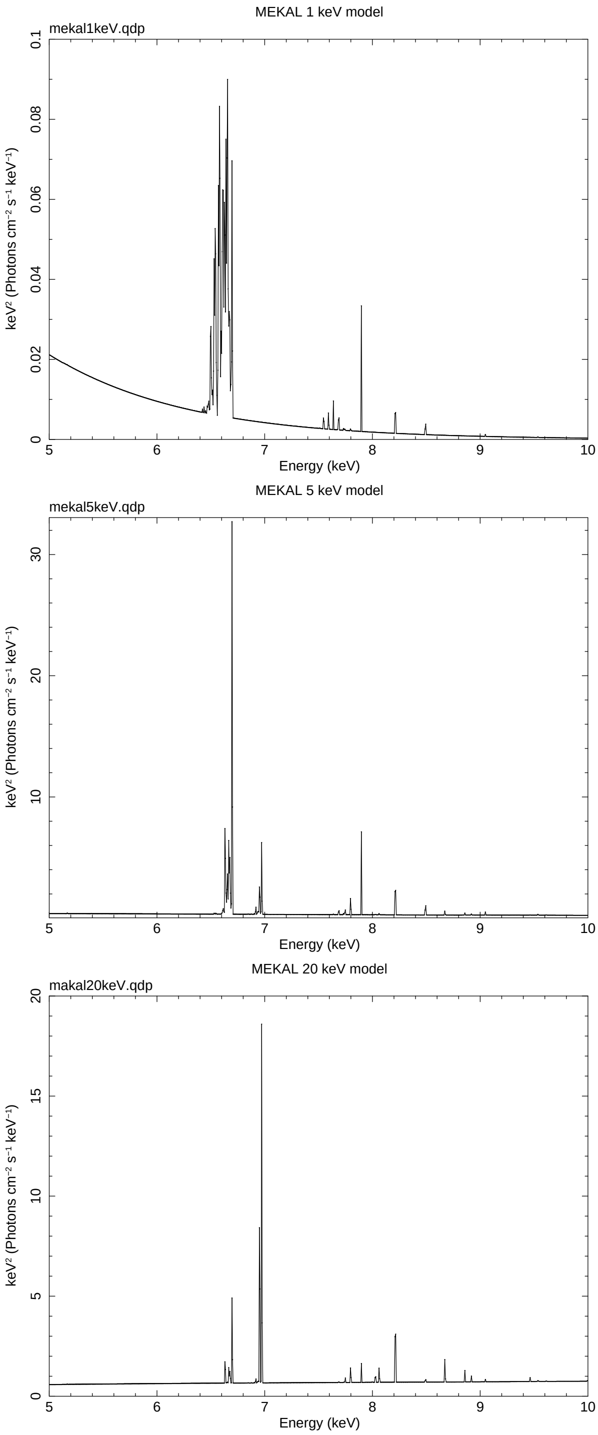


Figure 4.5: 前図の鉄ライン付近を拡大したもの。縦軸のスケールが違うことに注意。6.6 – 6.7 keV 付近に FeXXV（He-like）およびそれより電離度の低いイオンからの輝線、7.0 keV 付近に FeXXVI(H-like) の輝線が観測される。プラズマの温度が上がるにつれ、より電離が進んだ鉄からの輝線が観測される。

が、これら二つの過程は見ている座標系が異なるだけで基本的には同一の過程であり、「逆」の字を省くことも多い。

高温プラズマ中の電子 (温度 $\approx kTe$) が、低エネルギーの光子 (エネルギー $\approx E_{soft}$) を逆コンプトンで高エネルギー側に叩きあげる。$E_{soft} \ll E \ll kTe$ のエネルギー範囲のスペクトルは power-law になり (べきは電子温度と散乱の光学的厚みで決まる)、$E \gtrsim kTe$ では exponential で落ちる。ブラックホール連星の low state[7]、セイファート銀河の X 線スペクトルなどが thermal Comptonization だと考えられている。

4.3.2 熱的逆コンプトン放射 (thermal inverse Comptonization) のスペクトルの例

電子温度 kT_e、散乱に対する光学的厚み τ の熱的プラズマに、エネルギー $E_{input}(\ll kT_e)$ を持つ低エネルギー光子が入射してくる場合を考える。入射光子は逆コンプトン散乱により、電子からエネルギーを貰う。熱的プラズマがどれだけ効率良く逆コンプトン散乱を引き起こすかを表す「コンプトン y パラメーター」を以下のように定義する。

$$y = \frac{4kT_e}{mc^2}\ Max(\tau, \tau^2). \tag{4.33}$$

熱的逆コンプトン放射のスペクトルは、$E_{input} \ll E \ll kT_e$ の範囲ではべき関数で表され、$\sim kT_e$ 付近で折れ曲がりを持つ（図 4.6 左)。べきは y に依存し、y が大きいほど（逆コンプトンが有効であるほど）スペクトルはフラットになる。τ が十分大きいときには逆コンプトン効果は飽和（saturate）し、$3kT_e$ のあたりに Wien ピークが観測される。

熱的逆コンプトン放射は、銀河系内ブラックホール候補天体のスペクトルを説明する（図 4.6 右)。この状態はいわゆる"low state" に対応していて、降着円盤の内縁はブラックホールから遠くで切れていて、その内側に高温プラズマが存在すると考えられている。低温の黒体輻射をしている降着円盤から発生した低エネルギー光子が、高温プラズマによる熱的逆コンプトン効果を受けて、高エネルギー光子として放出される[8]。

4.4 相対論電子によるシンクロトロン放射と逆コンプトン散乱

高エネルギーの電子が存在するとき、シンクロトロン放射や逆コンプトン (Inverse Compton) 散乱による X 線、ガンマ線輻射が支配的になる。両者は異なった物理過程であるが、同じ電子分布から両者によって生じたスペクトルを同時に観測することもある。

わずかな磁場と非熱的な高エネルギー電子が存在するとき、電波から X 線まで広い範囲にわたってシンクロトロン放射が観測される。また、同じ高エネルギー電子が低エネルギー光子を逆コンプトン散乱で叩き上げることによる高エネルギースペクトルも観測される。Blazar[9]からの広い波長範囲にわたる放射は、高エネルギーまで加速された電子がシンクロ

[7]ブラックホール連星系は、high state, low state というはっきりと区別がつく二つのスペクトル状態 (bimodal states) を持つ。

[8]6.3.4 節で考えたように降着円盤の内縁が R_{ISCO} で決まるのは"high state" の場合である。両者は全く異なる性質を持つので、区別して考える必要がある。

[9]McGraw-Hill, Dictionary of Astronomy による定義: "A type of quasar whose light exhibits strong optical polarization and large variability." Oxford, Dictionary of Astronomy による定義: "A class of extragalactic, violently objects that includes BL Lacertae objects and optically violently variable (OVV) quasars, from which the name is contracted. They are thought to be the high-speed jet of plasma and radiaion from an active galactic nucleus viewed nearly end-on. The OVV quasars have broad emission lines in their spectra, but otherwise show all the characteristics of BL Lac objects."

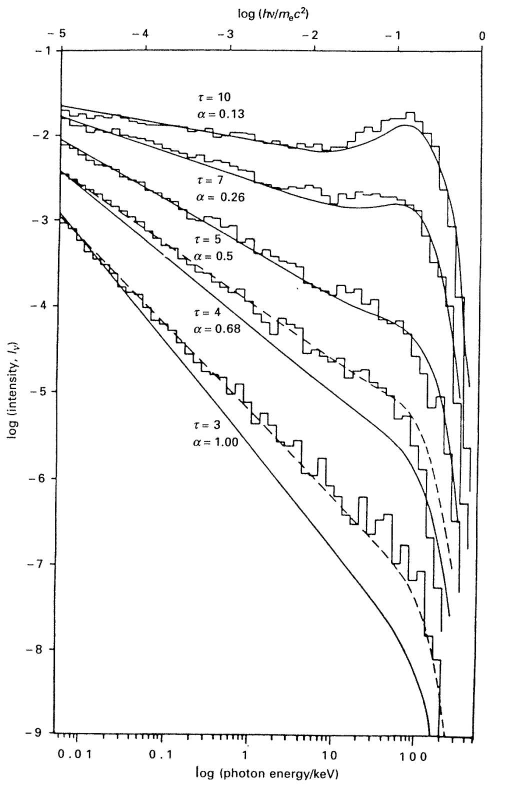


Figure 4.11. The Comptonisation of low frequency photons in a spherical plasma cloud having $kT_e = 25$ keV. The solid curves are analytic solutions of the Kompaneets equation (see Pozdnyakov *et al.* (1983)); the results of Monte Carlo simulations of the Compton scattering process are shown by the histograms and there is good agreement

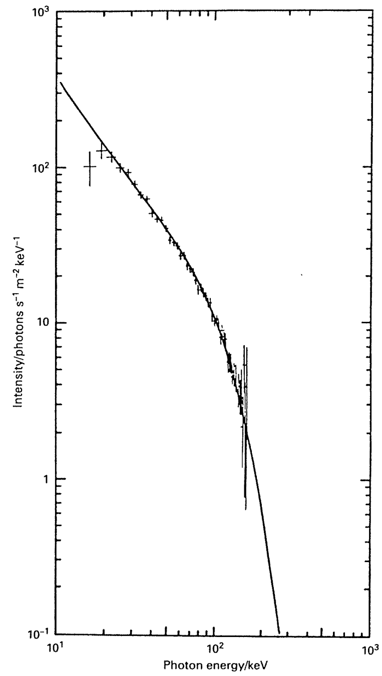


Figure 4.12. The hard X-ray spectrum of the Galactic X-ray source Cygnus X-1 observed in a balloon flight of the Max Planck Institute for Extraterrestrial Physics, on 20 September 1977 compared with the analytic solution of the Kompaneets equation with parameters $\tau_0 = 5$, $kT_e = 27$ keV. (R. A. Sunyaev and L. G. Titarchuk (1980). *Astron. Astrophys.*, **86**, 121.)

