

2011年度 東京大学大学院 理学系研究科 天文学専攻  
「高エネルギー天文学特論III」  
講義ノート  
JAXA 宇宙科学研究所 海老沢 研

January 30, 2012



# Contents

<b>1 Introduction</b>	<b>7</b>
1.1 宇宙の広がり	7
1.1.1 自然界における最も重要な3つの定数	7
1.1.2 プランク時間、プランク長、プランク密度	8
1.1.3 宇宙の年齢と大きさ	8
1.1.4 ブラックホールとプランク粒子	8
<b>2 相対性理論</b>	<b>11</b>
2.1 線形代数と特殊相対性理論	11
2.1.1 曲がっていない空間(線形空間)と曲がっている空間	11
2.2 特殊相対性理論	11
2.2.1 特殊相対性理論が必要になる場合	11
2.2.2 ローレンツ変換 <sup>1</sup>	12
2.2.3 固有時間	14
2.2.4 四元速度	14
2.2.5 速度の変換則	14
2.2.6 四元運動量	15
2.3 一般相対性理論 <sup>2</sup>	16
2.3.1 局所慣性系	16
2.3.2 シュワルツシルド時空	17
2.3.3 シュワルツシルド時空のGPSへの応用	19
<b>3 ブラックホール</b>	<b>23</b>
3.1 ブラックホールとは?	23
3.2 脱出速度	23
3.3 ブラックホールの「密度」	24
3.4 観測装置の分解能とブラックホールの直接撮像	24
3.5 ブラックホールの光度	26
3.5.1 エディントン限界光度	26
3.5.2 二種類のブラックホールと中間質量ブラックホール	26

<sup>1</sup>Jackson, “Classical Electrodynamics” の”第1版”を参考にしています(日本語訳も出ています)。特殊相対論に関しては、第2版よりも第1版の記述のほうがシンプルでわかりやすいと感じました。

<sup>2</sup>この節では、”Exploring Black Holes –Introduction to General Relativity”, by Taylor and Wheeler, Addison Wesley Longman を参考にしています。日本語でも英語でも一般相対性理論の教科書は山のようにありますが、僕が見た限り、これが一番直感的でわかりやすい教科書でした(しかし数学的な導出とかは厳密ではありません)。

3.6	Innermost Stable Circulr Orbit (ISCO) とブラックホールのエネルギー効率 . . . . .	27
3.7	ブラックホールの (周りの降着円盤の) 観測 . . . . .	28
3.7.1	標準降着円盤の温度の半径依存性 . . . . .	28
3.7.2	Multicolor disk blackbody の光度 . . . . .	28
3.7.3	ブラックホールの周りの降着円盤の温度 . . . . .	29
<b>4</b>	<b>人工衛星による観測</b> . . . . .	<b>31</b>
4.1	座標変換とオイラー角 . . . . .	31
4.1.1	天球座標 . . . . .	31
4.1.2	方向ベクトルと座標変換 . . . . .	34
4.1.3	直交変換と変換行列 . . . . .	34
4.1.4	直交変換の簡単な記法 . . . . .	36
4.1.5	座標変換の計算 . . . . .	36
4.1.6	スカラー三重積と行列式 . . . . .	36
4.1.7	オイラーの定理 . . . . .	37
4.1.8	オイラー角 . . . . .	38
4.1.9	赤道座標から黄道座標への変換 . . . . .	39
4.1.10	赤道座標から銀河座標への変換 . . . . .	40
4.2	人工衛星の姿勢 . . . . .	42
4.2.1	衛星座標系 . . . . .	42
4.2.2	人工衛星の姿勢とオイラー角 . . . . .	42
4.2.3	観測ターゲットと季節の関係 . . . . .	44
4.2.4	衛星座標から天球座標への変換 . . . . .	45
4.3	四元数と座標変換、人工衛星の姿勢 . . . . .	46
4.3.1	四元数 (quaternion) . . . . .	46
4.3.2	四元数の性質 <sup>3</sup> . . . . .	47
4.3.3	四元数と回転 <sup>4</sup> . . . . .	50
4.3.4	四元数と変換行列の関係 . . . . .	51
4.3.5	座標変換への応用 . . . . .	52
4.3.6	人工衛星の姿勢への応用 . . . . .	52
4.4	人工衛星の軌道 . . . . .	53
4.4.1	二体問題とケプラーの法則 . . . . .	53
4.4.2	軌道六要素 . . . . .	56
4.4.3	静止衛星 . . . . .	57
4.4.4	Two Line Elements . . . . .	57
4.4.5	準天頂衛星 . . . . .	58
<b>5</b>	<b>X線天文学ことはじめ</b> . . . . .	<b>63</b>
5.1	様々な物理量の見積もり、覚えておく便利な数値、式など . . . . .	63
5.1.1	基本中の基本 . . . . .	63
5.1.2	原子物理の復習 . . . . .	64
5.1.3	宇宙物理ことはじめ . . . . .	68
5.2	X線検出装置 . . . . .	72

<sup>3</sup>この節と次節では <ftp://ftp.cis.upenn.edu/pub/graphics/shoemake/quatut.ps.Z> を参考にしています。このメモの著者の Ken Shoemake は、コンピューターグラフィクスに quaternion を導入した人らしい。

<sup>4</sup>この節の議論は、有名な教科書、"Classical Mechanics" H. Goldstein に倣いました。

5.2.1	検出原理 . . . . .	72
5.2.2	感度 . . . . .	74
5.2.3	エネルギー分解能 . . . . .	75
5.3	X線データの眺め方 . . . . .	79
5.3.1	X線イベント . . . . .	79
5.3.2	画像 . . . . .	80
5.3.3	ライトカーブ、時間変動の解析 . . . . .	81
5.3.4	エネルギースペクトル . . . . .	81
<b>6</b>	<b>X線輻射のメカニズム</b> . . . . .	<b>83</b>
6.1	光学的厚み (optical depth) . . . . .	83
6.2	輻射輸送 (radiative transfer) . . . . .	83
6.3	黒体輻射 (blackbody radiation) . . . . .	85
6.3.1	黒体輻射の例 . . . . .	86
6.3.2	観測との比較 . . . . .	86
6.3.3	黒体輻射の特徴 . . . . .	88
6.3.4	黒体輻射のエネルギー密度、フラックス . . . . .	89
6.3.5	黒体輻射の光子密度 . . . . .	90
6.3.6	3つの温度 . . . . .	90
6.3.7	色温度と有効温度の違いによる補正 . . . . .	91
6.4	電子分布とエネルギースペクトル . . . . .	92
6.5	制動放射 (bremsstrahlung) . . . . .	95
6.5.1	準備 1: 電場の変化とエネルギースペクトル . . . . .	96
6.5.2	準備 2: 電気双極子放射 (electric dipole radiation) . . . . .	97
6.5.3	制動放射のパワー . . . . .	98
6.5.4	熱制動放射 (thermal bremsstrahlung) . . . . .	100
6.5.5	X線で観測される熱制動放射の例 . . . . .	102
6.5.6	熱制動放射の特徴 . . . . .	102
6.6	逆コンプトン放射 (Inverse Comptonization) . . . . .	104
6.6.1	用語の整理 . . . . .	104
6.6.2	熱的逆コンプトン放射 (thermal inverse Comptonization) のスペクトル の例 . . . . .	107
6.7	相対論電子によるシンクロトロン放射と逆コンプトン散乱 . . . . .	107
6.7.1	シンクロトロン放射 . . . . .	109
6.7.2	電子エネルギー、磁場、シンクロトロン光子エネルギーの関係 . . . . .	109
6.7.3	“Equipartition” condition . . . . .	111
6.7.4	ローレンツ変換と相対論的な逆コンプトン散乱 . . . . .	111
6.7.5	超新星残骸 RXJ 1713.7-3946 の例 . . . . .	112



# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 宇宙の広がり

#### 1.1.1 自然界における最も重要な3つの定数

ニュートン力学では、基礎的な方程式に重力定数  $G$  は入ってきても、光速  $c$  は入ってこなかった。これは重力によって生じるモノの速さが光速  $c$  に比べてはるかに小さい場合のみを扱ってきたからである。光に近い早さでモノが動く状況を記述するには、**特殊相対性理論** (特殊相対論) が必要になり、そこには光速  $c$  が出てくる。しかし、そこでは重力は扱っていないので、 $G$  は出てこない。重力によって生じるモノの速さが光速  $c$  に比べて無視できない場合を扱うのが、**一般相対性理論** で、その基本方程式には  $c$  と  $G$  の両方が出てくる。**一般相対性理論** は巨視的な世界を扱う理論なので、そこにはプランク定数  $h$  は出てこない。

プランク定数  $h$  は、小さなスケールに於ける物理現象を記述する**量子力学** に出てくる。ただし、**シュレディンガー方程式** には  $h$  はでてくるが、 $c$  も  $G$  も出てこない。これは、素粒子が光速に近い速度で動いていることを考慮せず、また素粒子同士の重力を考慮していないからである。実際には、素粒子は光速に近い速さで運動しているので、シュレディンガー方程式に特殊相対性理論の効果を考慮した**ディラック方程式** が必要になり、ここには必然的に  $h$  と  $c$  が出てくる。

その後、素粒子論は発展し、現在では、自然界に存在する四つの力、電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用、重力相互作用のうち、重力相互作用をのぞく三つを統一する可能性がある**標準理論** ( $h$  と  $c$  を用いて記述される) が研究されている。そのような理論を検証するには、素粒子をほとんど光速まで加速して衝突させて、とことんばらばらにする必要があるため、そのために CERN の Large Hadron Collider<sup>1</sup> のような巨大加速器実験が行われている訳である<sup>2</sup>。

さらに、素粒子間の重力まで考慮に入れて、4つの相互作用を統一的に説明する理論、 $h$ 、 $c$ 、 $G$  が同時に出てくる理論はあるのだろうか? そのような**量子重力理論** はまだ存在しない。少なくとも、正しい、と広く受け入れられているものは。また、そのような理論の検証には、言ってみれば素粒子間に働く重力の測定が必要であり、それは地上ではほぼ不可能である。それが実現しているのは、この宇宙ではビッグバンの瞬間にしかないわけで、必然的に素粒子論の研究は、ビッグバンの起源を探る研究になる<sup>3</sup>。

いずれにしても、我々が知っている限り、この宇宙の物理法則は、 $c$ 、 $h$ 、 $G$  を用いて記述さ

<sup>1</sup><http://lhc.web.cern.ch/lhc/>

<sup>2</sup>素粒子物理学の解説として、おこちゃま向けですが、<http://www.kek.jp/kids> は良く書かれています。

<sup>3</sup>東大の数物連携宇宙研究機構 (<http://www.ipmu.jp/ja>) のテーマですね。

れる。これらの定数から自然に導かれる時間と長さや密度が、物理法則で記述できる最小の時間（**プランク時間**）と空間（**プランク長**）と最大の密度（**プランク密度**）である。プランク時間、プランク長が、現在の物理学で考えられる時間と空間の最小単位である。すなわち、現在知られている物理定数をどう捻っても、これ以上短い時間や空間は作れない。非常に大雑把に言って、ビッグバンからプランク時間後の宇宙の大きさがプランク長、そのときの宇宙の密度がプランク密度である。その頃の物理状態を記述するのが量子重力理論である。

### 1.1.2 プランク時間、プランク長、プランク密度

重力定数、光速、プランク定数の値は以下の通りである。

$$\begin{aligned} G &= 6.67428(67) \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2 \text{ (m}^3/\text{kg/s}^2\text{)} \\ c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \\ h &= 6.62606896(33) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2/\text{s)} \end{aligned}$$

ただし、 $h$  を  $2\pi$  で割った、 $\hbar$  が良く使われる。

$$\hbar = 1.054571628(53) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2/\text{s)}$$

この  $G, c, \hbar$  の単位（次元）をグッとにらんで、時間、長さ、質量、さらに密度の単位を作ってみる。これらが、プランク時間、プランク長、プランク質量、プランク密度である。

$$\text{Planck Time} = t_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.39 \times 10^{-44} \text{ [sec]} \quad (1.1)$$

$$\text{Planck Length} = l_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.61 \times 10^{-35} \text{ [m]} \quad (1.2)$$

$$\text{Planck Mass} = m_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.18 \times 10^{-8} \text{ [kg]} \quad (1.3)$$

$$\text{Planck Density} = \rho_P \equiv \frac{c^5}{\hbar G^2} = 5.16 \times 10^{96} \text{ [kg/m}^3\text{]} = 5.16 \times 10^{93} \text{ [g/cm}^3\text{]} \quad (1.4)$$

### 1.1.3 宇宙の年齢と大きさ

宇宙の年齢は約 137 億年と測定されている ( $4.3 \times 10^{17}$  秒)。よって、宇宙の大きさは 137 億光年と考えられる ( $1.3 \times 10^{26}$  m)。それぞれ、プランク時間 (1.1)、プランク長 (1.2) と比較すると、約 61 桁大きい。つまり、我々の物理的考察の対象である宇宙とは、約 61 桁にわたる時間的、空間的な広がりである。