Figure 4.6: （左図）熱的逆コンプトン放射のモデルスペクトル。電子温度 $kT_e = 25$ keV のプラズマ（球対称を仮定）に低エネルギーの光子が入射してきたとき、電子散乱の光学的厚み $\tau = 3, 4, 5, 7, 10$ のそれぞれの場合について、放出されるスペクトルが示されている。（右図）ブラックホール候補天体 Cyg X-1 の X 線エネルギースペクトルを熱的逆コンプトン放射モデル（$\tau = 5$, kT_e=27 keV）でフィットした例。Longair, “High Energy Astrophysics” より。

トロン放射 (電波から X 線領域) すると共に、それによって生成された光子の一部を同じ電子が逆コンプトンで叩き上げる (ガンマ線領域)、“Synchrotron Self Compton (SSC) モデル” で説明されている。

超新星残骸のシェルでは衝撃波による電子加速が起きていて、そこからのシンクロトロン放射がシェルに沿って電波や X 線で観測されている。また、同じ電子が宇宙背景放射による光子を MeV $\approx$ TeV ガンマ線領域まで叩き上げるので、やはりシェルに沿ったガンマ線放射が観測されている。

4.4.1 シンクロトロン放射

11 頁で述べたように、磁場に垂直な方向に電子が円運動するときのサイクロトロン振動数 (Laromor frequency) は、

$$\nu_L = \frac{eB}{2\pi m_e c} \tag{4.34}$$

エネルギー $mc^2\gamma$ の電子がシンクロトロン放射で放出する光子の典型的な振動数は[10]、

$$\nu_c = \frac{3\gamma^2 eB\sin\alpha}{2\pi m_e c}. \tag{4.35}$$

α は磁場と電子の運動の向きのなす角度 (ピッチ角)。

厳密な計算によると、エネルギー $mc^2\gamma$ を持つ一つの電子からのシンクロトロン放射スペクトルのピークは、$0.29\nu_c$ である (図 4.7 上図)。このようなスペクトルを power-law 分布を持つ電子について積分すると、すでに（4.1）節で説明したように、やはり power-law の光子スペクトルが得られる (図 4.7 下図)。

一つの電子から単位時間あたりシンクロトロン放射で放出されるエネルギー [erg/s] は、

$$P_{synch} = \frac{4}{3}\sigma_T c\beta^2\gamma^2 U_B. \tag{4.36}$$

ここで、σ_T はトムソン散乱断面積、U_B は磁場のエネルギー密度[11]、$B^2/8\pi$。電子が拡がり σ_T を持って、光速で走っている磁場とぶつかりあっているようなイメージ。

4.4.2 電子エネルギー、磁場、シンクロトロン光子エネルギーの関係

具体的な磁場 B、電子エネルギー E_e について、シンクロトロン放射スペクトルのピークエネルギー E_p を求めてみよう。ここで、ボーア磁子 $\hbar e/2mc = 9.3 \times 10^{-21}$ erg/gauss, $\gamma \approx 2 \times 10^7 (E_e/10\ \mathrm{TeV})$ を用いる。

$$\begin{aligned}
E_p &= 0.29 \times h\nu_c \approx 0.29h\frac{3\gamma^2 eB}{2\pi mc} = 0.29 \times 6\gamma^2 B\frac{\hbar e}{2mc} \\
&= 1.7 \times \left(2\times 10^7 (E_e/10\ \mathrm{TeV})\right)^2 \left(\frac{B}{1\mathrm{mG}}\right) 1\mathrm{mG} \times 9.3 \times 10^{-21} [\mathrm{erg/gauss}] \\
&= 6.3 \times 10^{-9} \left(\frac{E_e}{10\ \mathrm{TeV}}\right)^2 \left(\frac{B}{1\mathrm{mG}}\right) [\mathrm{erg}]
\end{aligned}$$

[10] 教科書 (論文) によって定義が違う。Katz はこの定義と同じ。Shu, Rybicki & Lightman では、(4.35) の 1/2 を ν_c としている。

[11] B を Gauss で表わしたとき、$B^2/8\pi$ は [erg/cm^3] という単位になることを思いだそう。

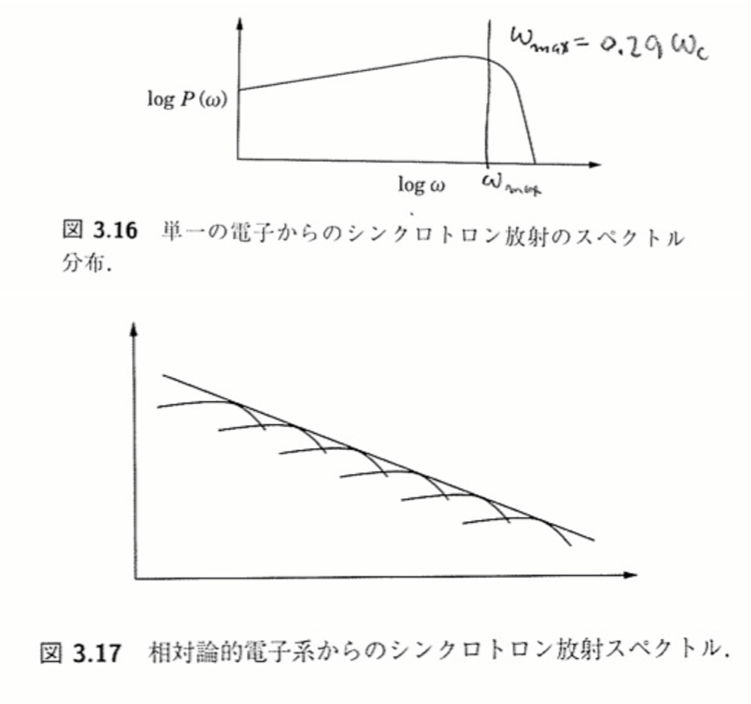


Figure 4.7: 単一の電子からのシンクロトロンスペクトル（ピークが $0.29\nu_c$ にくる）と、それを power-law の電子分布について積分したときに期待されるシンクロトロン放射スペクトル（power-law になる）の模式図。シリーズ現代の天文学、「天体物理学の基礎 II」より。

$$\approx 4\ \mathrm{keV} \left(\frac{E_e}{10\ \mathrm{TeV}}\right)^2 \left(\frac{B}{1\mathrm{mG}}\right). \tag{4.37}$$

これが、Koyama et al. (1995), Nature, 378, 255, "Evidence for shock acceleration of high-energy electrons in the supernova remnant SN1006" で引用されている式。

Koyama et al. (1995) は、ASCA 衛星を用いて、超新星残骸 SN1006 のシェル部分から、非熱的なエネルギースペクトル (=power-law で表され、輝線がない) を観測した。これをシンクロトロン放射と考え、典型的に超新星残骸中の磁場強度を 6–10 μG、X 線スペクトルは ~ 20 keV まで伸びていることから、電子エネルギーは 200 TeV 以上と見積った。それまで高エネルギーの宇宙線 (cosmic-ray) は超新星残骸中の衝撃波面で加速されているという説はあったが、それを直接検証することはできなかった。ASCA の SN1006 の観測が初めて、(間接的にではあるが) 超新星残骸中の粒子加速の証拠を示した。

4.4.3 "Equipartition" condition

シンクロトロン放射によって単位時間、単位体積から放出されるエネルギー S [erg/s/cm^3] は、電子密度を N_0 [cm^{-3}] とすると、式 (4.36) より、

$$S \propto N_0 \gamma^2 U_B.$$

一方、電子のエネルギー密度は $U_e \propto N_0\gamma$, 磁場のエネルギー密度は $U_B \approx B^2$ で、全エネルギー密度は、$U = U_e + U_B$。 特定の振動数に注目したとき、式 (4.35) より $\gamma \propto B^{-1/2}$ の関係がある。よって、

$$S \propto N_0 \gamma\gamma B^2 \propto N_0 \gamma B^{3/2} \propto U_e U_B^{3/4}.$$

全エネルギー密度 U は一定として、U_e と U_B にどういう割合でエネルギーを分配したら、シンクロトロン放射エネルギー S が最大になるかを考える。

$$S \propto (U - U_B) U_B^{3/4}$$

$$\frac{\partial S}{\partial U_B} \propto \frac{1}{4} U_B^{-1/4}(-7U_B + 3U) = 0.$$

よって、$U_B = \frac{3}{7}U$、$U_e = \frac{4}{7}U$ のときに、S が最大になることがわかる。これはおおざっぱに、$U_B \approx U_e$ と考えても良い。つまり、**磁場のエネルギー密度と電子のエネルギー密度がほぼ等しいとき、そこからのシンクロトロン放射のエネルギーは最大になる。**

あるいは逆に、**シンクロトロン放射が観測されたとき、そこでは磁場のエネルギー密度と電子のエネルギー密度がほぼ等しくなっている (equipartition) 可能性が高い。** 限られた観測量から天体のパラメーターを見積もるとき、equipartition の条件を仮定することが多い。

4.4.4 ローレンツ変換と相対論的な逆コンプトン散乱

実験室系での入射光子の振動数を ν、電子の静止系での入射光子の振動数を ν' とする。電子は速さ v を持ち、$\beta = v/c, \gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2}$。実験室系で、電子の進む方向と入射光子方向との間の角を θ とすると、ドップラー効果の公式より、

$$\nu' = \nu\gamma(1 - \beta\cos\theta). \tag{4.38}$$

電子の静止系で、$h\nu' \ll m_e c^2$ とすると、この系ではトムソン散乱と考えられて、振動数 (エネルギー) は散乱の前後で変化しないので、散乱後の振動数も ν'。電子の静止系で、電子の進む方向と散乱光子方向との間の角を θ' とすると、実験室系での散乱後の振動数 ν'' は、

$$\nu'' = \nu' \gamma (1 + \beta \cos\theta'). \tag{4.39}$$

θ も θ' も $\sim \pi/2$ 程度なので、結局上の二つの式から、

$$\nu'' \sim \gamma^2 \nu \tag{4.40}$$

となる。**相対論的電子による一回の逆コンプトン散乱で、入射光子のエネルギーは γ^2 倍になる。**

エネルギー $mc^2\gamma$ の一つの電子がコンプトン散乱によって単位時間に放出するエネルギーの割合 [erg/s]:

$$P_{compt} = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_{ph} \tag{4.41}$$

ここで、U_{ph} は光子のエネルギー密度。

(4.36) と (4.41) から、低エネルギー光子 (エネルギー密度 U_{ph})、磁場 (エネルギー密度 U_B)、高エネルギー電子が共存しているとき、その高エネルギー電子がシンクロトロン放射で放出するエネルギーと、低エネルギー光子を逆コンプトン散乱して放出するエネルギーの比は、

$$\frac{P_{synch}}{P_{compt}} = \frac{U_B}{U_{ph}}. \tag{4.42}$$

ここで、星間空間の典型的な磁場強度、$\sim 3\mu$Gauss を考えると、

$$U_B \approx (3 \times 10^{-6})^2/(8\pi) \sim 3.6 \times 10^{-13} \ \ [\mathrm{erg/cm^3}] \sim 0.22\ [\mathrm{eV/cm^3}]. \tag{4.43}$$