### 1.1.4 ブラックホールとプランク粒子

質量  $M$  の天体のシュワルツシルド半径  $R_S$  は  $2GM/c^2$  で与えられる。非常に大雑把に、ブラックホールの「半径」がシュワルツシルド半径と思っても良い<sup>4</sup>。プランク質量とプランク長の関係は、 $l_P = Gm_P/c^2$  で与えられるので、factor 2 を無視すれば、プランク質量を持ち、大きさ（半径）がプランク長である仮想的な粒子はブラックホールと考えられる。これをプランク粒子と呼ぶ。

<sup>4</sup>太陽のシュワルツシルド半径は約 3km、地球のシュワルツシルド半径は約 9mm であることを覚えておこう。

一方、質量  $m$  の粒子の静止エネルギーに対応するエネルギーを持つ光の波長がコンプトン波長  $\lambda_C$  である：

$$E = mc^2 = h\nu = hc/\lambda_C. \quad (1.5)$$

よって、

$$\lambda_C = \frac{h}{m c}. \quad (1.6)$$

また、プランク長とプランク質量の間には

$$l_P = \frac{\hbar}{m_P c} \quad (1.7)$$

の関係があるから、 $2\pi$  を無視すれば、プランク粒子の大きさ、つまりプランク長はコンプトン波長に一致する。シュワルツシルド半径とコンプトン波長が一致する仮想的な粒子がプランク粒子と考えても良い。

これらの値を現実の素粒子の質量、大きさ（コンプトン波長）と比較してみよう。陽子の質量は  $1.67 \times 10^{-27}$  kg、コンプトン波長は  $1.3214 \times 10^{-15}$  m である<sup>5</sup>。つまり、プランク粒子は現実の素粒子に比べてはるかに重く、はるかに小さい。

---

<sup>5</sup>陽子の質量（静止エネルギー）を  $m_p c^2 \approx 1$  GeV と覚えておこう。また、 $\hbar c \approx 2000$  eV·Å を覚えておくと便利。これから、陽子のコンプトン波長は、 $h/mc = 2\pi\hbar c/mc^2 \approx 2\pi \times 2000[\text{eV} \cdot \text{Å}]/10^9[\text{eV}] \approx 10^{-15}$  m. また、 $1$  eV  $\approx 1.6 \times 10^{-12}$  erg も覚えておこう。これから、陽子の質量については、 $m_p \approx 1[\text{GeV}]/c^2 \approx 10^9 \times 1.6 \times 10^{-12}[\text{erg}]/(3 \times 10^{10}[\text{cm/s}]^2) \approx 2 \times 10^{-24}$  g.



## Chapter 2

# 相対性理論

## 2.1 線形代数と特殊相対性理論

### 2.1.1 曲がっていない空間 (線形空間) と曲がっている空間

仮に重力が存在しない時間と空間 (四次元時空) を考えよう。そのような時空は曲がっていない (線形空間)。そのような時空に四本の直交する座標軸を立てたとしよう。もう一つ、別の座標軸を考える。どちらの座標系で測っても、四次元時空中の距離は同じであり、二つの座標系のあいだの変換は回転で表される (ローレンツ変換)。変換を記述する回転行列は、場所によらずに同じである。そのような、重力が存在せず、曲がっていない時空を記述するのが**特殊相対性理論**である。

重力が存在する時空は曲がっている。座標系によって四次元時空間の距離は違い、二つの座標系のあいだの変換は回転で表せない。変換を記述する行列は場所に依存する。そのような、重力が存在し、曲がっている時空を記述するのが**一般相対性理論**である。

## 2.2 特殊相対性理論

### 2.2.1 特殊相対性理論が必要になる場合

ここでは直交変換の応用として、特殊相対性理論について学んでみよう。等速運動する二つの座標系 (慣性系<sup>1</sup>) のどちらでも物理法則が全く同じように記述できる、というのが特殊相対性原理である (この宇宙に特別な慣性系は存在しない)。光速はどちらの座標系でも同じ値を取るし、どちらの系からも相手の系が同じように見える。その間の座標変換は**ローレンツ変換**で与えられ、以下に示すように、それは四次元時空における直交変換と考えても良い。しかし、ほとんどの場合、力学の問題を解くときに、私たちはローレンツ変換や相対論的力学を知らなくても良い。それは何故だろうか？その答えは簡単で、多くの場合扱っている速度が光速  $c(2.997925 \times 10^8 \text{ m/s})$  に比べてはるかに小さいからである<sup>2</sup>。

自然現象を記述する際に、どうしても特殊相対論が必要になってくる場合が二つある。一つは光速に近い運動が巨視的に起こりうる宇宙現象を扱う場合で、もう一つはミクロの世界ではほぼ光速で運動している素粒子を扱う素粒子物理学の世界である。たとえば、CERNのLHC (Large Hadron Collider) において、陽子は光速の 0.999999991 倍の速度まで加速され

<sup>1</sup>重力の影響は無視できるということ。

<sup>2</sup>高校の物理や大学一年レベルの力学で扱う式に  $c$  はでてこなかったはず。それらの式は、以下に出てくる相対論的な式において光速を無限大としたときの近似になっている。

るそうだ。以下で示すように速度  $v$  で運動している物体のエネルギーは  $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$  倍になるから、LHC の場合、これは約 7400 倍である。陽子の静止エネルギーは 0.938 GeV なので、LHC で加速された陽子（と反陽子）は約 7 TeV のエネルギーを持つことになる。LHC では陽子と反陽子を合わせて 14 TeV のエネルギーで正面衝突させてそれらを破壊し、陽子、反陽子が宇宙に誕生する以前、ビッグバン直後の状態を再現することによって、素粒子の起源、宇宙の起源に迫る。

### 2.2.2 ローレンツ変換<sup>3</sup>

4次元空間における直交変換を考える。あるベクトルを元の基底で表したときの成分が  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 、新しい基底ベクトルで表わしたときの成分を  $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$  とする。ベクトルの長さは不変なので、

$$s^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 \quad (2.1)$$

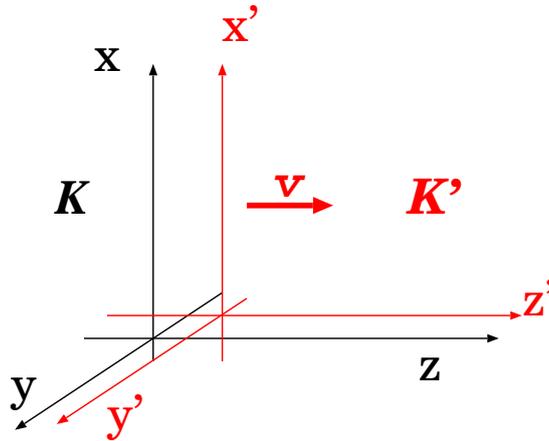
である。変換行列を  $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$  と書くと、3次元のとき (4.26, 4.28) と全く同じように、

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \quad a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \quad (2.2)$$

$$x'_i = a_{ij} x_j, \quad x_i = a_{ji} x'_j \quad (2.3)$$

が成立する。ここで、同じ添字については1から4までの和を取る。

$(x, y, z)$  を空間座標成分、 $t$  を時間とする。ある事象をある座標系  $K$  で表わした「世界点」の座標を  $(x, y, z, t)$  とする。下図のように、時刻  $t = t' = 0$  で原点が  $K$  と一致し、 $K$  と相対的に速度  $v$  で移動している座標系  $K'$  を考え、その事象を  $K'$  で表わした座標を  $(x', y', z', t')$  とする。



$c$  を光速として、 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$  としよう ( $x_4$  が形式的に「虚時間」に対応していることに注意)。

このとき、式 (2.1) は、

$$s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 \quad (2.4)$$

<sup>3</sup>Jackson, "Classical Electrodynamics" の"第1版"を参考にしています(日本語訳も出ています)。特殊相対論に関しては、第2版よりも第1版の記述のほうがシンプルでわかりやすいと感じました。

となり、これは**相対的に等速運動をしている二つの座標系において、 $s^2$  で定義される「世界間隔」が不変量であることを示している。**式 (2.3) で表わされる  $(x, y, z, t)$  と  $(x', y', z', t')$  の間の変換がローレンツ変換で、式 (2.1) で表わされるのがローレンツ不変量である。一般に、式 (2.1) で示されるように「長さ」が不変で、式 (2.3) のローレンツ変換に従うベクトルを**四元ベクトル**と呼ぶ。

特に、時刻  $t = t' = 0$  で両系の原点を出発した光を考える。光の波面は球面上に拡がっていくわけだが、時刻  $t, t'$  における波面上の座標はそれぞれの系で、 $(x, y, z), (x', y', z')$  で、式 (2.4) は、

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, \quad (2.5)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \quad (2.6)$$

を意味している。つまり、 $K$  系と  $K'$  系がどのような相対速度で動いていようとも、どちらの系から見ても、光速は  $c$  である、という**光速一定の原理**が得られた。

具体的な例を見てみよう。下図のように、 $K$  系の  $z$  軸 ( $x_3$  軸) のプラス方向に、 $K'$  系が速度  $v$  で動いている場合を考える。

この場合のローレンツ変換は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\gamma\beta \\ 0 & 0 & i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

ここで、

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.9)$$

$c$  は光速である。この変換行列が、直交条件、(2.2) を満たしていること、転置行列が逆行列になっていること ( $a_{ij}^{-1} = a_{ji}$ ) を確認しておこう。

式 (2.7), (2.8) より、

$$x'_3 = \gamma(x_3 + i\beta x_4), \quad (2.10)$$

$$x_3 = \gamma(x'_3 - i\beta x'_4) \quad (2.11)$$

である。 $K'$  系の原点は  $x'_3 = 0$ 、 $K$  系の原点は  $x_3 = 0$  であるが、これらを代入すると、

$$x_3 = v t, \quad (2.12)$$

$$x'_3 = -v t' \quad (2.13)$$

が得られる。(2.12) は、 $K'$  系の原点を  $K$  系で表わしたときの関係式、(2.13) は、 $K$  系の原点を  $K'$  系で表わしたときの関係式で、どちらも自明である。

### 2.2.3 固有時間

式 (2.4) で示されるように、 $(x, y, z, ict)$  の長さはローレンツ不変量であるから、微少なベクトル  $(dx, dy, dz, ic dt)$  の長さもローレンツ不変である。すなわち、

$$-c^2 d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \quad (2.14)$$

$$-c^2 d\tau'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 \quad (2.15)$$

と書いたとき、 $d\tau = d\tau'$  である<sup>4</sup>。 $d\tau$  は、 $K$  系の時計で  $dt$  の間に  $(dx, dy, dz)$  移動する物体とともに動く ( $dx = dy = dz = 0$ ) 観測者の測る時間、 $d\tau'$  は、 $K'$  系の時計で、 $dt'$  の間に  $(dx', dy', dz')$  移動する物体とともに動く ( $dx' = dy' = dz' = 0$ ) 観測者の測る時間である。つまり、物体とともに動く時計で測った時間は不変量であり<sup>5</sup>、この  $\tau$  を**固有時間**と呼ぶ。

式 (2.14) を、

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (2.16)$$

と書くと、これは動いている時計はゆっくり進んでいるように見えることを示している。

### 2.2.4 四元速度

すでに見たように、時空点の座標  $(x, y, z, ict)$  やその微少変化量  $(dx, dy, dz, ic dt)$  は四元ベクトルの一つである。これを不変量  $d\tau$  で割った

$$\left( \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, ic \frac{dt}{d\tau} \right) \quad (2.17)$$

も四元ベクトルであり、これを四元速度と呼ぶ。これを式 (2.16) を使って、

$$\gamma(v_x, v_y, v_z, ic) \quad (2.18)$$

と書ける。

四元速度の長さがローレンツ不変量であることを確認しておこう。

$$\gamma^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - c^2) = \frac{v^2 - c^2}{1 - (v/c)^2} = -c^2. \quad (2.19)$$

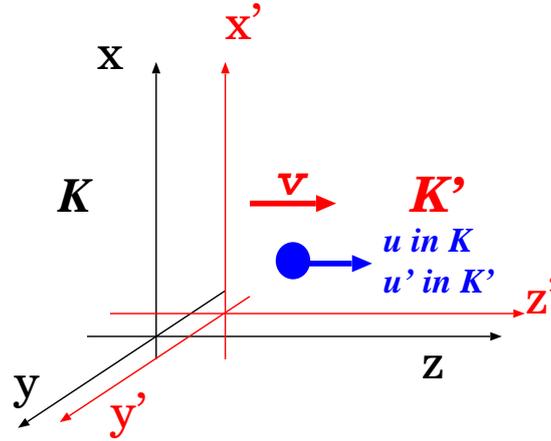
### 2.2.5 速度の変換則

先に考えた  $K$  系で運動する物体を  $K'$  系で見たときの速度を考えよう。 $K$  系における物体の速度、 $K'$  系における物体の速度、 $K$  系と  $K'$  系の相対速度を区別する必要があることに注意。