一方、宇宙背景黒体輻射を考えると (p.19 の脚注)、$U_{ph} \approx 0.26$ eV。つまり、**星間空間に高エネルギー電子が存在するとき、そのシンクロトロン放射によるエネルギー放射率と、宇宙背景黒体輻射の光子を逆コンプトンで叩き上げて出る逆コンプトン放射によるエネルギー放射率は、ほぼ等しい。**

4.4.5 超新星残骸 RXJ 1713.7–3946 のスペクトルモデル

超高エネルギーに加速された電子 ($\sim$100 TeV) によるシンクロトロン放射と逆コンプトン散乱を起こしていると考えられている天体の一つに、超新星残骸 RXJ 1713.7–3946 (Aharonian et al. A&A 2006, 449, 223 and references therein) がある[12]。超新星のシェル部分で加速された電子の出すシンクロトロン放射が X 線で観測され、その電子が背景の宇宙黒体輻射の光子を逆コンプトンで叩きあげ、TeV ガンマ線で観測される。X 線と TeV ガンマ線のイメージがよく相関していることから (下左図)、同じ電子が両方の輻射を担っていると考えられる。

上右図のスペクトルから、以下を読み取れる。

[12] TeV ガンマ線を宇宙背景放射の逆コンプトン散乱で説明するモデルの他に、陽子の π^0 崩壊による ($pp \rightarrow \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$) と考えるモデルもある。

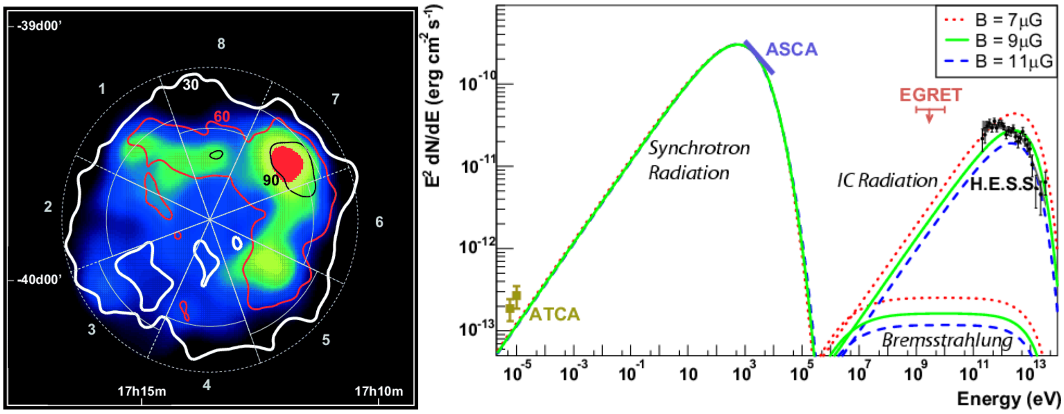


Figure 4.8: 左は ASCA のイメージ (1–5 keV) と HESS による TeV ガンマ線強度のコントア。北西のシェルに沿って X 線とガンマ線が光っているので、そのシェル中で電子加速が起きていると考えられている。右は、電波 (ATCA)、X 線 (ASCA)、ガンマ線 (HESS) のエネルギースペクトルとそれを説明するモデル。仮定した電子のエネルギー分布は、ベキが $p = 2$、exponential cut-off energy=100 TeV。縦軸の単位に注意 (いわゆる $\nu f(\nu)$ プロット、あるいは $EF(E)$ プロット)。

1. 電子の cut-off energy = 100 TeV なので、$mc^2\gamma \approx$100 TeV より、$\gamma \sim 2\times10^8$。一方、2.7 K の黒体輻射の単位周波数あたりの放射のピークエネルギーは、$\sim 2.8kT$ にくるから (式 3.8)、典型的な光子エネルギーは、$\sim 2.7\times2.8/11604 = 7\times10^{-4}$ eV。式 (4.40) にあるように、逆コンプトン散乱によって光子のエネルギーは γ^2 に叩き上げられるから、$7\times10^{-4}\times(2\times10^8)^2 \sim 30$ TeV となり、TeV 領域で観測されるガンマ線が逆コンプトン散乱で説明できる。

2. X 線のエネルギー：式 (4.37) に従い、100 TeV の電子が $\sim 10\mu$G の磁場中で放出するシンクロトロンスペクトルのピークは、~ 4 keV。よって、ASCA で観測した X 線領域 (1–10 keV) より下では power-law で、ASCA のバンドより上では急激に落ちるシンクロトロンエネルギースペクトルを理解できる。

3. 電子は (4.5) で表わされる power-law 分布、$\propto E^{-p}$ に従い、$p = 2$。(4.7) より、シンクロトロン放射と逆コンプトン散乱の「エネルギースペクトル」のベキは $(2-1)/2 = 0.5$ (縦軸を [erg/s/cm^2/keV] で表わしたとき、$\propto E^{-0.5}$)。ここでは縦軸にもう一つエネルギーを掛けて、$\nu f(\nu)$ プロット ([erg/s/cm^2]) で表わしているから、各成分のべきは $\propto E^{0.5}$ (右上がりの部分)。

4. いわゆる $\nu f(\nu)$ プロットの便利な点は、横軸 (エネルギー) を対数で表わしたとき、スペクトルをエネルギーの対数で積分したら、そのエネルギー範囲で放射されるエネルギーになること。実際、dN/dE を光子スペクトル [photons/s/cm^2/keV] とすると、$\nu f(\nu)$ は $E^2 dN/dE$ [keV/s/cm^2] と書けて、

$$\int E^2 \frac{dN}{dE} d(\log E) = 0.434 \int E^2 \frac{dN}{dE} d(\ln E) = 0.434 \int E\, dN \;[\mathrm{erg/s/cm^2}].$$

つまり上右図で、二つの「山」型の面積が、それぞれシンクロトロン輻射のエネルギー、逆コンプトン散乱 (IC Radiation) のエネルギーになる。その比は、(4.42) で与えられ、

そこで議論したように、星間磁場の強度、$B \sim 3\mu$Gauss ならばほぼ等しくなる。超新星残骸のシェル中では衝撃波により圧縮されて、磁場はそれよりも強くなる (強くなるほど、シンクロトロン成分と相対的に IC 成分が弱くなる)。ここでは磁場強度はスペクトルフィットのパラメーターで、観測されたシンクロトロン成分と IC 成分の比より、$B \sim 9\mu$G と見積もられる。

Chapter 5

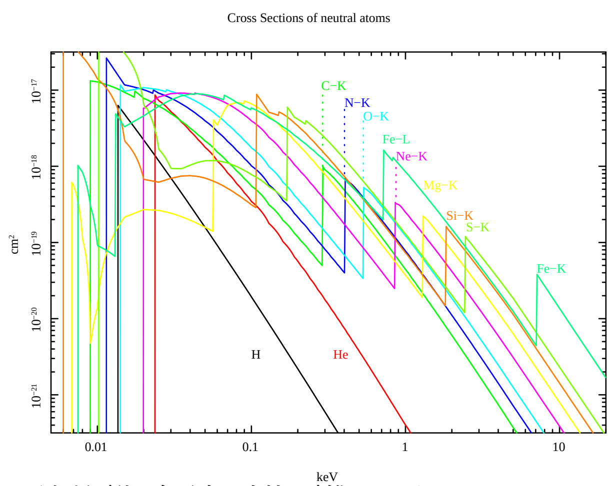
原子スペクトル線と吸収端構造

今までX線の連続スペクトル成分が発生するメカニズムを勉強してきた(黒体輻射、制動輻射、シンクトロン放射、逆コンプトン散乱)。黒体輻射はそれを放出する物質には依らないし、制動輻射、シンクトロン放射、逆コンプトン散乱は自由電子からの放射なので、原子の構造は問題にならなかった。

実際のX線天体からは、連続スペクトル成分に加え、プラズマ中の元素分布を反映して、X線放射領域やその周辺からの輝線、吸収線、吸収端や反射成分が観測される。また、X線天体と我々の間の星間物質による影響もスペクトルに現われる。これらのスペクトル成分は、X線放射源とその周辺、および星間物質の物理環境を探るための、非常に重要な情報を持っている。X線連続成分と共に、吸収端や輝線、吸収線のパラメーターを測定し、X線放射の起源とX線天体の物理状態を探るのがX線スペクトル解析の目的である。

5.1 光電吸収 (photoelectric absorption)

5.1.1 光電吸収の断面積



主要な元素の光電吸収による吸収断面積。各元素は中性(電離していない)。NASA/GSFCが提供しているheasoftパッケージに含まれている、$HEADAS/../ftools/spectral/xspec/manager/mansig.datから断面積の値を取ってきてプロットした。

X線吸収に効くのは、主にC、N、O、Ne、Si、S、FeのK、L、M殻電子による光電吸

収 (photoelectric absorption) である。X 線領域では H、He の断面積は非常に小さいので、その影響はほとんど無視できる。また、ここで示した以外の元素は宇宙には少ないので、それによる吸収も通常は考えなくて良い。上図にこれらの元素の光電吸収の断面積を示す。断面積は各殻に対応する束縛エネルギー (エッジエネルギー) で急に上がり、**その高エネルギー側では E^{-3} に比例して減少していく**。

通常 X 線分光観測が可能なのは、$\sim$ 0.2 keV から $\sim$10 keV のエネルギー範囲で、C-K 吸収端 (エッジ) から Fe-K エッジまでがカバーされる。中性の鉄を例にとると、L_{II} エッジ (0.708 keV) 以下のエネルギーを持つ X 線は M 殻電子によって吸収される。それ以上、K エッジ (7.11 keV) 以下の X 線は L 殻電子によって吸収される。K エッジ以上のエネルギーの X 線は K 殻電子によって吸収される。

5.1.2 Hydrogen-like イオンの光電吸収断面積

10 頁で述べたように、hydrogenic-ion のときは水素の場合と同じく単純な議論から、エッジのエネルギーが、

$$E_{edge} = \frac{m_e e^4 Z^2}{2\hbar^2} \tag{5.1}$$

となることを導ける。水素原子 $Z = 1$ に対してエッジのエネルギーは 13.6 eV なので、hydrogen-like Fe XXVI のエッジエネルギーは、13.6 eV $\times 26^2 \approx 9.2$ keV である。同様に光電吸収 (bound-free transition) に対する断面積も、hydrogenic-ion の場合は比較的簡単に計算できる。導出は Rybicki and Lightman 等の教科書に譲るが、