先と同じく、 $K'$  系は  $K$  系の  $+z$  軸方向に、 $K$  に対して速度  $v$  で動いているとする ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ )。物体の運動も、 $K$  系から見て  $+z$  軸方向とし、その速度を  $u$  とする ( $u_x = u_y = 0, u_z = u$ )。 $K'$  系から見た物体の速度を  $u'$  とする。また、 $1/\sqrt{1 - (u/c)^2} = \gamma_u, 1/\sqrt{1 - (u'/c)^2} = \gamma_{u'}$  とする。

<sup>4</sup>自明ではあるが、式 (2.7) について、これが成立することを確認しておこう。

<sup>5</sup>だから、例えば 1 秒の絶対的な長さというものを定義することができる。



ローレンツ変換の式 (2.7) と、四元速度の定義 (2.18) から、

$$\begin{pmatrix} \gamma_{u'} u'_x \\ \gamma_{u'} u'_y \\ \gamma_{u'} u'_z \\ \gamma_{u'} ic \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_u u \\ \gamma_u ic \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

これから、

$$u'_x = u'_y = 0 \quad (2.21)$$

$$\gamma_{u'} u'_z = \gamma \gamma_u (u - v) \quad (2.22)$$

$$\gamma_{u'} = \gamma \gamma_u \left(1 - \frac{v}{c^2} u\right). \quad (2.23)$$

(2.22) と (2.23) から、

$$u'_z = \frac{u - v}{1 - v u / c^2}. \quad (2.24)$$

$x', y'$  方向の速度成分がないことがわかったので、単純に、 $u'_z = u'$  と書くことにする。上式を解釈してみよう。まず、 $u = 0$  のとき、 $u' = -v$  であるが、 $K$  系に静止しているものを  $K'$  系から見たら、 $-z'$  方向に速さ  $v$  で遠ざかることは自明である。

日常生活においては、物体の移動速度は光速に比べてはるかに小さいので、 $vu/c^2 = 0$  と近似してよい。すると上式は  $u' = u - v$  と言う、見慣れた式になる<sup>6</sup>。

$u = c$  のときには、 $v$  の値には関わらず、 $u' = c$  になる。これは光速度不変の原理に他ならない。 $u = -0.9c$ ,  $v = 0.9c$  としてみよう。非相対論的に考えると、 $K'$  系から見て、物体は  $u - v = -1.8c$  で遠ざかっていくことになるが、そんなことは実際にはありえない。式 (2.24) は、 $-0.9945c$  を与える。物体の運動の速度が光速を越えることはありえないのだ。

### 2.2.6 四元運動量

四元速度に質量  $m$  を書けたものを**四元運動量**と呼ぶ。すなわち、

$$m\gamma(v_x, v_y, v_z, ic) \quad (2.25)$$

<sup>6</sup>地上でボールを時速  $u = 100\text{km}$  で投げる。同じ方向に時速  $v = 80\text{km}$  で進む列車から見ると、その速さは  $u - v = 100 - 80 = 20\text{km}$  であると考えるのが自然であるが、これは本当は正しくない。ここで、厳密に式 (2.24) を使うと、時速  $(20 + 7 \times 10^{-15}) = 20.000000000000007\text{km}$  になる。

$$\equiv (p_x, p_y, p_z, iE/c). \quad (2.26)$$

ここで、相対論的には運動量は

$$p = m\gamma v \quad (2.27)$$

で、エネルギーは、

$$E = m\gamma c^2 \quad (2.28)$$

で表されることを用いた。 $v/c \ll 1$  のとき、 $\gamma \approx 1 - \frac{1}{2}(v/c)^2$  を用いて、(2.28) は、

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.29)$$

と近似できる。最初の項が静止エネルギー、二番目の項が、ニュートン力学における通常の運動エネルギーである。

(2.19) より、四元運動量の長さの二乗は  $-m^2c^2$  だから、良く知られたエネルギーと運動量の間の関係式、

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \quad (2.30)$$

が得られる。

特に、光子など質量がゼロである素粒子の場合は、

$$E = pc. \quad (2.31)$$

光の波長を  $\lambda$ , 振動数を  $\nu$  とするとき、 $h$  をプランク定数として、光子のエネルギーは  $E = h\nu$ , 運動量は  $p = h/\lambda = h\nu/c$  で表わされることを思いだそう。あたりまえだが、光子について、(2.30) が成立している。

## 2.3 一般相対性理論<sup>7</sup>

ローレンツ変換は四次元時空における回転として、表現される事を見てきた。この変換は、空間が歪んでいないので (=線形空間)、ベクトルの長さは保存され、回転行列は場所にはよらなかった (=変換行列に、 $x, y, z, ct$  が含まれていない)。ここまでは歪んでいない世界を扱っていたので、このように簡単な数学で物事が済んだ訳だが、現実の世界では、重力の影響で空間が歪んでくるので (=非線形空間)、変換行列が場所に依存し (=変換行列に、 $x, y, z, ct$  が含まれている)、数学的に複雑になってくる。物理的には、これは、重力が存在する場合を扱うには、特殊相対性理論ではなくて**一般相対性理論**が必要、ということに他ならない。

### 2.3.1 局所慣性系

互いに等速運動している座標系の間では、式(2.4)で与えられる四次元時空中の二点間の「世界間隔」は不変量であった。二つの系の間で座標変換(ローレンツ変換)は、ベクトルの長さを変えない、四次元時空における回転を表す「直交変換」と考えても良いことを見てきた。実は、これは重力を及ぼすモノが存在せず、系が加速度運動をしていない場合にのみ成立する。この条件が成立している座標系を**慣性系**と呼ぶ。慣性系では「時空が平坦」なので、世

<sup>7</sup>この節では、"Exploring Black Holes -Introduction to General Relativity", by Taylor and Wheeler, Addison Wesley Longman を参考にしています。日本語でも英語でも一般相対性理論の教科書は山のようにありますが、僕が見た限り、これが一番直感的でわかりやすい教科書でした(しかし数学的な導出とかは厳密ではありません)。

界間隔は不変である。慣性系においては、ニュートンの第一法則が成立し、「静止しているモノは静止しつづけ、等速運動しているモノは等速運動しつづける」。例えば、慣性系で両手にボールを持って、そっとそれを離してみよう。二つのボールの距離は不変で、それは静止しつづける。

いったいそんな系は現実に存在するのだろうか？現実の世界には完全な**慣性系**は存在しないが、**加速度運動による慣性力と重力は区別できない**という**等価原理**によって、重力と慣性力を打ち消しあつた、**局所慣性系**を定義することができる。局所慣性系を作るもっとも手っ取り早い方法は、重力に身を任せてしまうことである。たとえば、宇宙空間に浮かんで、加速、減速はせず、いろいろな天体からの重力に身を任せている宇宙船の中や、綱の切れたエレベーターの中は局所慣性系である(いわゆる「無重力状態」)。宇宙に行くと重力がなくなる、と言うことはないことに注意。重力は宇宙のどこにでも存在する(万有引力の法則!)。重力に身を任せて自由落下することにより、重力の効果を打ち消すことはできる、というのがポイント<sup>8</sup>。

たとえば、宇宙空間に漂っている(=加速も減速もしていない)巨大な宇宙船を考えて、その中に互いに等速運動している局所慣性系を考えると、そのあいだの座標変換はローレンツ変換で与えられる。慣性系は局所的にしか存在できないことは、以下の思考実験でわかる。遠方から地球に向かって自由落下する宇宙船を考えよう。あるいは、綱の切れたエレベーターの中でも良い。ボールを4つ等間隔に配置する。もしこれが完全な慣性系で空間が歪んでいないならば、ボールの間隔は変化しないはずだが、それぞれのボールは地球の中心に向かって落ちていき、地球の中心に近いほうが重力加速度は大きいので、やがてボール間の横方向の間隔は縮み、縦方向の間隔は伸びる。

このように、一つの系の中で場所によって重力が異なることによって見かけ上生じる力を**潮汐力**と言う。潮汐力によって4つのボールの配置が変化した、と考えても良いし、重力の影響で、時空が平坦でなくなったと考えても、全く同じ事である(等価原理により、両者は区別できない)。潮汐力の影響が無視できるほど小さな領域で局所慣性系  $K$  を定義することができ、それに相対運動する局所慣性系  $K'$  との間の座標変換はローレンツ変換で与えられる。一方、潮汐力の影響が無視できないほど大きな空間を含んだ系  $L$  を定義すると、ここではニュートンの第一法則がなりたっていないので、これは慣性系ではない。

一般に、グローバルな慣性系は定義できない(時空は一様でない)ので、(2.4)は成立せず、代わりに、二つの局所慣性系座標の間に、

$$ds^2 \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 - (c dt)^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - (c dt')^2 \quad (2.32)$$

が成立する。 $ds^2$  をメトリック(計量)と呼ぶ。**一般相対性理論**によれば、任意の座標変換に対して、局所的な世界間隔は不変である。

### 2.3.2 シュワルツシルド時空

質量  $M$  を持ち、回転していない球対称な天体を考えよう。重力の影響により、その周りの時空は平坦ではない。それを、**シュワルツシルド時空**と呼ぶ<sup>9</sup>。その名前は、そのような状

<sup>8</sup>地上で「無(微小)重力実験」を行っている研究者は、実験カプセルを自由落下させる際に無重力を実現する「微小重力実験塔」や、飛行機のエンジンを切って放物線飛行(パラボリックフライト)する際に実現する微小重力状態を使っています。日本無重量総合研究所のウェブサイト(<http://www.mglab.co.jp>)には、無重力実験の動画がいろいろあって面白いです。また、「無重力の町」北海道上砂川町には、世界で最大規模の無重力実験施設があったのですが、2003年に惜しまれながら閉鎖されたそうです(<http://www.noobowsystems.com/scenes/0108-zerogravity/zerogravity.html>)。

<sup>9</sup>回転している天体の周りの時空が**カー時空**である。

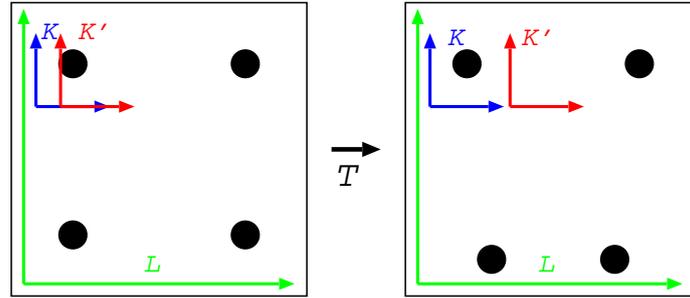


Figure 2.1: ある系において、左側のようにボールが配置されていたのが、しばらく時間がたつと、右側ようになった。これは、地球の中心に向かって落下していくエレベーターの中を模式的に示したもの。

況を一般相対論で記述する**アインシュタイン方程式**の解を、シュワルツシルドが発見した事による。

球対称だから、世界間隔を表わすのに、極座標を用いると便利である。天体の近く、動径座標  $r$  の球殻上の観測者が計る時間を  $dt_{shell}$ 、 $r$  に沿って直接測る距離を  $dr_{shell}$  とすると、

$$ds^2 = dr_{shell}^2 + r^2 d\phi^2 - c^2 dt_{shell}^2 \quad (2.33)$$

である。ここで、動径座標  $r$  は円周を  $2\pi$  で割った量として定義される<sup>11</sup>。

十分遠方の観測者が乗っている座標を  $r, \phi, t$  とすると、メトリックは

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} + r^2 d\phi^2 - c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) dt^2 \quad (2.34)$$

と書けることがわかっている。これをシュワルツシルドメトリックと呼ぶ。 $c$  は光速、 $G$  は万有引力定数である。 $2GM/c^2$  が、質量  $M$  の天体の**シュワルツシルド半径**である。

太陽と地球のシュワルツシルド半径は覚えておこう。 $G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$ 、 $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、太陽質量  $= 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、地球質量  $= 5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}$  だから、太陽のシュワルツシルド半径は、2.95 km、地球のシュワルツシルド半径は 8.87 mm<sup>12</sup>。

(2.33) と (2.34) を比較して、

$$dr_{shell} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}} \geq dr \quad (2.35)$$

(2.35) は、直接測った動径方向の長さは、円周を  $2\pi$  で割った長さよりも長いことを示している。具体的な例を考えてみよう。仮に太陽質量のブラックホールがあり (シュワルツシルド半径は 2.95 km)、 $r = 4 \text{ km}$  から  $r = 5 \text{ km}$  までの距離を直接、巻き尺を使って計ってみよう。その長さは、

$$\Delta r_{shell} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{r} dr}{\sqrt{r - 2GM/c^2}}. \quad (2.36)$$

<sup>11</sup>たとえばブラックホールの場合は、シュワルツシルド半径より内側が見えないので、半径を直接測れない。

<sup>12</sup>3 km, 9mm と覚えておけば大体事足りる。

ここで、 $r = z^2$  とすると、ちょっと面倒だが積分は計算できて、

$$\Delta r_{shell} = \left| z \sqrt{z^2 - 2GM/c^2} + 2GM/c^2 \ln \left[ z + \sqrt{z^2 - 2GM/c^2} \right] \right|_{z_1}^{z_2}. \quad (2.37)$$

$z_1 = 2$ ,  $z_2 = \sqrt{5}$ ,  $2GM/c^2 = 2.954$  を代入すると、

$$\Delta r_{shell} = 7.036 - 5.313 = 1.723 \text{ km} \quad (2.38)$$

が得られる。歪んでいない (=重力が存在していない) 空間では、当然、この距離は 1 km になるはずだが。

また、(2.33) と (2.34) から

$$dt_{shell} = \sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} dt \leq dt \quad (2.39)$$

である。(2.39) は、重力が強いところでは、時間の進み方が遅いことを示している。特にシュワルツシルド半径、 $r \approx 2GM/c^2$  においては、 $dt_{shell}$  に対しても  $dt$  は無限大になる。よって、たとえばブラックホールに一定間隔で光を出しながらモノが落ちていくようすを無限遠方から眺めると、シュワルツシルド半径に近づくにつれてその間隔は伸びていき、やがて無限になる (モノがブラックホールに落ちるところは決して観測できない! )。

また、天体の近く  $r$  で時間間隔  $dt_{shell}$  の間に  $N$  個の光波が発射されたとき、その場所における光の振動数は  $\nu_{shell} = N/dt_{shell}$ 、無限遠方で観測した同じ光の振動数は  $\nu = N/dt$  であるが、(2.39) より、

$$\nu = \sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} \nu_{shell} \leq \nu_{shell} \quad (2.40)$$

である。これは、強い重力場中から放出された光が、無限遠方で観測すると振動数が小さいほうにずれる (光の波長が長いほうにずれる) ことを示している。これが**重力赤方偏移**である。

### 2.3.3 シュワルツシルド時空の GPS への応用

地球の半径はそのシュワルツシルド半径に比べてはるかに大きいから、一般相対性理論の効果は、日常生活では、ほとんど効いてこない。しかし、非常に精密な測定によって、一般相対性理論の効果が観測されることがある。その例が GPS (Global Positioning System) である。GPS は、地球の周りをそれぞれ 12 時間で周回する 24 個の衛星を用いている。3 個の衛星からの正確な距離がわかれば、地球上あらゆる場所の位置が正確にわかる。衛星からの距離は、光の発射時刻と受信時刻の差に光速を掛けて求める。時刻の補正には 4 つめの衛星を使う。地球上のどこからでも、(視界が開けていれば) 常に 4 つの衛星が受信できるように、衛星軌道が配置されている。

地球表面で自転運動している観測者と GPS 衛星上で公転運動している観測者を考える<sup>13</sup>。式 (2.14) と同様に一般相対論でも固有時を考えることができる。式 (2.33) から、天体から動径座標一定 ( $dr_{shell} = 0$ ) の距離で公転運動している座標系に乗った人 ( $d\phi = 0$ ) の計る固有時間を  $d\tau$  とすると、

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 \quad (2.41)$$

<sup>13</sup>地球は回転しているので、厳密にはシュワルツシルドメトリックではなくカーメトリックを使う必要があるが、地球の回転速度は光速に比べて十分小さいので、シュワルツシルドメトリックで十分良い近似になっている。

だから、(2.34) と合わせて、

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} - r^2 d\phi^2 \quad (2.42)$$

となる。十分遠方の観測者がこの運動を見ているとき  $dr = 0$  だから、

$$c^2 d\tau = c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) dt^2 - r^2 d\phi^2 \quad (2.43)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} c^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 &= c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \\ &= c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) - v^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

ここで、 $v$  は、地表の自転速度、または GPS 衛星の速度である。地球表面の観測者の固有時間を  $dt_{earth}$ 、人工衛星上の観測者の固有時間を  $dt_{satellite}$  とすると、(2.44) を、地表と GPS 衛星について比を取って、

$$\left(\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{satellite}}\right) - (v_{satellite}/c)^2}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{earth}}\right) - (v_{earth}/c)^2}. \quad (2.45)$$

この式が、地表における時間と、GPS 衛星における時間の進み方のずれを表す。 $r_{satellite}, r_{earth}$  は地球のシュワルツシルド半径に比べてはるかに大きいから、いくつかの近似が可能である。

$$\begin{aligned} \frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} &\approx \frac{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{satellite}} - (v_{satellite}/c)^2\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{earth}} - (v_{earth}/c)^2\right)^{1/2}} \\ &\approx \left(1 - \frac{GM/c^2}{r_{satellite}} - (v_{satellite}/c)^2/2\right) \left(1 + \frac{GM/c^2}{r_{earth}} + (v_{earth}/c)^2/2\right) \\ &\approx 1 - \frac{GM/c^2}{r_{satellite}} - (v_{satellite}/c)^2/2 + \frac{GM/c^2}{r_{earth}} + (v_{earth}/c)^2/2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

ここで、 $v_{satellite}^2, v_{earth}^2$  の項は、特殊相対論だけからも出てくる事に注意しよう。 $G$  が入っている項が、一般相対論の効果、重力による時間の進み方の違いを表す。この式からただちにわかるように、 $(GM/c^2)/r_{earth}$  と  $(GM/c^2)/r_{satellite}$  はどちらも非常に小さな数であるが、その違いが無視できない、ということが本質的である。

GPS 衛星の周期が 12 時間ということから、 $r_{satellite}$  と  $v_{satellite}$  を求めよう。円運動の公式から<sup>15</sup>、

$$\frac{v_{satellite}^2}{r_{satellite}} = \frac{GM}{r_{satellite}^2}, \quad (2.48)$$

$$P_{satellite} = \frac{2\pi r_{satellite}}{v_{satellite}}. \quad (2.49)$$

<sup>15</sup> この計算には一般相対論を使っていないが、それで精度は十分である。

これを变形して、

$$r_{\text{satellite}} = \left( \frac{GM P_{\text{satellite}}^2}{4\pi^2 c^2} \right)^{1/3} c^{2/3}, \quad (2.50)$$

$$v_{\text{satellite}} = \left( \frac{2\pi GM}{P_{\text{satellite}} c^2} \right)^{1/3} c^{2/3}. \quad (2.51)$$

$GM/c^2 = 4.4 \times 10^{-3} \text{m}$ 、 $P=12 \text{時間}=43200 \text{sec}$  を代入して、 $r_{\text{satellite}} = 2.66 \times 10^7 \text{m}$  (2万6600km)、 $v_{\text{satellite}} = 3.87 \times 10^3 \text{m/s}$  となる。

$r_{\text{earth}} = 6.37 \times 10^6 \text{m}$  だから、(2.47) に代入して、運動による  $v_{\text{satellite}}^2$ 、 $v_{\text{earth}}^2$  の項を無視すると、

$$\frac{dt_{\text{satellite}}}{dt_{\text{earth}}} \approx 1 - 1.65 \times 10^{-10} + 6.91 \times 10^{-10} \approx 1 + 5.26 \times 10^{-10}. \quad (2.52)$$

重力の効果だけを考慮した場合、この割合で、地表の時間よりも人工衛星上の時間のほうが、速く進むことになる。ただし、すでに特殊相対論で学んだように、「速く進む時計の時間はゆっくり進む」。よって、さらに人工衛星の速さと地表の速さの違いを考慮すると、このずれは小さくなるはずである。

$v_{\text{earth}}$  として赤道上の値を使うと、 $v_{\text{earth}} = 4 \times 10^7 \text{m}/86400 = 463 \text{m/s}$ 。(2.47) に  $v_{\text{satellite}}$ 、 $v_{\text{earth}}$  の項も入れて、

$$\frac{dt_{\text{satellite}}}{dt_{\text{earth}}} \approx 1 + 5.26 \times 10^{-10} - 8.32 \times 10^{-11} + 0.12 \times 10^{-11} \approx 1 + 4.44 \times 10^{-10}. \quad (2.53)$$

一日 (86400 秒) で、このずれは、38 マイクロ秒になる。その間に、光は 11km も進む! これを補正しないと、GPS は全く使いものにならないだろう。



## Chapter 3

# ブラックホール

### 3.1 ブラックホールとは？

通常の星(主系列星)は、核融合反応による圧力で形を保っていて、その半径はシュワルツシルド半径よりもはるかに大きい。巨大な星が進化するにつれて核融合反応が進み、星の芯には鉄のコアができる。星が超新星爆発を起こした後に、圧縮されたコアが残される。そのコアが太陽質量の約3倍以下であれば、それは**中性子星**になる。中性子星は中性子間の核力により形を保っている。もしそのコアが太陽質量の約3倍以上であれば、中性子間の核力でもその重さを支えられなくなり、**重力崩壊**を起こしてブラックホールになる。回転していないブラックホールの半径(のようなもの)が、シュワルツシルド半径と考えてよい。

実際、そのようなブラックホール天体が、数多く観測されている。ブラックホールまたは中性子星が通常の星と**連星系**を成しているとき、通常の星からブラックホールまたは中性子星にモノが回転しながら落ちていくときに円盤を作る。これを**降着円盤**と呼ぶ。降着円盤のなかの摩擦により、その温度は数千万度になり、それが**黒体放射**によってX線を放出する。このようにして、中性子星はブラックホールは、明るいX線源として観測される。

では、中性子星とブラックホールはどのようにして見分けるのだろうか？X線の性質から、中心天体が中性子星かブラックホールか推測はできるのだが<sup>1</sup>、天体の質量を求めるのが最も確実な方法である。連星系において、中性子星またはブラックホールと対をなしている**伴星**のスペクトル線の**ドップラー効果**からその運動がわかり、中性子星またはブラックホールの及ぼす重力を測定できる。それからその天体の質量に制限がつけられるのである。それが太陽質量の約3倍以上であれば、ブラックホールである。

もう一種類、太陽の数百万倍以上の質量を持つブラックホールも存在する。それらは多くの銀河の中心に存在する。やはり、そのまわりの星や円盤の運動を観測することによって、中心天体の重力がわかり、そこから質量が計算できる。我々の銀河の中心にあるブラックホールの質量は、370万太陽質量である<sup>2</sup>。

### 3.2 脱出速度

ニュートン力学で考えると、質量  $M$ 、半径  $r$  の天体の**脱出速度**  $v_{escape}$  は以下の式から決まる。

$$\frac{1}{2}v_{escape}^2 = \frac{GM}{r} \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>これは私の大学院時代からの研究テーマの一つです。

<sup>2</sup>[http://www.mpe.mpg.de/ir/GC/res\\_dance.php](http://www.mpe.mpg.de/ir/GC/res_dance.php)などを参考に。

脱出速度は、星の質量が大きいほど、半径が小さいほど大きくなる。上式より、 $r$  が無限に小さくなると  $v_{escape}$  は無限に大きくなるが、それが光速を超える事はない。だから、ブラックホールは、その脱出速度が光速であるほど重くて小さい天体、あるいは、同じ事であるが、無限遠方からモノを落としたとき、落下速度が光速になるほど重くて小さい天体、と考えてもよい。実際、(3.1) より脱出速度が光速  $c$  となる半径は、

$$r = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.2)$$

となり、これは質量  $M$  の天体のシュワルツシルド半径に一致する<sup>3</sup>。

### 3.3 ブラックホールの「密度」

仮にブラックホールをシュバルツシルト半径  $R_s$  を持つ古典的な球と思って、その密度  $\rho$  を質量/球の体積で定義しよう。

$$\rho = \frac{M}{4\pi R_s^3/3} \approx 2 \times 10^{16} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-2} \text{ g/cm}^3.$$

普通の物質の質量は半径の 3 乗に比例するが、質量が半径に比例するというのがブラックホールの特徴。よって、“密度” は半径 (質量) の 2 乗に反比例する。 $\gtrsim 10^8 M_\odot$  のブラックホールの密度は水の密度よりも小さくなる! 「ブラックホールは高密度」というわけではない。

ブラックホールの「密度」は物理的な実体ではないが、このようにして見積もった「密度」の大小が「潮汐力」の目安になる。ブラックホールに落ちていく物体のブラックホールに近い側と遠い側で働く重力が異なり、その差として潮汐力が働く。ブラックホールの質量が大きい (小さい) ほど、潮汐力は小さい (大きい)。よって小さな (恒星質量) ブラックホールに物体が落ちていくとき、潮汐力によって物体はばらばらに壊れてしまう。巨大ブラックホールの潮汐力は小さいので、物体はそのまま落ちていき、シュワルツシルド半径を超える。