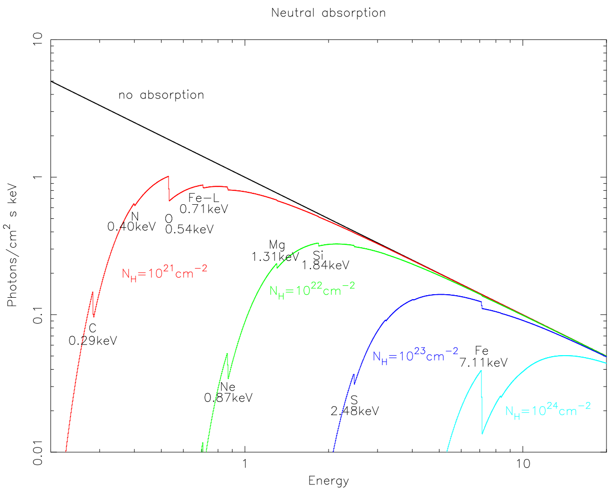
$$\sigma_{bf}(E) = \left(\frac{64\pi g}{3\sqrt{3}Z^2}\right) \alpha\, a_0^2 \left(\frac{E_{edge}}{E}\right)^3 \tag{5.2}$$

となる。ここで α は微細構造定数 $e^2/\hbar c = 1/137$, a_0 はボーア半径、$\hbar^2/m_e e^2 \approx 0.5 \mathring{A}$ である。g は bound-free ガウントファクターでオーダー ~ 1 の量。$g = 1$ として数値を入れると、水素に対しては 7×10^{-18} cm^2、Fe XXVI に対しては、その $1/(26 \times 26)$ で、10^{-20} cm^2 となる。(水素について前出の図中の断面積の値との一致を確認せよ。)

5.1.3 中性の物質による光電吸収

通常、星間物質の厚みは対応する水素柱密度で表わすが、各重元素による光電吸収断面積を宇宙組成 (cosmic abundance) で重みをつけて足し合わせたものが、星間物質の吸収断面積になる。「宇宙組成」は文献によって異なるので、星間吸収モデルを使ってデータ解析を行ったときは、採用した星間吸収モデルあるいは宇宙組成の出典を明記すべきである[1]。

[1]標準的に使われている”xspec” パッケージでは複数の宇宙組成モデルから選択できるようになっている。



Power-law のスペクトル (photon-index=1) が中性の物質によって吸収を受けたときのエネルギースペクトル。水素柱密度 (hydrogen column-density) が $N_H = 10^{21}, 10^{22}, 10^{23}, 10^{24}$ cm^{-2} のそれぞれについてプロットした。星間吸収モデルは、“wabs” を使った (Morrison and McCammon 1983, ApJ, 270, 119)。

上図に、power-law で表わされる光子数スペクトルが星間吸収を受ける様子を示した。典型的に星間空間における水素原子の密度は $\sim$1 H/cm^3 だから、距離 1 kpc における水素柱密度は $N_H \approx 3 \times 10^{21}$cm^{-2} となり、その吸収の顕著な効果が $\lesssim 1$ keV で観測される。N_H が大きくなるにつれ吸収が強くなるが、$\sim$10 keV の X 線は $N_H \sim 10^{24}$ cm^{-2} の厚みも透過することがわかる。実際、$\sim$10 keV 以下では吸収されてほとんど見えないが、それ以上のエネルギーでは明るく観測される天体として、厚いシェルに覆われた中性子星や、NGC 4945 に代表される厚いトーラスに隠された Seyfert2 銀河がある[2]。

水素柱密度と吸収の光学的厚みの関係を鉄の K エッジを例にとって見てみよう。前ページの吸収断面積の図で、中性の鉄の K エッジ (7.11 keV) のすぐ下のエネルギーにおける断面積は 0.5×10^{-20} cm^2、すぐ上のエネルギーでは 4×10^{-20} cm^2、つまり K エッジによる断面積の増加は 3.5×10^{-20} cm^2 である。鉄の abundance (ここでは水素に対する個数比) は文献によって $(3 \approx 5) \times 10^{-5}$ であるが、Morrison and McCammon 1983 では 3.3×10^{-5} を使っている。よって、$N_H = 10^{24}$ cm^{-2} に対する鉄の K エッジの光学的厚みは、

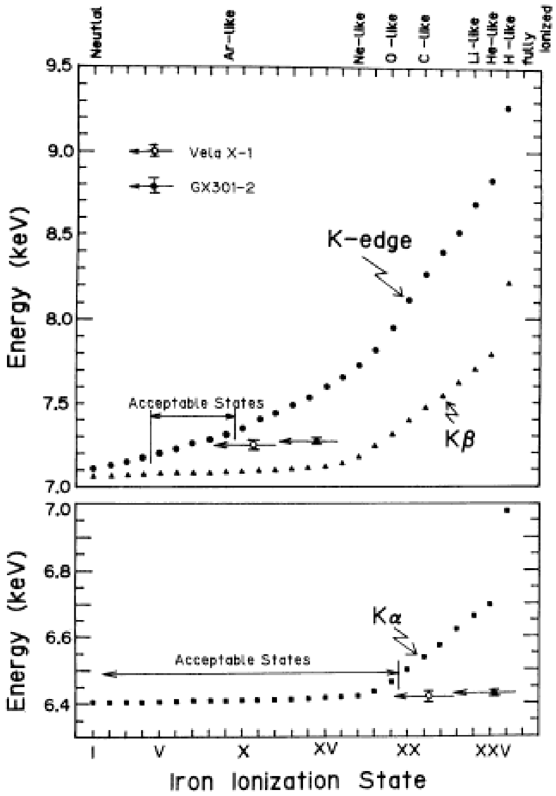
$$10^{24}[\mathrm{cm}^{-2}] \times (3.3 \times 10^{-5}) \times (3.5 \times 10^{-20}[\mathrm{cm}^2]) \approx 1.2 \tag{5.3}$$

となる。実際、上図で、$N_H = 10^{24}$ cm^{-2} のとき、鉄の K エッジの下と上で光子数が $e^{-1.2} \approx 0.3$ 倍に減少していることがわかる。

5.2 電離の効果

原子が電離するにつれて、相対的に原子核のクーロン力が強く効くようになり、内殻電子は強く原子核に束縛されるので、内殻電子の電離に必要なエネルギー (エッジのエネルギー) が上がっていく。

[2] $\gtrsim$10 keV で撮像観測ができる INTEGRAL 衛星が 2002 年に打ちあげられて後、このような中性子星や Seyfert 銀河が数多く見つかった。http://isdc.unige.ch/~rodrigue/html/igrsources.html を参照。



鉄の各電離状態における K_α 線、K_β 線、K エッジのエネルギー。Nagase 1989, PASJ, 41, 1 より。

例として、上図に鉄の場合を示す。K エッジのエネルギーは、中性の場合 (Fe I) の 7.11 keV から、He-like の場合の 8.8 keV (Fe XXV), H-like の場合 (Fe XXVI) の 9.3 keV まで上がっていく。これらのエッジエネルギーはスペクトルの形から直接測定可能なので、それによって吸収物質の電離状態を知ることができる。

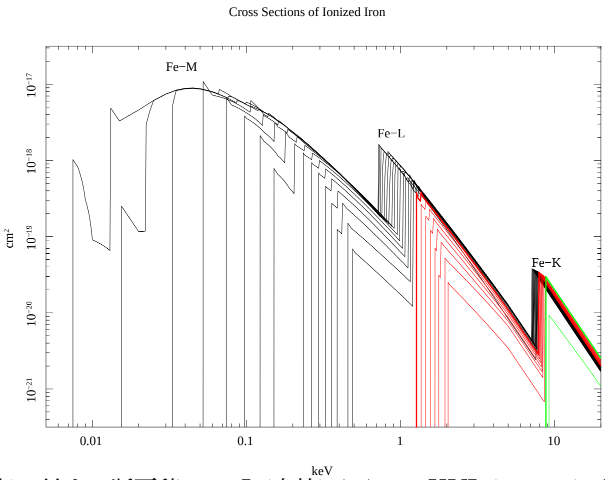
同様に、K 殻の空孔に L 殻から電子が落ちるときに発生する K_α 線、M 殻から落ちるときの K_β 線のエネルギーも電離と共に上昇していくので、電離度を測る良い指標になる。ただし、K エッジのエネルギーが電離の開始すると共に直ちに上昇していくのに対して、K_α 線のエネルギーは Fe I から Fe XVIII まで、$\sim$6.4 keV でほぼ一定である。He-like (Fe XXV) だと 6.7 keV (3 本に縮退している)、H-like (Fe XXVI) だと 7.0 keV になる。

5.2.1 電離した物質 (warm absorber) による光電吸収

元素の電離が進むにつれ、エッジのエネルギーが上がっていき、それ以下の光に対する吸収断面積が下がり、物質は透明になっていく。特に、ある殻の電子がすべて電離によってなくなってしまうと、その殻による光電吸収は存在しなくなる。下の図で、鉄が Fe XVII (Ne-like; L 殻が詰まった状態) まで電離すると M 殻の電子は存在しないので、Fe XVII の L エッジ、$\sim$ 1.3 keV 以下の光子は吸収されない。同様に、Fe XXV (He-like; K 殻が詰まった状態) では L 殻電子が存在しないので、その K エッジ、$\sim$ 8.8 keV 以下の光子は吸収されない。

実際に光電離したプラズマによる吸収では、すべての元素の様々な電離状態の重ね合わせになるので、たくさんの吸収端が重なった複雑な吸収スペクトルが観測される。また電離が進んで上の殻 (L 殻に対する M 殻、K 殻に対する L 殻) が空になると、電子が X 線を吸収して上の殻に上げられることによる (L$\rightarrow$M または K$\rightarrow$L)、吸収線も観測されるようになる

(5.3 節参照)。



電離した鉄の光電吸収に対する断面積。Fe I (中性) から Fe XVI (Na-like) までは黒、Fe XVII (Ne-like) から Fe XXIV (Li-like) までは赤、Fe XXV (He-like) と Fe XXVI (H-like) は緑で示した。安定な Fe XVII (Ne-like) と Fe XXV (He-like) については太い線で示した。先の中性元素の断面積の図と同じく$HEADAS/../ftools/spectral/xspec/manager/mansig.dat から断面積の値を取ってきてプロットした。Fe XXVI について、断面積の値が 5.1.2 節で求めた値 ($10^{-20}\mathrm{cm}^2$) と一致することを確認せよ。

5.3 光電離 (photoionization)

物質が光に照射されたとき、各原子が光電吸収を起すので、物質は光電離 (photoionization) される。光電離の強さは、入射スペクトルのフラックスに比例し、(ガスの密度が高いほどイオンと電子が再結合しやすいため) ガス密度に反比例する。光度 L の X 線天体を一様に取り囲むガス (密度 n) を考える[3]。その天体からの距離を r として、

$$\xi \equiv \frac{L}{n\,r^2} \tag{5.4}$$

を電離パラメーター (ionization parameter) と呼ぶ。ξ の大きさが、光電離の強さを表す良い指標になる。通常、CGS 単位を用いて、ξ を [erg·cm/s] という単位で表す。

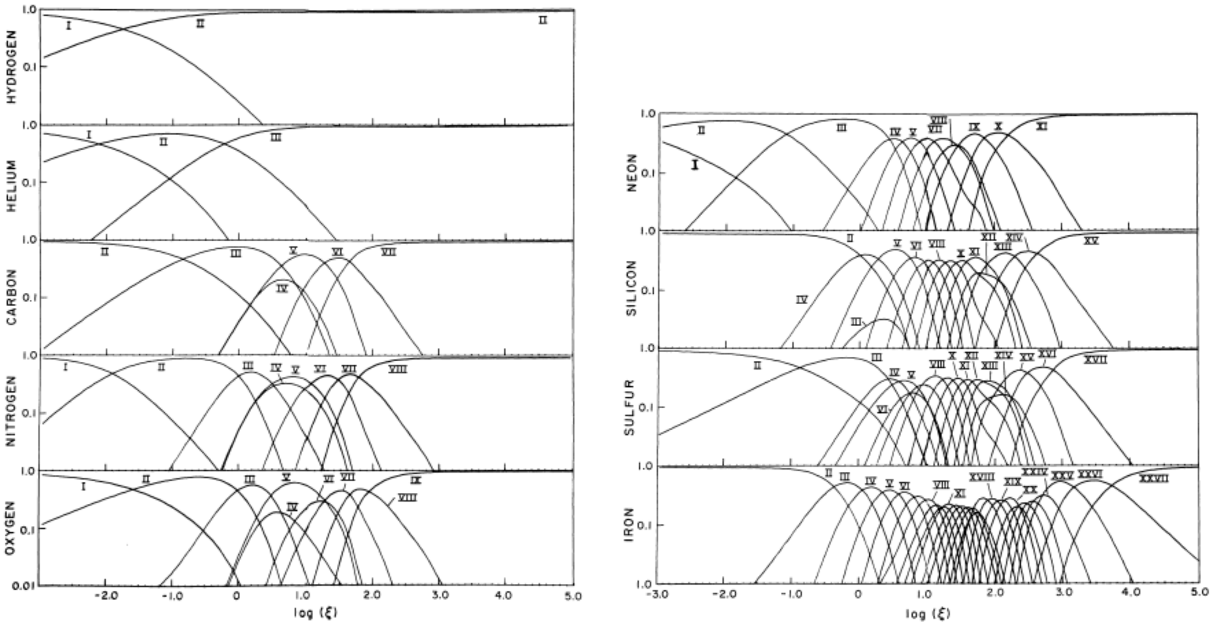
光電離している物質の電離状態は、電離の割合 ($\propto$ エッジより上の X 線フラックス $\times$ 断面積) と再結合の割合 (密度と温度の関数) のバランスを数値的に解くことによって得られる。それには膨大な原子データベースと複雑な計算が必要になるわけだが、最近は XSTAR, CLOUDY などのコードが公開されており、それを使って観測データとモデルを直接比較することが可能になってきた。特に XSTAR は NASA/GSFC の汎用パッケージ HEADAS に含まれているため、X 線データ解析によく使われている[4]。

光電離の状態は厳密には物理的配置や入射スペクトルに依存するが、一次近似として ξ の関数と思ってよい。下図に、光度 $L = 10^{37}$ erg/s で 10 keV の熱制動輻射スペクトルを持つ天体を密度 $n = 1\ \mathrm{cm}^{-3}$ のガスがとりかこんでいるときの、動径 (r) 方向の各元素の電離状態分布を電離パラメーター $\xi = L/nr^2$ の関数として示す。少々異った配置、エネルギースペクトルでも、同じ ξ ならほぼ同じ電離状態にあると考えてよい。特に、鉄イオンに関して

[3] n は、電子、陽子、イオンすべてを含んだ粒子密度。完全電離した宇宙組成のプラズマの場合、n は陽子密度の約 2.3 倍になる。

[4] http://heasarc.gsfc.nasa.gov/xstar/xstar.html

$\xi \gtrsim 1000$ になると Fe XXV (He-like) まで電離が進み、$\xi \gtrsim 10000$ になると電子がすべて剥ぎとられた鉄の原子核 (Fe XXVII) が現われることを覚えておくと良い。



光電離に関する古典的なリファレンス、Kallman and McCray 1982, ApJS 50, 263 より。(この論文の延長上に XSTAR がある。)

光電離の原理を理解するために、簡単な例として、強い照射を受けたプラズマ中の H-like の鉄 (Fe XXVI; 25 階電離) と裸の鉄 (Fe XXVII; 26 階電離) の比を ξ の関数として半定量的に見積もってみよう。一般的に、z 階電離したイオン (密度 n_z) が "エネルギー" スペクトル $f(E)$ [erg/s/cm^2/keV] の輻射を受けて $z+1$ 階に光電離する割合と、$z+1$ 階電離のイオン (密度 n_{z+1}) が電子 (密度 n_e) と再結合して z 階電離に戻る割合のバランスは、

$$n_z \int_{E_z}^{\infty} \sigma_z(E) \frac{f(E)}{E} dE = n_{z+1}\, n_e\, \alpha_{z+1}(T) \tag{5.5}$$

と書ける。ここで E_z は z 階電離イオンのエッジエネルギー、$\sigma_z(E)$ は吸収断面積。$\alpha_{z+1}(T)$ は再結合の割合 (recombination rate; 温度 T の関数) で、[cm^3 s^{-1}] という単位を持つ。上式の両辺が、[cm^{-3} s^{-1}] という単位を持つことに注意 (単位時間、単位体積あたりの電離または再結合するイオンの数)。H-like の鉄の K エッジのエネルギーは E_{25}=9.1 keV、光電吸収の断面積は、(5.2) 式より

$$\sigma_{25}(E) = 10^{-20} \left(\frac{9.1\ \mathrm{keV}}{E}\right)^3 [\mathrm{cm}^2] \tag{5.6}$$

である。再結合係数は、いろいろな文献に計算値または測定値が載っている。ここでは Shull and Steenberg 1982, ApJS 48, 95 を使い、裸の鉄の再結合率は、

$$\alpha_{26}(T) = 2.76 \times 10^{-10} \left(\frac{T}{10^4\ [\mathrm{K}]}\right)^{-0.73} [\mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1}]. \tag{5.7}$$

光電離の割合はエネルギースペクトルによるが、ここでは $f(E) = A(E/1\mathrm{keV})^{-1}$ [erg/s/cm^2/keV] としよう。すると (5.5) 式の左辺の積分は、

$$\int_{E=9.1\ \mathrm{keV}}^{\infty} 10^{-20} \left(\frac{9.1\ \mathrm{keV}}{E}\right)^3 A \left(\frac{1\mathrm{keV}}{E}\right) \frac{dE}{E}$$

$$= 10^{-20}\frac{A}{9.1\text{ keV}}\int_{E=9.1\text{ keV}}^{\infty}\left(\frac{9.1\text{ keV}}{E}\right)^5 d\left(\frac{E}{9.1\text{ keV}}\right)$$

$$= 10^{-20}\frac{A}{9.1\text{ keV}}\int_{x=1}^{\infty} x^{-5}dx$$

$$= \frac{10^{-20}}{4}\frac{A}{9.1}[\text{erg/s/keV}].$$

$$= \frac{10^{-20}}{4}\frac{A}{9.1\times 1.6\times 10^{-9}}[1/\text{s}].$$

$$= 1.7\times 10^{-13}A[1/\text{s}]. \tag{5.8}$$

一方、E_{min} から E_{max} まで積分したときの光度を L とすると、

$$L = 4\pi r^2\int_{E_{min}}^{E_{max}} f(E)dE = 4\pi r^2 A\ \ln\left(\frac{E_{max}}{E_{min}}\right).$$

たとえば典型的な X 線の範囲、$E_{min} = 0.05$ keV、$E_{max} = 50$ keV を考えると、$E_{max}/E_{min} = 10^3$ だから、

$$L \approx 7\cdot 4\pi r^2 A\ [\text{erg/s}]. \tag{5.9}$$

以上を使って、(5.5) 式を $z = 25$ の場合について書き直すと、

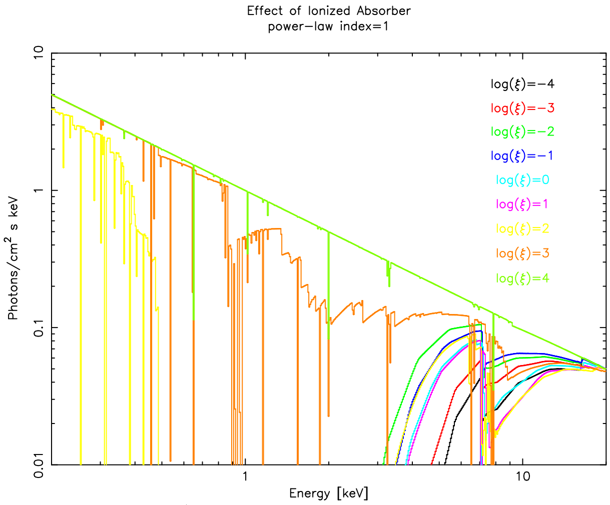
$$n_{25}\cdot 1.7\times 10^{-13}\ \frac{L}{7\cdot 4\pi r^2} = n_{26}\ n_e\cdot 2.76\times 10^{-10}\ \left(\frac{T}{10^4\ [\text{K}]}\right)^{-0.73}.$$

ここで、ガスの粒子密度 $n \approx 2n_e$ を使う。また、厳密には温度も self-consistent に解く必要があるが、$\xi = L/nr^2 = 10^3 \approx 10^4$ のとき、$T \approx 10^6$ K ($\sim$ 100 eV) まで加熱されることがわかっているので、その温度で規格化する。以上より、

$$\frac{n_{25}}{n_{26}} \approx \frac{2500}{\xi}\left(\frac{T}{100\ \ \text{eV}}\right)^{-0.73} \tag{5.10}$$

となり、ξ が $10^3 \approx 10^4$ のときに H-like の鉄 (Fe XXVI) と裸の鉄の数 (Fe XXVII) がほぼ等しくなることが導ける。

XSTAR を使って、光電離した物質による吸収を計算することができる。以下の例 (`warmabs*power` モデル) では、photon-index=1 の power-law スペクトルが、$N_H = 10^{24}$ cm^{-2} の水素柱密度、$\xi = 10^{-4}$, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10, 10^2,10^3, 10^4 のそれぞれの値を持つ光電離プラズマによって吸収を受けたときのスペクトルを示す。