### 3.4 観測装置の分解能とブラックホールの直接撮像

ブラックホール自身は光を出さないわけだが、仮にブラックホールとその周辺の降着円盤を撮像したらどのように見えるだろうか? おそらく、明るく輝く降着円盤の中心に、ブラックホールが黒い影として見えるのだろう (「ブラックホールシャドウ」)。2011 年現在、技術的にそれはまだ実現していないが、ブラックホールシャドウとしてどのような画像が観測されるか、多くの計算がなされている<sup>4</sup>。

電波や X 線を放出する降着円盤の内縁がブラックホールにどこまで近づけるか、という議論があるのだが、ここでは単純に、シュワルツシルド半径をそのようなブラックホールシャドウの半径だと考えてみよう。そして、その見かけの広がりや現在および将来の観測装置の性能 (位置分解能) と比較してみよう。

まず、天文観測装置の分解能は日常的に用いられる視力と比較するとわかりやすい。視力が 1 ということは、視力検査で使われる輪っかの 1.5mm の切れ目を 5m 離れたときに認識

<sup>3</sup>この導出は一般相対論を使っていないので、厳密ではないことに注意。

<sup>4</sup>この分野の第一人者である大阪教育大学の福江先生の資料などを参考に: [http://quasar.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/~fukue/lecture/bhshadow\\_2010.pdf](http://quasar.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/~fukue/lecture/bhshadow_2010.pdf)

できる分解能のことである。その切れ目の広がり  $1.5\text{mm}/5000\text{mm}=0.0003$  ラジアン。これを分角に直すと、 $0.0003/\pi \times 180 \times 60 \approx 1'$ 。つまり、視力 1 ということは、位置分解能 1 分角、視力 2 ということは位置分解能 0.5 分角に対応する。

多くの地上望遠鏡の位置分解能は、一秒角、1" 程度 (視力 60) であり、これはほぼ大気の影響によって決まっている。しかし、技術的に大気の影響を補正することができて (**補償光学**)、その場合の位置分解能は以下の原理的な値に近づく。

口径  $D$  の望遠鏡を用いて波長  $\lambda$  の光で観測したときの原理的な位置分解能は、ほぼ

$$\lambda/D \quad (3.3)$$

で与えられる<sup>5</sup>。たとえば、口径 8.2m のすばる望遠鏡を用いて、波長 2.2 ミクロンの赤外線 で天体を観測したときの原理的な位置分解能は、

$$2.2 \times 10^{-6}/8.2 \approx 2.7 \times 10^{-7} \text{ radian} \approx 0.06''$$

であるが、(観測環境の良いマウナケア山頂できえも) 大気揺らぎによって、これは約 10 倍悪くなってしまう。補償光学の技術を用いて、大気揺らぎを打ち消すように光学系を操作することによって、原理的な位置分解能に近い値、0.063" を達成することができる<sup>6</sup>。

さて、ではさらに観測装置の位置分解能を上げるにはどうすればよいだろうか? 式 (3.3) からわかるように、望遠鏡の口径を広げて、波長を短くしてやればよい。望遠鏡の口径を大きくすることには限界があるが、二つ以上の離れた望遠鏡で観測した電磁波を干渉させる、**干渉計**という技術がある。これによって、たとえば地上の電波望遠鏡と人工衛星に積んだ電波望遠鏡を用いて、地球よりも大きいサイズの望遠鏡で観測したのと同じ位置分解能を達成することができる。それを世界で最初に (今のところ最後でもあるが) 達成したのが、宇宙科学研究所のはるか衛星である<sup>7</sup>。はるかの基線長は 3 万 km、主な観測波長は 6cm であったので、位置分解能は、 $6/(3 \times 10^9) = 2 \times 10^{-9} \text{ radian} \approx 400\mu$  秒角となる。これが当時では人類が達成した最高の位置分解能で、視力 15 万に対応する。

私たちの銀河の中心までの距離は 8kpc であり<sup>8</sup>、そこには質量 370 万  $M_{\odot}$  のブラックホールが存在する。その見かけ上の広がり、

$$\frac{370 \times 10^4 \times 3 \times 10^5 [\text{cm}]}{8 \times 10^3 \times 3.09 \times 10^{18} [\text{cm}]} \approx 4.4 \times 10^{-11} \text{ radian} \approx 9\mu \text{ arcsec}. \quad (3.4)$$

となる。これはおよそ視力 700 万に対応し、「はるか」衛星でもまだまだ分解能が足りないことがわかるが、さらに電波干渉計衛星の観測波長を短くすれば、この位置分解能を達成し、ブラックホールシャドウを観測することは原理的に可能である。近年、地上の電波干渉計で波長の短いミリ波を用い、より高い位置分解能が実現している。それによって、銀河中心のブラックホールの大きさに制限をつけたという報告もある<sup>9</sup>。

干渉計は、波長が短くなればなるほど、より精密な制御が必要になるので技術的に難しくなる。2011 年現在、地上での光干渉計の観測は始まっているが、宇宙空間での光干渉計

<sup>5</sup> 回折像の第一極小点までの半径で、点像分布関数の FWHM(p.75) に近い値。矩形開口では  $\lambda/D$ 、円形開口では  $1.22\lambda/D$ 。

<sup>6</sup> [http://subarutelescope.org/Pressrelease/2006/11/20/j\\_index.html](http://subarutelescope.org/Pressrelease/2006/11/20/j_index.html)

<sup>7</sup> [http://www.isas.jaxa.jp/j/japan\\_s\\_history/chapter09/02/07.shtm](http://www.isas.jaxa.jp/j/japan_s_history/chapter09/02/07.shtm)

<sup>8</sup> 天文学においては、距離の単位として pc (パーセク) が用いられる。それは、地球の公転による見かけ上の星の位置のふらつき、**年周視差**が 1" となる星までの距離として定義される。地球と太陽までの距離 (1 天文単位) は 1 億 5 千万 km だから、 $1 \text{ pc} = 1.5 \times 10^{13} [\text{cm}]/(1/60/60/180 \times \pi) \approx 3.09 \times 10^{18} [\text{cm}]$ 。

<sup>9</sup> <http://www.nature.com/nature/journal/v455/n7209/abs/nature07245.html>

はまだ実現していない。究極的には、宇宙空間で遠く離れた **X線干渉計**<sup>10</sup>が実現できれば、それが人類が持ち得る究極の位置分解能を持つ観測装置になるだろう。遠い将来、人類はX線干渉計を用いて、ブラックホールのX線写真を撮れるようになるのかも知れない<sup>11</sup>。

## 3.5 ブラックホールの光度

### 3.5.1 エディントン限界光度

コンパクト天体に落ちていく物質は、天体が放射する光による圧力を受ける。球対称の場合、物質がコンパクト天体から受ける重力と光による圧力が釣り合う限界光度があり(エディントン限界、 $L_{Edd}$ )、天体はそれ以上明るくなることはできない。ここでは簡単のために、天体に落ち込む物質として水素だけを考える。水素の質量を  $m_H$  とし、重力と輻射圧のつりあいの式は以下のように書ける。

$$\frac{\sigma_T}{c} \frac{L_{Edd}}{4\pi r^2} = \frac{GMm_H}{r^2}. \quad (3.5)$$

ここで  $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$  は**トムソン断面積**<sup>12</sup>で、電子が光を散乱する際の断面積である。これから、

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c GM}{\sigma_T/m_H} = \frac{4\pi c GM}{\kappa_T}. \quad (3.6)$$

$\kappa_T$  はトムソン散乱による**質量吸収係数**で、 $\sim 0.4 \text{ cm}^2/\text{g}$  である。よって、

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c^3}{\kappa_T} \frac{GM_\odot}{c^2} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \approx 1.3 \times 10^{38} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) [\text{erg/s}]. \quad (3.7)$$

白色矮星の最大質量(チャンドラセカール限界)は  $1.4M_\odot$  で、それが中性子星の平均質量に対応している。中性子星の最大質量は  $\sim 2M_\odot$  で、それより重いコンパクト星はブラックホールである<sup>13</sup>。ブラックホールについては、(3.7)に従って、質量が大きいほど、明るく光ることができる。

### 3.5.2 二種類のブラックホールと中間質量ブラックホール

典型的に恒星質量ブラックホールの質量は  $3-10M_\odot$  なので、その最大光度は  $10^{38}-10^{39} \text{ erg/s}$  程度である。一方、活動的銀河中心核の中心にある巨大ブラックホールの質量は  $> 10^6 M_\odot$  なので、その最大光度は  $> 10^{44} \text{ erg/s}$  となりうる。

近年、近傍の渦巻き銀河中に、 $10^{40}-10^{41} \text{ erg/s}$  程度の光度をもつX線天体が次々と見つかり、Ultra-luminous X-ray Sources (ULXs) と呼ばれている。銀河の中心から離れて複数見つかったので、活動的銀河中心核(巨大ブラックホール)とは考えられず、恒星質量ブラックホールとするとそのエディントン限界光度を大きく超えている。よって、それらの天体がエディントン限界光度を超えていないとしたら、 $100-1000M_\odot$  の質量を持つ「中間質量ブラックホール」ではないか、という説がある。

<sup>10</sup> そういう計画はあります：<http://maxim.gsfc.nasa.gov>

<sup>11</sup> 2058年に実現したりして;) <http://www.isas.ac.jp/j/mailmaga/backnumber/2010/back289.shtml>

<sup>12</sup> 断面積という概念に慣れておこう。文字通り、一つの電子がこれだけの面積をもって、光の道筋に立ちはだかっていると思ってよい。

<sup>13</sup> 質量以外にブラックホールの観測的証拠はなかなか見つからないのだが、「ブラックホールしかありえない」、ということ。

### 3.6. INNERMOST STABLE CIRCULAR ORBIT (ISCO) とブラックホールのエネルギー効率27

一方、球対称でない場合、輻射はエディントン限界光度を大きく超えることができ、ULXs はやや重めの恒星質量ブラックホール ( $\lesssim 30M_{\odot}$ ) が、超限界光度 (Super-Eddington luminosity) で輝いている状態であるという説もある。

## 3.6 Innermost Stable Circular Orbit (ISCO) とブラックホールのエネルギー効率

ニュートン力学では、質量  $M$  の天体の周りの安定円軌道について、その最小半径は存在しない。実際、無限小の半径も可能で、そこでは重力ポテンシャルが無限大になるので、破綻している。

一般相対性理論では、ブラックホールの周りの質点の運動を解くと安定な円軌道の最小半径 (Innermost Stable Circular Orbit; ISCO) が、ブラックホールの角運動量  $a$  ( $0 \leq a \leq 1$ ) の関数として得られる。それは、回転していないブラックホールの周辺、シュワルツシルド時空の場合 ( $a = 0$ )、

$$R_{ISCO} = 3R_S = \frac{6GM}{c^2} \quad (3.8)$$

である。ブラックホールの回転と円運動の方向が一致しているときは、 $a$  とともに  $R_{ISCO}$  は減少し、角運動量最大 ( $a = 1$ ) のとき、

$$R_{ISCO} = 0.5R_S = \frac{GM}{c^2} \quad (3.9)$$

である。

無限遠から質量  $m$  の物質が角運動量を受けて (渦を巻いて) 落ち込んでいき、降着円盤を作り、最終的に  $R_{ISCO}$  に達すると考える。簡単のためにニュートン力学で考えると、その場における全エネルギーを  $E$ 、回転速度を  $v$  として、

$$E = -\frac{GMm}{R_{ISCO}} + \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.10)$$

$$= -\frac{GMm}{2R_{ISCO}}. \quad (3.11)$$

ここで運動方程式、

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad (3.12)$$

を用いた。つまり、質量  $m$  の物質あたり  $\frac{GMm}{2R_{ISCO}}$  のエネルギーが降着円盤中で解放されるわけだが、単位時間あたり  $\dot{m}$  の質量の物質が落ちるとき、円盤の光度は、

$$L_{disk} \approx \frac{GM\dot{m}}{2R_{ISCO}} \quad (3.13)$$

となる。 $R_{ISCO}$  として、シュワルツシルドブラックホールの場合、極端なカーブラックホール ( $a = 1$ ) の場合、それぞれについて (3.8)、(3.9) を代入し、

$$L_{disk} \approx \frac{1}{12}\dot{m}c^2 \approx 0.08\dot{m}c^2 \quad (\text{Schwarzschild black hole}) \quad (3.14)$$

$$L_{disk} \approx 0.5\dot{m}c^2 \quad (\text{Extreme Kerr black hole}) \quad (3.15)$$

が得られる。厳密に、一般相対論的な計算によると上記の係数（エネルギー効率）はそれぞれ、 $1 - \sqrt{8/9} \approx 0.057$ ,  $1 - \sqrt{1/3} \approx 0.42$  である。

一方、熱核融合反応の時、水素が鉄に達するまでの平均で、エネルギー効率は 0.009 である。**ブラックホールへ物質が落ち込む際の重力エネルギーの解放が非常に効率的であること**を理解しよう。

## 3.7 ブラックホールの（周りの降着円盤の）観測

### 3.7.1 標準降着円盤の温度の半径依存性

質量  $M$  のブラックホールの周りの標準降着円盤（＝幾何学的に薄く、光学的に厚い）を考えよう。物質は質量降着率  $\dot{M}$  でブラックホールに落ちていくとする。物がディスク中で  $dr$  落ちる間に、解放される重力ポテンシャルの半分（ビリアル定理）が熱化され、ディスクの両面から黒体輻射で放出されるとすると、

$$2 \cdot 2\pi r dr \sigma T_{eff}^4 \propto \frac{1}{2} d \left( -\frac{GM\dot{M}}{r} \right) = \frac{GM\dot{M}}{2r^2} dr,$$

$$T_{eff}(r) \propto \left( \frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}. \quad (3.16)$$

上式は半径依存性は正しいが、境界条件を入れていないため、ファクターは正しくない。内縁の境界条件（内縁で温度=0）を入れた正確な式は、

$$T_{eff}(r) = \left( \frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3} \left( 1 - \sqrt{r_{in}/r} \right) \right)^{1/4}. \quad (3.17)$$

内縁のごく近傍からの輻射は観測には効かない（温度が低く面積も小さいため）ので、**光学的に厚い標準円盤では、ディスクの有効温度の半径依存性は  $r^{-3/4}$  である**ことを覚えておくと良い<sup>14</sup>。

### 3.7.2 Multicolor disk blackbody の光度

ディスクの内縁の境界条件を無視し、温度の半径依存性を  $r^{-3/4}$  とし、各半径で黒体輻射をしている場合を考える。この近似に基づいた降着円盤スペクトルモデルを“Multicolor disk blackbody”モデルと呼び、観測データを記述するのに良く用いられる。この円盤の光度を求めてみよう。すなわち、内縁半径と温度をそれぞれ  $r_{in}, T_{in}$  として、

$$T(r) = T_{in} (r/r_{in})^{-3/4}. \quad (3.18)$$

円盤の表と裏を考慮して、内縁から外縁 ( $r_{out}$ ) まで積分して、

$$\begin{aligned} L_{disk} &= 2 \int_{r_{in}}^{r_{out}} 2\pi r \sigma T(r)^4 dr \\ &= 4\pi\sigma T_{in}^4 r_{in}^3 \int_{r_{in}}^{r_{out}} r^{-2} dr \\ &= 4\pi\sigma T_{in}^4 r_{in}^3 (1/r_{in} - 1/r_{out}) \approx 4\pi\sigma r_{in}^2 T_{in}^4. \end{aligned} \quad (3.19)$$

ただし、ここで  $r_{out} \gg r_{in}$  を用いた。

<sup>14</sup>質量降着率が上がって「スリムディスク」になると、それに伴い指数が  $-0.75$  から  $-0.5$  まで変化する。

### 3.7.3 ブラックホールの周りの降着円盤の温度

シュワルツシルド時空では、 $R_{ISCO} = 3R_s$  である。これを (3.19) の  $r_{in}$  とし、降着円盤がエディントン限界光度で光っているとしよう<sup>15</sup>。

$$L_{Edd} = \frac{4\pi cGM}{\kappa} = 4\pi\sigma(3R_s)^2 T_{in}^4 \quad (3.20)$$

より温度を求めると、

$$T_{in} \approx \left(\frac{c^3}{18\sigma\kappa}\right)^{1/4} \left(\frac{2GM_\odot}{c^2}\right)^{-1/4} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/4} \approx 2 \text{ keV} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/4} \approx 1 \text{ keV} \left(\frac{M}{10M_\odot}\right)^{-1/4}. \quad (3.21)$$

よって、最大光度（エディントン限界）で光っている質量  $\sim 10M_\odot$  のブラックホールの周りの降着円盤は、 $\sim 1 \text{ keV}$  の温度を持つので、X線領域で観測されることがわかる。

ブラックホールの質量が大きいほど、降着円盤の温度が低くなることに注意。たとえば、太陽の  $10^9$  倍の質量を持つブラックホール<sup>16</sup>の降着円盤の温度は  $\sim 10 \text{ eV}$  となり、これは紫外線領域で観測される。

(3.20) より、回転しているブラックホールの場合 ( $0 < a \leq 1$ )、 $R_{ISCO}$  が小さくなるとディスクの内縁の温度  $T_{in}$  が上がることがわかる。これはただちに降着円盤スペクトルに影響を与える。X線による降着円盤スペクトルの観測から円盤の内縁半径、 $R_{ISCO}$  を求め、それからブラックホールのスピンの制限を与える試みが行われている<sup>17</sup>。

<sup>15</sup>エディントン限界光度は球対称を仮定して求められたので、円盤からの放射の際には必ずしもそれが最大高度ではないが、幾何学的に薄い標準降着円盤の場合、最大高度はほぼエディントン限界光度に等しいとわかっている。なお、「スリムディスク」のような非標準降着円盤の場合、円盤が（どれだけ）エディントン限界光度を超えられるかどうかはホットな話題となっている

<sup>16</sup>このような巨大ブラックホールが、**活動的銀河中心核 (Active Galactic Nuclei; AGN)** の正体と考えられている。

<sup>17</sup>正確な降着円盤スペクトルモデルには当然相対論的な効果を考慮しなくてはならない。



## Chapter 4

# 人工衛星による観測

X線は大気を通過しないので、X線天文学の観測は人工衛星を用いて行う必要がある。同様に遠赤外線、紫外線、ガンマ線観測もスペースから実施する必要がある。その他にも、スペースからの観測には大気によるシーイングを受けない(ハッブル宇宙望遠鏡、ひので)、基線長を稼げる(はるか)等、大きなメリットがある。人工衛星を用いた天文観測に習熟するには、人工衛星の姿勢や軌道について知る必要がある。ここではその概略を学んでみよう。

### 4.1 座標変換とオイラー角

#### 4.1.1 天球座標

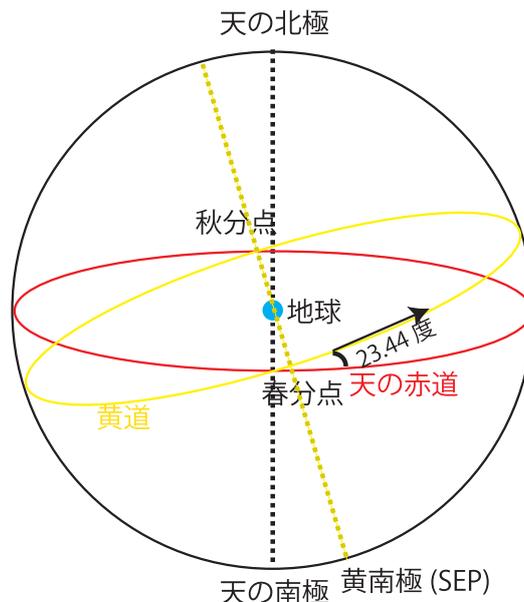


Figure 4.1: 天球、赤道、黄道の関係

天文学では、天体の「見かけ」の位置を表すのに、仮想的な**天球**という概念を用いる。宇宙が球であり、その中心に私たちがいる(地球がある)、というイメージである。地球の自

転軸を延ばして行って、天球とぶつかったところが、点の**北極**。地球の赤道を上げて行って、天球とぶつかったところが天の**赤道**。

地球の自転軸は、地球の公転面と垂直ではなく、 $23.^\circ44'$  傾いている<sup>1</sup>。太陽が一年を通じて天球上で通る道を**黄道**と呼ぶが、黄道は天の赤道と  $23.^\circ44'$  傾いている。太陽が天の赤道を南から北に横切る点が**春分点**、北から南に横切る点が**秋分点**。太陽が赤道面からいちばん北向きに離れる点が**夏至点**、南向きに離れる点が**冬至点**。文字通り、地球の公転運動によって、春分、秋分、夏至、冬至のときに太陽はこれらの点を通る。

地球上の経度 ( $0^\circ \sim 360^\circ$ )、緯度 ( $-90^\circ \sim +90^\circ$ ) を定義し、それで地球上の位置を表すように、天球上で、赤経 ( $0^\circ \sim 360^\circ$ )、赤緯 ( $-90^\circ \sim +90^\circ$ ) を定義し、それによって天体の位置を表す。グリニッジ天文台 (経度  $=0^\circ$ ) が地球上の経度の基準点であるように、赤経の基準点は春分点である。このように、天の赤道面を基準にした座標系が**赤道座標**である<sup>2</sup>。同様に天の黄道面を基準にした座標系が**黄道座標**である。

地球上と同様、天球上でも方角を東西南北で表わす。天の北極の方向が北、南極の方向が南、赤経が増える方向が東、減る方向が西。**地球上 (地球を外から見ている) と天球上 (天球を内から見ている) で東西の向きが逆になっている**ことに注意。つまり地図を上げたとき、北が上向きなら東は右 (右向きに経度が増加する)。一方、「天球図」においては、北が上向きなら、東は左 (左向きに経度が増加する)。

もう一つ良く使われるのが、我々の銀河系 (天の川) を基準に取った、**銀河座標**である。銀河中心の方向が**銀経** $=0$  度で (左向きに銀経が増加)、銀河面が**銀緯** $=0$  度に対応している。

任意の天体の位置を、赤道座標、黄道座標、銀河座標で表すことができる。図 4.2 は、これら 3 つの座標の間の変換を示したものである<sup>3</sup>。

たとえば、以下の 3 つは天球上で同じ位置を表わす<sup>4</sup>。

$$(\text{赤経}, \text{赤緯}) = (\alpha, \delta) = (281.^\circ00', -4.^\circ07')$$

$$(\text{銀経}, \text{銀緯}) = (l, b) = (28.^\circ463', -0.^\circ204')$$

$$(\text{黄経}, \text{黄緯}) = (\lambda, \beta) = (281.^\circ608', 18.^\circ927')$$

どうやってこのような座標変換を計算するのだろうか<sup>5</sup>? 以下では、それを考えてみよう。

<sup>1</sup>地球自転軸の傾きは 41000 年の周期で、 $22.^\circ2'$  から  $24.^\circ5'$  まで変化し、さらに 25800 年の周期で**歳差運動**している (コマの首振り運動と同じ)。これによって、赤道座標系は時間ともずれていくので、いつの時点の地球自転軸に準じた赤道座標系かを明示する必要がある。現在普通に使われているのは 2000 年**分点**であり、これを J2000 で表す。私が大学院に入った 1986 年頃は 1950 年分点のほうが広く使われていて、これを、B1950 と表す。例として、ブラックホール天体、白鳥座 X-1 の赤経赤緯は、 $(299.^\circ590', 35.^\circ201')$  (J2000),  $(299.^\circ120', 35.^\circ065')$  (B1950) である。

<sup>2</sup>天球の回転がまさに我々が日常使っている時刻と結びついているために、赤経を  $0^\circ$  から  $360^\circ$  で表す代わりに、0 時から 24 時で表すことがある。1 時間が  $15^\circ$  に対応する。通常通り、1 時間は 60 分、1 分は 60 秒。時、分、秒に対応する部分を hh, mm, ss.s としたとき、赤経を、hh:mm:ss.s と表記する。また、一般的に 1 度は 60 分角、1 分角は 60 秒角。これを、 $1^\circ = 60', 1' = 60''$  と表記する。赤緯を分角、秒角で表わすことも多い。たとえば、ある天体の赤経、赤緯を  $(281.^\circ00', -4.^\circ07')$  と書いても、 $(18:44:0.0, -4^\circ4'12'')$  と書いてもよい。

<sup>3</sup>この図を作った Fortran プログラムをホームページに上げておきますので、参考にしてください。

<sup>4</sup>ほぼ銀河面上 (銀緯が小さいことからわかりますね?)、銀河中心から  $28.^\circ5'$  離れて、X 線を強く放射している領域で、「僕の好きな空」です。日本やアメリカの人工衛星で X 線観測、チリやハワイの望遠鏡で赤外線観測をしました。すざく衛星の観測ログ、[http://darts.jaxa.jp/astro/tables/SUZAKU\\_LOG.html](http://darts.jaxa.jp/astro/tables/SUZAKU_LOG.html) にある、観測番号 (シークエンスナンバー) 500009010, 500009020 の "GALACTIC\_RIDGE" が、我々が提案したこの空の観測です。また、このときの衛星の姿勢を表すオイラー角が  $(281.0000, 94.0700, 184.4698)$  であることもわかります。

<sup>5</sup>たとえば、<http://heasarc.gsfc.nasa.gov/cgi-bin/Tools/convcoord/convcoord.pl> などで、座標変換のサービスを提供している。