以下の特徴に注目しよう。(1) 電離が進むにつれて外殻が空になるので、低エネルギー側で物質は透明になっていく。 特に、$\xi \gtrsim 10^3$ になると、He-like の鉄 (L 殻が空) が多くなり、それは K-edge (8.8 keV) 以下の光を吸収しないので、低エネルギー側のスペクトルは顕著に上がってくる。(2)L 殻が空になったとき、K 殻に電子が一つ (H-like)、あるいは二つ (He-like) 残った基底状態から、イオンが励起されて電子が L 殻に遷移する際に「共鳴吸収線 (resonance absorption line)」が生じる。 (3) $\xi \gtrsim 10^4$ になると、鉄の電子もほぼ完全に剥ぎとられ、プラズマは完全電離に近くなる。吸収エッジは観測されず、スペクトルは元の入射スペクトルに近くなる。

5.4 輝線と吸収線

5.4.1 等価幅 (equivalent width)

輝線の強度を表わす際、輝線中に含まれる光子数 N (photons/s/cm^2) を使う場合と、連続成分に対する「等価幅」を使う場合がある。輝線の下の連続成分の強度を C (photons/s/cm^2/keV) とすると、等価幅は

$$E.W. \equiv \frac{N[\mathrm{photons/s/cm^2}]}{C[\mathrm{photons/s/cm^2/keV}]} = 1000\frac{N}{C}\ [\mathrm{eV}].$$

X 線天文学では等価幅の単位として eV を使うことが多い。同様に、吸収線の強さも、吸収によって失なわれた光子数を連続成分で割った等価幅で表すことが多い。

5.4.2 再結合線

光電離または熱電離したプラズマ中で、自由電子が再びイオンと結合するとき、イオンの高いエネルギー準位にとらえられる確率が高い。このようにイオンと電子が再結合して、さらに下の準位に落ちるときに出る電磁波を再結合線と呼んでいる。

再結合線が起きるには、衝突による電子状態の遷移がひんぱんでないこと、すなわち、密度が低いことが必要。光学的に薄い光電離プラズマまたは熱プラズマから再結合線が観測される。

光電離プラズマと熱プラズマでは、電離のメカニズムが違うので (後者では主に原子、電子の衝突で電離が起きる)、そこから放射される輝線スペクトルも異なる。輝線スペクトルを分析することにより、光電離プラズマか熱プラズマの区別をつけることができる。

5.4.3 蛍光輝線

一方、外殻が埋まっている原子の内殻に空孔ができたとき、そこに外殻から電子が落ちてくる際に放出されるのが蛍光輝線 (fluorescence line) である。

たとえば、中性の鉄 (Fe I) が K エッジエネルギー (7.11 keV) 以上の X 線を光電吸収したとき、K 殻に穴があく。そのとき L 殻から電子が落ちてくると 6.4 keV の蛍光 X 線を放出する。

K 殻に穴が空いて励起状態にある原子が、いつも蛍光輝線を放出するわけではなく、オージェ電子を放出して基底状態に戻る場合もある。蛍光輝線を放出する確率を蛍光収量 (fluorescent yield) と呼ぶ。中性の鉄の場合、その値は 0.34 である。電離していない、高密度の物質からも蛍光輝線が発生することに注意。すなわち、一般的に再結合線と蛍光輝線の発生領域は異なる。

Chapter 6

ブラックホール天体のX線観測

6.1　ブラックホールとは？

通常の星 (主系列星) は、核融合反応による圧力で形を保っていて、その半径はシュワルツシルド半径よりもはるかに大きい。巨大な星が進化するにつれて核融合反応が進み、星の芯には鉄のコアができる。星が超新星爆発を起こした後に、圧縮されたコアが残される。そのコアが太陽質量の約3倍以下であれば、それは**中性子星**になる。中性子星は中性子間の核力により形を保っている。もしそのコアが太陽質量の約3倍以上であるばあいは、中性子間の核力でもその重さを支えられなくなり、**重力崩壊**を起こしてブラックホールになる。回転していないブラックホールの半径 (のようなもの) が、シュワルツシルド半径と考えてよい。

実際、そのようなブラックホール天体が、数多く観測されている。ブラックホールまたは中性子星が通常の星と**連星系**を成しているとき、通常の星からブラックホールまたは中性性にモノが回転しながら落ちていくときに円盤を作る。これを**降着円盤**と呼ぶ。降着円盤のなかの摩擦により、その温度は数千万度になり、それが**黒体輻射**によってX線を放出する。このようにして、中性子星はブラックホールは、明るいX線源として観測される。

では、中性子星とブラックホールはどのようにして見分けるのだろうか？X線の性質から、中心天体が中性子星かブラックホールか推測はできるのだが[1]、天体の質量を求めるのが最も確実な方法である。連星系において、中性子星またはブラックホールと対をなしている**伴星**のスペクトル線の**ドップラー効果**からその運動がわかり、中性子星またはブラックホールの及ぼす重力を測定できる。それからその天体の質量に制限がつけられるのである。それが太陽質量の約3倍以上であれば、ブラックホールである。

もう一種類、太陽の数百万倍以上の質量を持つブラックホールも存在する。それらは多くの銀河の中心に存在する。やはり、そのまわりの星や円盤の運動を観測することによって、中心天体の重力がわかり、そこから質量が計算できる。我々の銀河の中心にあるブラックホールの質量は、370万太陽質量である[2]。

6.1.1　脱出速度

ニュートン力学で考えると、質量 M、半径 r の天体の**脱出速度** v_{escape} は以下の式から決まる。

$$\frac{1}{2}v_{escape}^2 = \frac{GM}{r} \tag{6.1}$$

[1] これは私の大学院時代からの研究テーマの一つです。

[2] http://www.mpe.mpg.de/ir/GC/res_dance.php などを参考に。

脱出速度は、星の質量が大きいほど，半径が小さいほど大きくなる。上式より、r が無限に小さくなると v_{escape} は無限に大きくなるが、それが光速を超える事はあり得ない。だから、ブラックホールは、その脱出速度が光速であるほど重くて小さい天体、あるいは、同じ事であるが、無限遠方からモノを落としたとき、落下速度が光速になるほど重くて小さい天体、と考えてもよい。実際、(6.1) より脱出速度が光速 c となる半径は、

$$r = \frac{2GM}{c^2} \tag{6.2}$$

となり、これは質量 M の天体のシュワルツシルド半径に一致する[3]。

6.1.2 ブラックホールのパラメーター

- 最小質量 $\approx$ 中性子星の最大限界質量 $\approx 3M_{\odot}$
- 測定されている最大の stellar black hole の質量 $=$ 15.7 $M_{\odot}$ (M33 X-7)[4]。その次は $\sim 14M_{\odot}$ (GRS1915+105)
- 我々の銀河中心のブラックホールの質量:$(3.7 \pm 0.2) \times 10^6 [R_0/(8 \text{ kpc})]^3 M_{\odot}$ (Ghez et al. 2005, ApJ, 620, 744)
- 星の進化の最終段階でできるブラックホール (stellar blackhole) の質量の上限: $\sim 40M_{\odot}$? (Fryer 1999, 522, 413) まだよくわかっていない。
- "Stellar blackhole" ($\sim 10M_{\odot}$) と銀河中心の"supermassive blackhole" ($\gtrsim 10^6 M_{\odot}$) の中間の質量を持つ「中質量ブラックホール (Intermediate-mass blackhole)」($100 - 1000$ $M_{\odot}$) は存在するだろうか？
  $\longrightarrow$ Ultra-luminous X-ray Sources (ULXs) と関連して、2011 年現在、未だ解決していない問題。

6.1.3 ブラックホールの変動の時間スケール

シュバルツシルト半径を光が横切るのに要する時間

$$\Delta t \approx \frac{2GM/c^2}{c} = \frac{2GM_{\odot}/c^2}{c}\frac{M}{M_{\odot}} \approx \frac{3 \text{ km}}{3 \times 10^5 \text{km/s}}\frac{M}{M_{\odot}} \approx 10\mu\text{sec}\frac{M}{M_{\odot}}.$$

RXTE 衛星は最大 μsec のオーダーの時間分解能の観測が可能。実際、多くのブラックホールや中性子星から、RXTE 衛星は数百 Hz の準周期変動 (Quasi Periodic Oscillation; QPO) を観測している。しかし、シュバルツシルト半径のあたりからやってくる X 線スペクトルの時間変動を詳細に調べるには、長い観測を行って光子をためる必要がある。そのためには、$\sim 10M_{\odot}$ の stellar blackhole よりも $\gtrsim 10^6 M_{\odot}$ の supermassive blackhole のほうが適している。たとえば、$\sim 10^8 M_{\odot}$ のブラックホール質量を持つ明るい AGN のエネルギースペクトル変化を ~ 100 秒ごとに調べれば (それは XMM 衛星の能力で可能)、ブラックホールを取りかこむ降着円盤の動きを追うことができる。

[3] この導出は一般相対論を使っていないので、厳密ではないことに注意。

[4] `http://chandra.harvard.edu/photo/2007/m33x7/`

6.1.4 ブラックホールの「密度」

仮にブラックホールをシュバルツシルト半径 R_s を持つ古典的な球と思って、その密度 ρ を質量/球の体積で定義しよう。

$$\rho = \frac{M}{4\pi R_s^3/3} \approx 2\times 10^{16}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}\ \mathrm{g/cm^3}.$$

普通の物質の質量は半径の 3 乗に比例するが、質量が半径に比例するというのがブラックホールの特徴。よって、"密度" は半径 (質量) の 2 乗に反比例する。$\gtrsim 10^8 M_\odot$ のブラックホールの密度は水の密度よりも小さくなる! 「ブラックホールは高密度」というわけではない。

ブラックホールの「密度」は物理的な実体ではないが、このようにして見積もった「密度」の大小が「潮汐力」の目安になる。ブラックホールに落ちていく物体のブラックホールに近い側と遠い側で働く重力が異なり、その差として潮汐力が働く。ブラックホールの質量が大きい（小さい）ほど、潮汐力は小さい（大きい）。よって小さな（恒星質量）ブラックホールに物体が落ちていくとき、潮汐力によって物体はばらばらに壊れてしまう。巨大ブラックホールの潮汐力は小さいので、物体はそのまま落ちていき、シュワルツシルド半径を超える。

6.1.5 観測装置の分解能とブラックホールの直接撮像

ブラックホール自身は光を出さないわけだが、仮にブラックホールとその周辺の降着円盤を「撮像」したらどのように見えるだろうか？おそらく、明るく輝く降着円盤の中心に、ブラックホールが黒い影として見えるのだろう（「ブラックホールシャドウ」)。2011 年現在、技術的にそれはまだ実現していないが、ブラックホールシャドウとしてどのような画像が観測されるか、多くの計算がなされている[5]。

電波や X 線を放出する降着円盤の内縁がブラックホールにどこまで近づけるか、という議論があるのだが、ここでは単純に、シュワルツシルド半径をそのようなブラックホールシャドウの半径だと考えてみよう。そして、その見かけの広がりを現在および将来の観測装置の性能（位置分解能）と比較してみよう。

まず、天文観測装置の分解能は日常的に用いられる「視力」と比較するとわかりやすい。視力が 1 ということは、視力検査で使われる輪っかの 1.5mm の切れ目を 5m 離れたときに認識できる分解能のことである。その切れ目の広がりは 1.5mm/5000mm=0.0003 ラジアン。これを分角に直すと、$0.0003/\pi\times 180\times 60 \approx 1'$。つまり、視力 1 ということは、位置分解能 1 分角、視力 2 ということは位置分解能 0.5 分角に対応する。

多くの地上望遠鏡の位置分解能は、一秒角、1" 程度 (視力 60) であり、これはほぼ大気の揺らぎによって決まっている。しかし、技術的に大気の揺らぎを補正することができて（**補償光学**)、その場合の位置分解能は以下の原理的な値に近づく。

口径 D の望遠鏡を用いて波長 λ の光で観測したときの原理的な位置分解能は、ほぼ

$$\lambda/D \tag{6.3}$$

で与えられる[6]。たとえば、口径 8.2m のすばる望遠鏡を用いて、波長 2.2 ミクロンの赤外線

[5] この分野の第一人者である大阪教育大学の福江先生の資料などを参考に:`http://quasar.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/~fukue/lecture/bhshadow_2010.pdf`

[6] 回折像の第一極小点までの半径で、点像分布関数の FWHM(p.??) に近い値。矩形開講では λ/D、円形開口では $1.22\lambda/D$。

で天体を観測したときの原理的な位置分解能は、

$$2.2 \times 10^{-6}/8.2 \approx 2.7 \times 10^{-7}\ radian \approx 0.06''$$

であるが、（観測環境の良いマウナケア山頂でさえも）大気揺らぎによって、これは約 10 倍悪くなってしまう。補償光学の技術を用いて、大気揺らぎを打ち消すように光学系を操作することによって、原理的な位置分解能に近い値、0.063" を達成することができる[7]。

さて、ではさらに観測装置の位置分解能を上げるにはどうすればよいだろうか？式 (6.3) からわかるように、望遠鏡の口径を広げて、波長を短くしてやればよい。望遠鏡の口径を大きくすることには限界があるが、二つ以上の離れた望遠鏡で観測した電磁波を干渉させる、**干渉計**という技術がある。これによって、たとえば地上の電波望遠鏡と人工衛星に積んだ電波望遠鏡を用いて、地球よりも大きいサイズの望遠鏡で観測したのと同じ位置分解能を達成することができる。それを世界で最初に（今のところ最後でもあるが）達成したのが、宇宙科学研究所の「はるか」衛星である[8]。「はるか」の基線長は 3 万 km、主な観測波長は 6cm であったので、位置分解能は、$6/(3 \times 10^9) = 2 \times 10^{-9} radian \approx 400\mu$ 秒角となる。これが当時では人類が達成した最高の位置分解能で、視力 15 万に対応する。

私たちの銀河の中心までの距離は 8kpc であり[9]、そこには質量 370 万 $M_\odot$ のブラックホールが存在する。その見かけ上の広がりは、

$$\frac{370 \times 10^4 \times 3 \times 10^5\ [\mathrm{cm}]}{8 \times 10^3 \times 3.09 \times 10^{18}\ [\mathrm{cm}]} \approx 4.4 \times 10^{-11}\ radian \approx 10\mu\, arcsec. \tag{6.4}$$

となる。これはおよそ視力 700 万に対応し、「はるか」衛星でもまだまだ分解能が足りないことがわかるが、さらに電波干渉計衛星の観測波長を短くすれば、この位置分解能を達成し、ブラックホールシャドウを観測することは原理的に可能である。近年、地上の電波干渉計で波長の短いミリ波を用い、より高い位置分解能が実現している。それによって、銀河中心のブラックホールの大きさに制限をつけたという報告もある[10]。

干渉計は、波長が短くなればなるほど、より精密な制御が必要になるので技術的に難しくなる。2011 年現在、地上での光干渉計の観測は始まっているが、宇宙空間での光干渉計はまだ実現していない。究極的には、宇宙空間で遠く離れた **X 線干渉計**[11]が実現できれば、それが人類が持ち得る究極の位置分解能を持つ観測装置になるだろう。遠い将来、人類は X 線干渉計を用いて、ブラックホールの X 線写真を撮れるようになるのかも知れない[12]。

6.2 ブラックホールの光度

6.2.1 エディントン限界光度

コンパクト天体に落ちていく物質は、天体が放射する光による圧力を受ける。球対称の場合、物質がコンパクト天体から受ける重力と光による圧力が釣り合う限界光度があり (エディントン限界、L_{Edd})、天体はそれ以上明るくなることはできない。ここでは簡単のために、天

[7] `http://subarutelescope.org/Pressrelease/2006/11/20/j_index.html`

[8] `http://www.isas.jaxa.jp/j/japan_s_history/chapter09/02/07.shtm`

[9] 天文学においては、距離の単位として pc (パーセク) が用いられる。それは、地球の公転による見かけ上の星の位置のふらつき、**年周視差**が 1" となる星までの距離として定義される。地球と太陽までの距離 (**1 天文単位**) は 1 億 5 千万 km だから、$1\ \mathrm{pc} = 1.5 \times 10^{13}\ [\mathrm{cm}]/(1/60/60/180 \times \pi) \approx 3.09 \times 10^{18}\ [\mathrm{cm}]$。

[10] `http://www.nature.com/nature/journal/v455/n7209/abs/nature07245.html`

[11] そういう計画はあります：`http://maxim.gsfc.nasa.gov`

[12] 2058 年に実現したりして;)http://www.isas.ac.jp/j/mailmaga/backnumber/2010/back289.shtml。

体に落ち込む物質として水素だけを考える。水素の質量を m_H として、重力と輻射圧のつりあいの式は以下のように書ける。

$$\frac{\sigma_T}{c}\frac{L_{Edd}}{4\pi r^2} = \frac{GMm_H}{r^2}. \tag{6.5}$$

ここで $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25}\ \mathrm{cm}^2$ は**トムソン断面積**[13]で、電子が光を散乱する際の断面積である。これから、

$$L_{Edd} = \frac{4\pi cGM}{\sigma_T/m_H} = \frac{4\pi c\ GM}{\kappa_T}. \tag{6.6}$$

κ_T はトムソン散乱による**質量吸収係数**で、$\sim$0.4 cm^2/g である。よって、

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c^3}{\kappa_T}\frac{GM_\odot}{c^2}\left(\frac{M}{M_\odot}\right) \approx 1.3 \times 10^{38}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\ [\mathrm{erg/s}]. \tag{6.7}$$

白色矮星の最大質量 (チャンドラセカール限界) は $1.4M_\odot$ で、それが中性子星の平均質量に対応している。中性子星の最大質量は $\sim 2M_\odot$ で、それより重いコンパクト星はブラックホールである[14]。ブラックホールについては、(6.7) に従って、質量が大きいほど、明るく光ることができる。

6.2.2 二種類のブラックホールと中間質量ブラックホール

典型的に恒星質量ブラックホールの質量は $3-10M_\odot$ なので、その最大光度は $10^{38}-10^{39}$erg/s 程度である。一方、活動的銀河中心核の中心にある巨大ブラックホールの質量は $> 10^6M_\odot$ なので、その最大光度は $> 10^{44}$erg/s となりうる。

近年、近傍の渦巻き銀河中に、$10^{40} - 10^{41}$erg/s 程度の光度をもつ X 線天体が次々と見つかり、Ultra-luminous X-ray Sources (ULXs) と呼ばれている。銀河の中心から離れて複数見つかっているので、活動的銀河中心核（巨大ブラックホール）とは考えられず、恒星質量ブラックホールとするとそのエディントン限界光度を大きく超えている。よって、それらの天体がエディントン限界光度を超えていないとしたら、$100 - 1000M_\odot$ の質量を持つ「中間質量ブラックホール」ではないか、という説がある。

一方、球対称でない場合、輻射はエディントン限界光度を大きく超えることができ、ULXs はやや重めの恒星質量ブラックホール ($\lesssim 30M_\odot$) が、超限界光度（Super-Eddington luminosity) で輝いている状態であるという説もある。

6.3 降着円盤からの X 線放射

6.3.1 Innermost Stable Circulr Orbit (ISCO) とブラックホールのエネルギー効率

ニュートン力学では、質量 M の天体の周りの安定円軌道について、その最小半径は存在しない。実際、無限小の半径も可能で、そこでは重力ポテンシャルが無限大になるので、破綻している。

[13]断面積という概念に慣れておこう。文字通り、一つの電子がこれだけの面積をもって、光の道筋に立ちはだかっていると思ってよい。

[14]質量以外にブラックホールの観測的証拠はなかなか見つからないのだが、「ブラックホールしかありえない」、ということ。

一般相対性理論では、ブラックホールの周りの質点の運動を解くと安定な円軌道の最小半径（Innermost Stable Circlar Oribit; ISCO）が、ブラックホールの角運動量 $a(0 \leq a \leq 1)$ の関数として得られる。それは、回転していないブラックホールの周辺、シュワルツシルド時空の場合（$a = 0$）、

$$R_{ISCO} = 3R_S = \frac{6GM}{c^2} \tag{6.8}$$

である。ブラックホールの回転と円運動の方向が一致しているときは、a とともに R_{ISCO} は減少し、角運動量最大 ($a = 1$) のとき、

$$R_{ISCO} = 0.5R_S = \frac{GM}{c^2} \tag{6.9}$$

である。

無限遠から質量 m の物質が角運動量を受けて（渦を巻いて）落ち込んでいき、降着円盤を作り、最終的に R_{ISCO} に達すると考える。簡単のためにニュートン力学で考えると、その場における全エネルギーを E、回転速度を v として、

$$E = -\frac{GMm}{R_{ISCO}} + \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.10}$$

$$= -\frac{GMm}{2R_{ISCO}}. \tag{6.11}$$

ここで運動方程式、

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \tag{6.12}$$

を用いた。つまり、質量 m の物質あたり $\frac{GMm}{2R_{ISCO}}$ のエネルギーが降着円盤中で解放されるわけだが、単位時間あたり $\dot{m}$ の質量の物質が落ちるとき、円盤の光度は、

$$L_{disk} \approx \frac{GM\dot{m}}{2R_{ISCO}} \tag{6.13}$$

となる。R_{ISCO} として、シュワルツシルドブラックホールの場合、極端なカーブラックホール ($a = 1$) の場合、それぞれについて (6.8)、(6.9) を代入し、

$$L_{disk} \approx \frac{1}{12}\dot{m}\,c^2 \approx 0.08\dot{m}\,c^2 \ \ \text{(Schwarzschild black hole)} \tag{6.14}$$

$$L_{disk} \approx 0.5\,\dot{m}\,c^2 \ \ \text{(Extreme Kerr black hole)} \tag{6.15}$$