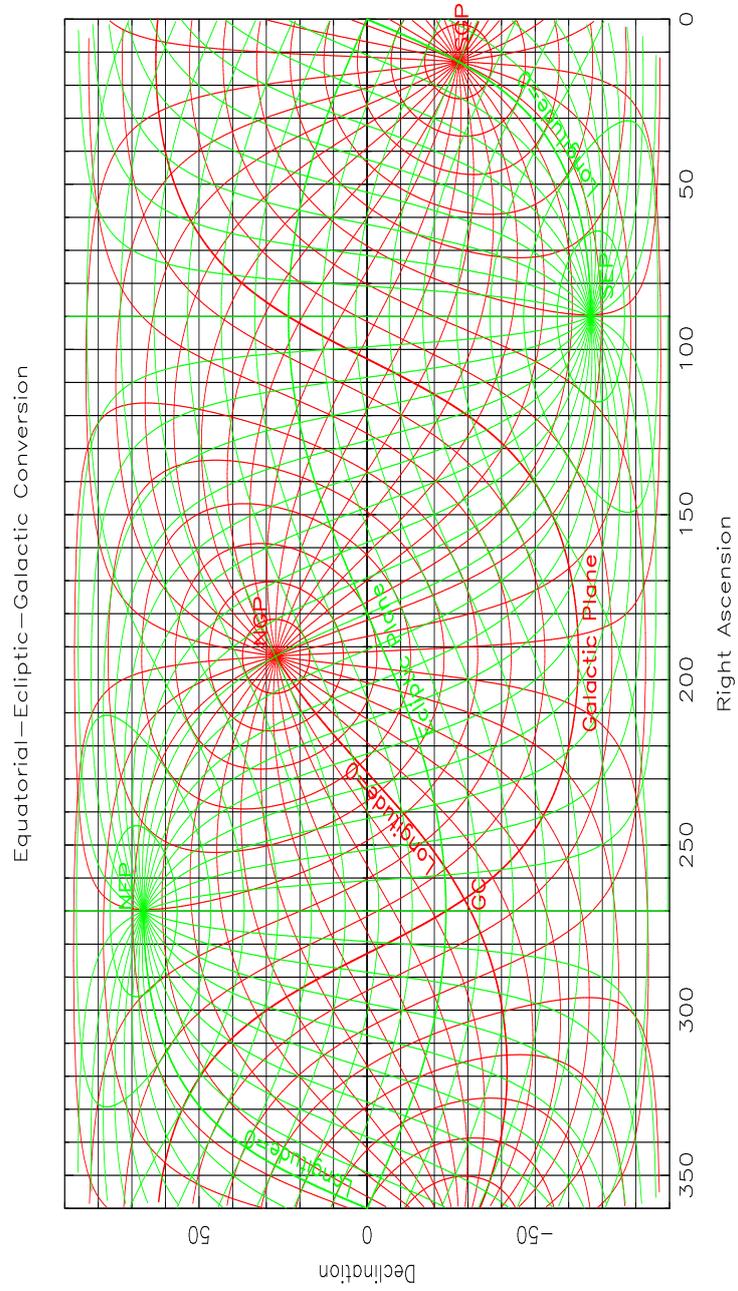


Figure 4.2: 赤道座標、黄道座標、銀河座標の関係

### 4.1.2 方向ベクトルと座標変換

赤経と赤緯を通常、 $(\alpha, \delta)$  で表す。長さが1で、 $(\alpha, \delta)$  の方向を表す**方向ベクトル**、 $\mathbf{p}$  を考えよう。春分点の方向を  $x$  軸、赤道面上、赤経 90 度を  $y$  軸、北極を  $z$  軸、とする右手系を考えよう。方向ベクトルの  $xyz$  座標は以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$  になることを、当たり前だけど念のために確認しておこう。ここで定義した  $x, y, z$  軸の基底ベクトルを、それぞれ  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  とすると、

$$\mathbf{p} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

である。

黄道座標系に基づいた、 $x'$  軸、 $y'$  軸、 $z'$  軸と、それぞれの基底ベクトル、 $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$  を考えよう。 $x'$  軸は春分点を向いていて、 $x'y'$  軸面が黄道面に一致している。同様に、銀河座標系に基づいた、 $x''$  軸、 $y''$  軸、 $z''$  軸と、基底ベクトル  $\mathbf{e}''_x, \mathbf{e}''_y, \mathbf{e}''_z$  を考える。 $x''$  軸は銀河中心を向いていて、 $x''y''$  平面は銀河面と一致している。

式 (4.2) で定義した方向ベクトル  $\mathbf{p}$  を、黄道座標系でも銀河座標系でも表わすことができる。

$$\mathbf{p} = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\mathbf{e}''_x, \mathbf{e}''_y, \mathbf{e}''_z) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

式 (4.1) と同じ関係が、黄道座標と  $(x', y', z')$  の間に、銀河座標と  $(x'', y'', z'')$  の間に、成立する。たとえば、ベクトル  $\mathbf{p}$  の銀河座標を  $(l, b)$  とすると、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b \cos l \\ \cos b \sin l \\ \sin b \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

これを逆に解いて、

$$\begin{pmatrix} l \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan^{-1}(y''/x'') \\ \tan^{-1}(z''/\sqrt{x''^2 + y''^2}) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

によって、銀河座標  $(l, b)$  を求めることができる。

以上まとめると、ある天体の赤経、赤緯  $(\alpha, \delta)$  を銀経、銀緯  $(l, b)$  に変換するには、式 (4.1) によって赤道座標系での方向ベクトルの3成分  $(x, y, z)$  を求め、それを式 (4.3) によって銀河座標系の3成分  $(x'', y'', z'')$  に変換し、さらに式 (4.5) を用いればよい。

### 4.1.3 直交変換と変換行列

基底ベクトル  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  で表される**直交座標系**と  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  で表される**直交座標系**の間の**直交変換**を考える (添字 1, 2, 3 が上で書いた  $xyz$  に対応)。これらは、それぞれ互いに垂直な単位ベクトルの組だから、

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \quad (4.6)$$

$$\mathbf{e}'_1{}^2 = \mathbf{e}'_2{}^2 = \mathbf{e}'_3{}^2 = 1, \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}'_1 = 0 \quad (4.7)$$

片方の系のベクトルはもう片方の系のベクトルを使って表わすことができる。

$$\mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{e}'_2 = a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_3, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{e}'_3 = a_{31}\mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3. \quad (4.10)$$

行列表示すると、

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

(4.7)の条件より、この**変換行列**の各要素の間に、

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \quad (4.12)$$

$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0, a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0, a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0$  (4.13) が成立する。また、(4.8)、(4.9)、(4.10)と、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の内積を取ることで、以下がわかる。

$$\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_1 = a_{11}, \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_2 = a_{12}, \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_3 = a_{13}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_1 = a_{21}, \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_2 = a_{22}, \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_3 = a_{23}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_1 = a_{31}, \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_2 = a_{32}, \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_3 = a_{33}. \quad (4.16)$$

つまり、式(4.11)で定義される**変換行列**の9つの**変換係数**は旧座標系の3軸と新座標系の3軸の間のなす9つの角度の余弦に対応している。これを、「 $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ で表わされる系における $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ の**方向余弦**は、それぞれ $(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ である」、という言いかたをする。同様に、式(4.14),(4.15),(4.16)を縦に眺めると、「 $\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ で表わされる系における $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の**方向余弦**は、それぞれ $(a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ である」ことがわかる。

よって、式(4.8),(4.9),(4.10)の逆変換は、

$$\mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}'_1 + a_{21}\mathbf{e}'_2 + a_{31}\mathbf{e}'_3, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{e}_2 = a_{12}\mathbf{e}'_1 + a_{22}\mathbf{e}'_2 + a_{32}\mathbf{e}'_3, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{e}_3 = a_{13}\mathbf{e}'_1 + a_{23}\mathbf{e}'_2 + a_{33}\mathbf{e}'_3 \quad (4.19)$$

となる。

行列表示すると、

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

(4.6)の条件より、(4.12)、(4.13)に対応する式は、

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \quad (4.21)$$

、

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0. \quad (4.22)$$

式(4.11)と式(4.20)を比較すると、**変換行列**の行と列を入れかえた**転置行列**が**逆行列**になっていることがわかる。

#### 4.1.4 直交変換の簡単な記法

直交行列の性質を簡単に表す記法がある。まず、添字、1,2,3,4を  $i, j, k, l$  などの文字で表す。**Kronecker** のデルタを導入する。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (4.23)$$

さらに、「同じ添字が対になって一つの項に現われるときには、常にその添字について1から3まで(3次元空間の場合)あるいは1から4まで(4次元時空の場合)の和をとる( $\Sigma$ 記号を省略する)」という総和の規約を導入する。すると、基底ベクトルの直交条件、(4.6),(4.7)は以下のように書ける。

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}. \quad (4.24)$$

二つの座標系の基底ベクトルと、変換行列との関係は以下のようになる。

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j = a_{ij}, \mathbf{e}'_i = a_{ij} \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i = a_{ji} \mathbf{e}'_j. \quad (4.25)$$

座標軸の直交関係を表わす(4.12),(4.13),(4.21),(4.22)は、

$$a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}, a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \quad (4.26)$$

となる。

#### 4.1.5 座標変換の計算

(4.3)と(4.20)を合わせると、

$$\mathbf{p} = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

よって、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

これが、二つの座標系における方向ベクトルの3成分、 $(x, y, z)$ と $(x', y', z')$ との間の変換式である。

#### 4.1.6 スカラー三重積と行列式

もうひとつ、直交行列の性質として、その行列式の値は1である、と言うことがある。これを証明してみよう。

まず、ベクトルの外積の復習をしておこう。3次元のベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  の外積を  $\mathbf{O}$  とする<sup>6</sup>。

$$\mathbf{O} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (4.29)$$

<sup>6</sup>ベクトルとベクトルの内積はスカラー。ベクトルとベクトルの外積はベクトル。よろしいですね？

$\mathbf{O}$  は、 $\mathbf{A}$  から  $\mathbf{B}$  の向きに右ネジを回したときに、ネジが進む方向を向くベクトルで、その大きさは、 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  がなす角を  $\theta$  とすると、 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$  で与えられる ( $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  を二辺とする平行四辺形の面積)。また、各成分は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} O_x \\ O_y \\ O_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

一般的に、ベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  のスカラー三重積は、

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (4.31)$$

で定義される。 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  がこの順に右手系をなすとき、スカラー三重積は、この3つのベクトルが作る平行六面体の体積を表わす。スカラー三重積を  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  の直角成分を用いて書くと、

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A_x B_y C_z + A_y B_z C_x + A_z B_x C_y - A_x B_z C_y - A_y B_x C_z - A_z B_y C_x \quad (4.32)$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix}. \quad (4.33)$$

ここで、 $|\mathbf{A}|$  は行列  $\mathbf{A}$  の行列式を示す。上記で定義した直交座標系の基底ベクトル  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  または  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  が作る平行六面体の体積は当然1なので、それらのスカラー三重積は1、つまり直交変換の変換行列の行列式の値は1である。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1 \quad (4.34)$$

3x3 行列の行列式の計算方法から

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = 1 \quad (4.35)$$

である。

#### 4.1.7 オイラーの定理

今、共通の原点を持つ二つの直交座標系間の座標変換 (点のまわりの回転変位) を考えているのだが、この場合に以下のオイラーの定理が成立する。

**定理 I** 点のまわりの回転変位は、その点を通る1つの軸のまわりの回転によって達せられる。

これを、すでに学んだ直交行列の性質から簡単に証明することができる。回転変位を実現する回転軸に沿った方向ベクトルはその変換によって不変だから、そのベクトルの3成分を  $(x_0, y_0, z_0)$  と書けば、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

ここで変換行列を単純に  $A$  と書いた。これは、直交行列  $A$  に対して、 $(x_0, y_0, z_0)$  が**固有ベクトル**であり、**固有値**が1であることを示している。単位行列  $I$  を持ちいると、上式は、

$$(A - I) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

と書ける。つまり、行列  $A - I$  には逆行列が存在しない。その条件は、行列式が0であること、

$$|A - I| = 0 \quad (4.38)$$

である。ところで、 $A$  の転置行列  $A^t$  は  $A$  の逆行列だから、

$$(A - I)^t A = I - A. \quad (4.39)$$

ここで両辺の行列式を取り、転置行列の行列式は元の行列式と等しいこと、回転行列の行列式は1であること(式4.34)を持ちいると、

$$|A - I| = |I - A|. \quad (4.40)$$

一般に、 $n \times n$  行列  $B$  の行列式について、

$$|-B| = (-1)^n |B| \quad (4.41)$$

が成立する。今考えている3次元行列については、 $|I - A| = -|A - I|$  である。よって、(4.40) は (4.38) を示していることがわかる。