が得られる。厳密に、一般相対論的な計算によると上記の係数（エネルギー効率）はそれぞれ、$1 - \sqrt{8/9} \approx 0.057, 1 - \sqrt{1/3} \approx 0.42$ である。

一方、熱核融合反応の時、水素が鉄に達するまでの平均で、エネルギー効率は 0.009 である。**ブラックホールへ物質が落ち込む際の重力エネルギーの解放が非常に効率的である**ことを理解しよう。

6.3.2 標準降着円盤の温度の半径依存性

質量 M のブラックホールの周りの標準降着円盤（=幾何学的に薄く、光学的に厚い）を考えよう。物質は質量降着率 $\dot{M}$ でブラックホールに落ちていくとする。物がディスク中で dr 落ちる間に、解放される重力ポテンシャルの半分 (ビリアル定理) が熱化され、ディスクの両面から黒体輻射で放出されるとすると、

$$2 \cdot 2\pi r\, dr\, \sigma T_{eff}^4 \propto \frac{1}{2} d\left(-\frac{GM\dot{M}}{r}\right) = \frac{GM\dot{M}}{2\, r^2}\, dr,$$

$$T_{eff}(r) \propto \left(\frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3}\right)^{1/4}. \tag{6.16}$$

上式は半径依存性は正しいが、境界条件を入れていないため、ファクターは正しくない。内縁の境界条件 (内縁で温度=0) を入れた正確な式は、

$$T_{eff}(r) = \left(\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3}\left(1 - \sqrt{r_{in}/r}\right)\right)^{1/4}. \tag{6.17}$$

内縁のごく近傍からの輻射は観測には効かない (温度が低く面積も小さいため) ので、**光学的に厚い標準円盤では、ディスクの有効温度の半径依存性は $r^{-3/4}$ である**ことを覚えておくと良い[15]。

6.3.3 Multicolor disk blackbody の光度

ディスクの内縁の境界条件を無視し、温度の半径依存性を $r^{-3/4}$ とし、各半径で黒体輻射をしている場合を考える。この近似に基づいた降着円盤スペクトルモデルを "Multicolor disk blackbody" モデルと呼び、観測データを記述するのに良く用いられる。この円盤の光度を求めてみよう。すなわち、内縁半径と温度をそれぞれ r_{in}, T_{in} として、

$$T(r) = T_{in}\,(r/r_{in})^{-3/4}. \tag{6.18}$$

円盤の表と裏を考慮して、内縁から外縁 (r_{out}) まで積分して、

$$L_{disk} = 2\int_{r_{in}}^{r_{out}} 2\pi r\sigma T(r)^4 dr$$

$$= 4\pi\sigma T_{in}^4 r_{in}^3 \int_{r_{in}}^{r_{out}} r^{-2} dr$$

$$= 4\pi\sigma T_{in}^4 r_{in}^3 (1/r_{in} - 1/r_{out}) \approx 4\pi\sigma r_{in}^2 T_{in}^4. \tag{6.19}$$

ただし、ここで $r_{out} \gg r_{in}$ を用いた。

[15]質量降着率が上がって「スリムディスク」になると、それに伴い指数が -0.75 から -0.5 まで変化する。

6.3.4 ブラックホールの周りの降着円盤の温度

シュワルツシルド時空では、$R_{ISCO} = 3R_s$ である。これを (6.19) の r_{in} とし、降着円盤がエディントン限界光度で光っているとしよう[16]。

$$L_{Edd} = \frac{4\pi\, c\, GM}{\kappa} = 4\pi\, \sigma\, (3R_s)^2\, T_{in}^4 \tag{6.20}$$

より温度を求めると、

$$T_{in} \approx \left(\frac{c^3}{18\sigma\kappa}\right)^{1/4} \left(\frac{2GM_\odot}{c^2}\right)^{-1/4} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/4} \approx 2\ \mathrm{keV} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/4} \approx 1\ \mathrm{keV} \left(\frac{M}{10M_\odot}\right)^{-1/4}. \tag{6.21}$$

よって、最大光度 (エディントン限界) で光っている質量 $\sim 10M_\odot$ のブラックホールの周りの降着円盤は、~ 1 keV の温度を持つので、X 線領域で観測されることがわかる。

ブラックホールの質量が大きいほど、降着円盤の温度が低くなることに注意。たとえば、太陽の 10^9 倍の質量を持つブラックホール[17]の降着円盤の温度は ~ 10 eV となり、これは紫外線領域で観測される。

(6.20) より、回転しているブラックホールの場合 $(0 < a \leq 1)$、R_{ISCO} が小さくなるとディスクの内縁の温度 T_{in} が上がることがわかる。これはただちに降着円盤スペクトルに影響を与える。X 線による降着円盤スペクトルの観測から円盤の内縁半径、R_{ISCO} を求め、それからブラックホールのスピンに制限を与える試みが行われている[18]。

6.3.5 X 線による標準降着円盤の観測

1987 年に出版された Katz の"High Energy Astrophysics" は優れた教科書だが、その降着円盤に関する章には、"Unfortunately, Eq.1 and Eq.2 are not supported by any data. There are few astronomical objects in which the continuum radiation from an accretion disk can be unambiguously identified." (ここで、Eq.1 と Eq.2 は、テキスト中でそれぞれ標準降着円盤の温度とスペクトルを表わす式) という記述がある。実際、これが当時の降着円盤の観測的研究の状況であった。

1987 年から 1991 年まで稼働していた日本の X 線天文衛星「ぎんが」は、LMC X-3, GS2000+25, GS1124–68 などのブラックホール連星系の"High State" のエネルギースペクトル変化を長期間にわたって観測し、どの天体についても、(1) 光学的に厚い降着円盤の内縁の半径は光度が大きく変化しても変わらないこと (光度は円盤温度の 4 乗に比例すると言っても良い)、(2) (内縁の境界条件や黒体輻射からのずれを補正した後) 円盤の内縁半径をシュバルツシルト半径の 3 倍と仮定して見積もったブラックホールの質量は、連星系のドップラー運動から決めた質量とよく一致することを発見した (図 6.1)。これは、ブラックホール連星系の"High State" のエネルギースペクトルは、その内縁がシュバルツシルト半径の 3 倍まで伸びた標準降着円盤からのものであることを強く示唆している。

1994 年に出版された Longair, "High Energy Astrophysics" second edition では、「ぎんが」衛星による LMC X-3 の観測結果を引用して、"This is a remarkable result, but it is

[16]エディントン限界光度は球対称を仮定して求められたので、円盤からの放射の際には必ずしもそれが最大高度ではないが、幾何学的に薄い標準降着円盤の場合、最大高度はほぼエディントン限界光度に等しいとがわかっている。なお、「スリムディスク」のような非標準降着円盤の場合、円盤が（どれだけ）エディントン限界光度を超えられるかどうかがホットな話題となっている

[17]このような巨大ブラックホールが、**活動的銀河中心核 (Active Galactic Nuclei; AGN)** の正体と考えられている。

[18]正確な降着円盤スペクトルモデルには、当然相対論的な効果を考慮しなくてはいけない。

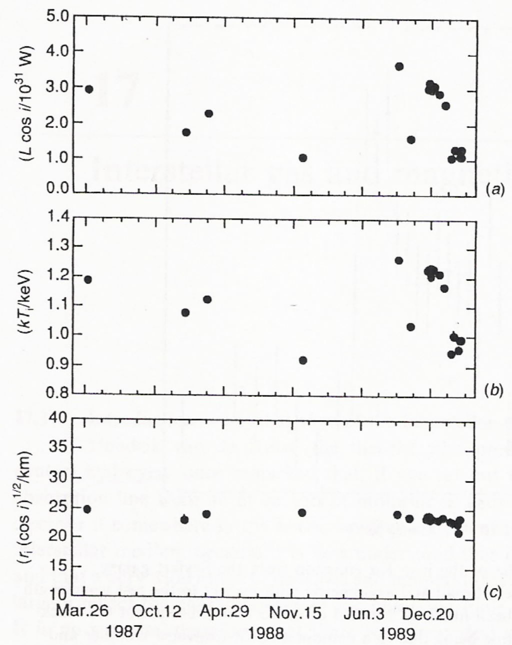


Figure 16.22. Time histories of the best-fit parameters to the soft component of the X-ray spectrum of LMC X-3 obtained by the Japanese Ginga satellite. (a) The bolometric luminosity of the sources; (b) the inferred temperature at the inner radius of the accretion disc; (c) the inferred inner radius, r_i, of the accretion disc. i is the inclination angle of the plane of the orbit to the plane of the sky. (From H. Inoue (1992). *Proc. Texas/ESO-CERN Symposium on Relativistic astrophysics, cosmology and fundamental particles*, eds J.D. Barrow, L. Mestel and P.A. Thomas, pp. 86–103. New York: New York Academy of Sciences.)

Figure 6.1: 「ぎんが」衛星が観測した LMC X-3 の X 線スペクトル変化。ディスク成分のエネルギースペクトルを、ディスクの内縁と温度を自由パラメーターにしてフィッティングを行った。光度 (最上段) が変化しても内縁の半径 (下段) は一定。光度はディスクの温度 (中段) の 4 乗に比例している。Longair, “High Energy Astrophysics” から取ってきた。そこでは Inoue (1992) を引用しているが、その基は私の博士論文 (1991 年)。投稿論文になったのは、Ebisawa et al. 1993, ApJ, 403, 684。

clearly dependent upon a number of assumptions, particularly that the accretion disk is optically thick.” と書いてある。実際、それまでは明るく光っている標準降着円盤の内縁付近が光学的に厚いのか薄いのかわかっていなかったのだが、「ぎんが」の観測によって、常に前者であることが明らかになった。

その後、RXTE 衛星等によって上記の二つの観測事実がより多くのブラックホールから確認され、ブラックホールの High State のエネルギースペクトルを標準降着円盤で説明するモデルが確立した。