#### 4.1.8 オイラー角

変換行列は9つの要素を持つわけだが、独立な要素は3つである。これは、オイラーの定理より、任意の直交変換は回転軸の方向(2つの変数で決まる)とそのまわりの回転角(3つめの変数)を与えれば実現できることから理解できる。その3つの変数を指定すれば、二つの座標系の間の変換を一意的に定義したことになる。

座標変換を表わす3つのパラメーターとして良く使われるものに**オイラー角**がある。オイラー角にもいろいろな定義があるが、ここでは日本の科学衛星の姿勢に使われている「zyz」オイラー角の定義を用いて議論を進める。

赤道座標の上で、4.1.2節で定義した、 $x, y, z$  軸を考える( $x$  軸は春分点、 $z$  軸は北極を向いている)。たとえばこれが人工衛星の三軸だったら、今から定義するオイラー角は人工衛星の姿勢を与えることになるし、別の座標軸だったら、オイラー角は異なる天球座標系の間の変換を与える。

$z$  軸の周りに、 $+z$  の向きを向いて時計周りに角度  $\phi$  回転し、 $x$  軸、 $y$  軸の位置を変える。この新たな3軸を、便宜上  $x'y'z'$  としよう( $z = z'$  である)。次に、 $y'$  軸の周りに、角度  $\theta$  回転し、 $x'z'$  軸の位置を変え、 $x''y''z''$  軸を定義する( $y' = y''$  である)。最後に、 $z''$  軸の周りに  $\psi$  回転し、最終的に、 $x''', y''', z'''$  軸を定義することができる。 $xyz$  軸による旧座標系と、 $x''', y''', z'''$  軸による新座標系の間との関係を与える  $(\phi, \theta, \psi)$  を、オイラー角と呼ぶ。

このように定義したオイラー角と、(4.11) または (4.20) で与えられる変換行列との関係を調べてみよう。まず、最初の  $z$  軸のまわりの  $\phi$  回転で、新たな基底ベクトルと元の基底ベクトルの間との関係は以下ようになる。

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

同様にして、 $y'$  軸周りの  $\theta$  回転によって、

$$(\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3'') = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3') \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

$z''$  軸周りの  $\psi$  回転によって、

$$(\mathbf{e}_1''', \mathbf{e}_2''', \mathbf{e}_3''') = (\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3'') \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

以上、3式をまとめて、

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1''', \mathbf{e}_2''', \mathbf{e}_3''') &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$(4.46)$$

これは回転行列だから、条件 (4.26) と (4.34) を満たしていることに注意しよう<sup>7</sup>。

#### 4.1.9 赤道座標から黄道座標への変換

春分点を指している  $x$  軸の周りの回転を考えると速い。回転角  $\theta = 23.^\circ 43929$  である<sup>8</sup>。元の基底ベクトルを  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 、新たな基底ベクトルを  $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$  とすると、

$$(\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z) = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91748 & -0.39778 \\ 0 & 0.39778 & 0.91748 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

$$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) = (\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91748 & 0.39778 \\ 0 & -0.39778 & 0.91748 \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

よって、赤道座標での方向ベクトルの3成分を  $(x, y, z)$ 、黄道座標での成分を  $(x', y', z')$  としたとき、(4.28) より、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91748 & 0.39778 \\ 0 & -0.39778 & 0.91748 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

<sup>7</sup>手計算は面倒だが、mathematica を使えば一瞬で計算してくれる。しかし、ある程度は自分の手を動かすことを覚えておいたほうが良い。

<sup>8</sup>正確な出典はわからなかったのだが、HEASARC の coco ではこの値を使っているの、ここではそれに倣うことにした。

が、赤道座標から黄道座標への変換を与える。32 ページの例を考えてみよう。赤経、赤緯が (281.000, -4.070) のとき、(4.1) で与えられる、その方向ベクトルは、(0.19033, -0.97915, -0.0709752) となる。(4.49) より、黄道座標における方向ベクトルは、(0.19033, -0.92658, 0.32437) となる。(4.5) と同様にして、

$$\tan^{-1} \left( \frac{-0.92658}{0.19033} \right) = -78.3923 = 281.608.$$

$$\tan^{-1} \left( \frac{0.32437}{\sqrt{-0.92658^2 + 0.19033^2}} \right) = 18.927.$$

このようにして、黄経、黄緯が得られた。

#### 4.1.10 赤道座標から銀河座標への変換

銀河中心の赤経、赤緯は (266.40500, -28.93617) だから、 $z$  軸の周りの  $\phi = 266.40500$ 、さらに回転後の  $y'$  軸の周りの  $\theta = 28.93617$  の回転で、 $x''$  軸が銀河中心を指すことがわかるだろう。しかし、それだけでは銀河面の傾きが決まっていない。さらに  $x''$  軸の周りで  $\psi = 58.59866$  回転してやれば、正しく銀河座標系が定義されることがわかっている (図 4.3)。銀河座標系の基底ベクトルを三重ダッシュつきで表わすと、(4.45) を参考にして、

$$(\mathbf{e}_x''', \mathbf{e}_y''', \mathbf{e}_z''') = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

逆変換は以下のようになる。

$$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) = (\mathbf{e}_x''', \mathbf{e}_y''', \mathbf{e}_z''') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

$$= (\mathbf{e}_x''', \mathbf{e}_y''', \mathbf{e}_z''') \begin{pmatrix} -0.0548755 & -0.873437 & -0.483835 \\ 0.49411 & -0.44483 & 0.746982 \\ -0.867666 & -0.198076 & 0.455984 \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

よって、赤道座標での方向ベクトルの 3 成分を  $(x, y, z)$ 、銀河座標での成分を  $(x''', y''', z''')$  としたとき、(4.28) より、

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0548755 & -0.873437 & -0.483835 \\ 0.49411 & -0.44483 & 0.746982 \\ -0.867666 & -0.198076 & 0.455984 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

が、赤道座標から銀河座標への変換行列を与える。

赤経、赤緯が (281.000, -4.070) のときの方向ベクトル、(0.19033, -0.97915, -0.0709752) を上式に代入し、銀河座標における方向ベクトルは、(0.879122, 0.476581, -0.00355986) となる。これから、

$$\tan^{-1} \left( \frac{0.476581}{0.879122} \right) = 28.463$$

$$\tan^{-1} \left( \frac{-0.00355986}{\sqrt{0.879122^2 + 0.476581^2}} \right) = -0.204$$

となり、正しい銀経、銀緯が得られた。

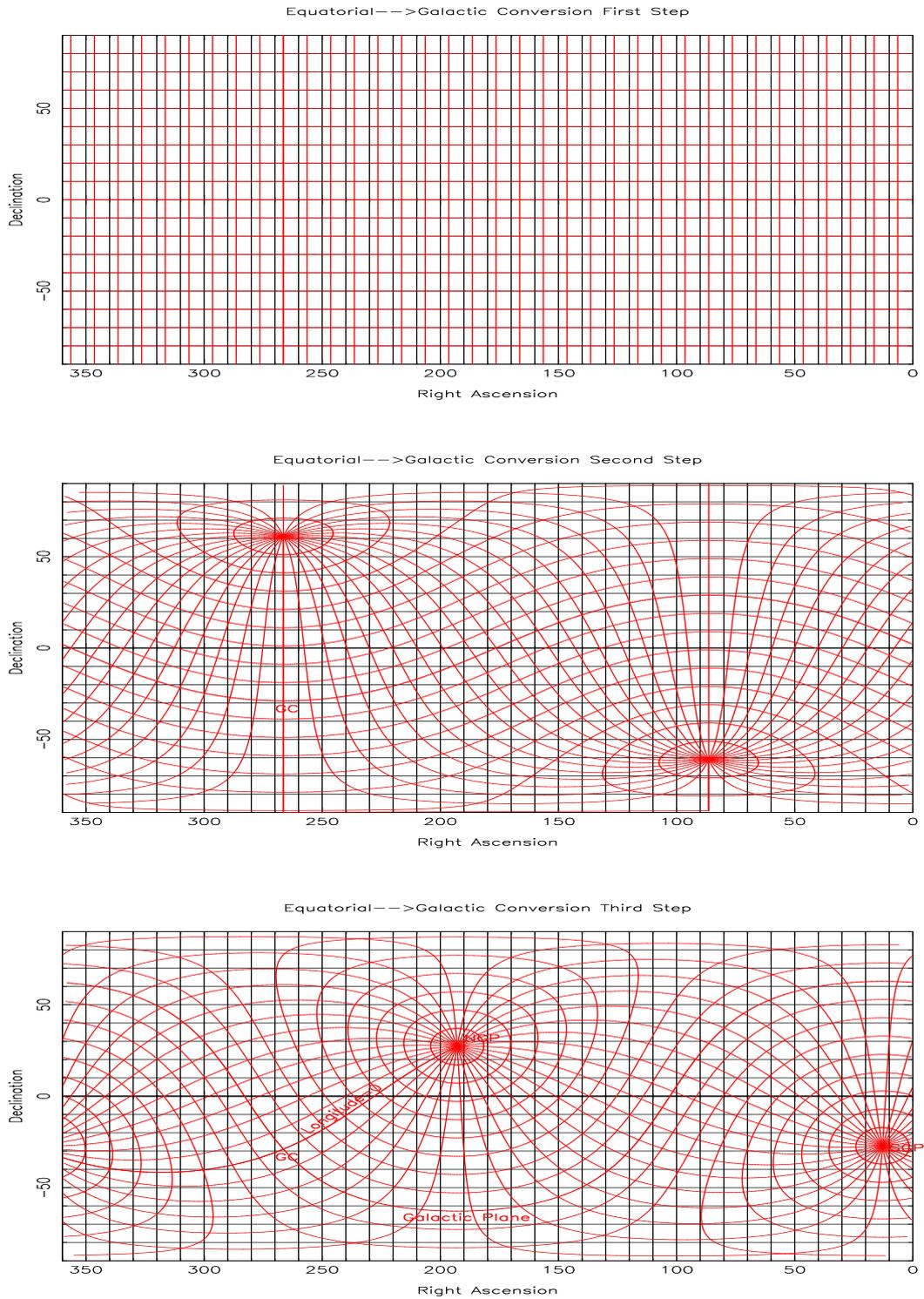


Figure 4.3: 赤道座標から銀河座標への変換

## 4.2 人工衛星の姿勢

### 4.2.1 衛星座標系

人工衛星に固定した衛星座標系 XYZ を考える (図 4.4) JAXA 宇宙科学研究所が製作する多くの科学衛星では、スピン軸が衛星の +Z 軸、衛星の太陽電池パネルは +Y 軸の方向を向いていて、観測方向 (望遠鏡が向いている方向) は +Z 軸方向である<sup>9</sup>。

十分な発電量を得るため、+Y 軸は、常に太陽の方向を向いている必要がある<sup>10</sup>。季節によって、太陽は黄道上を移動し、+Z 軸方向を観測するので、観測ターゲットは、太陽と約 90° をなす大円上になくなくてはならないことがわかる。また、黄道座標の北極 (North Ecliptic Pole; NEP) と南極 (South Ecliptic Pole; SEP) は、一年中観測可能であることがわかる。

自転軸のまわりにくるくるとスピンしながら、全天をくまなくサベイ観測する科学衛星がある。ドイツの ROSAT 衛星 (X 線)、日本のあかり衛星 (赤外線) などである。これらの衛星のスキャンパスをみると、NEP と SEP を通る大円になっていることがわかる。たとえば、[http://plain.isas.jaxa.jp/~ebisawa/Planetarium/RASS\\_AIT.jpg](http://plain.isas.jaxa.jp/~ebisawa/Planetarium/RASS_AIT.jpg) を参考に。これは、ROSAT 衛星のデータを赤道座標で表し、Hammer-Aitoff 投影法で表示したものである<sup>11</sup>。画像処理をしていないので、スキャンのパスがよくわかる。スキャンパスが集束している右上の点が NEP、左下の点が SEP である。

他の衛星についても同様である。日本の「あすか」衛星は全天サベイ衛星ではないが、姿勢変更のときは、やはり太陽方向の Y 軸を中心として回転するので、その間の観測パスは NEP, SEP を通ることになる。姿勢制御中のデータを解析したものが、下の論文の図 1 にある。銀河座標、黄道座標で表示してある。銀河座標では NEP は左上、SEP は右下に来る事に注意。[http://plain.isas.jaxa.jp/~ebisawa/TEACHING/2007Komaba/nikko\\_proceeding.pdf](http://plain.isas.jaxa.jp/~ebisawa/TEACHING/2007Komaba/nikko_proceeding.pdf)

日本の「あかり」衛星は赤外線全天サベイ衛星である<sup>12</sup>。たとえば、[http://www.ir.isas.jaxa.jp/ASTRO-F/Outreach/results/IRC\\_AllSky\\_red.jpg](http://www.ir.isas.jaxa.jp/ASTRO-F/Outreach/results/IRC_AllSky_red.jpg) や、[http://www.ir.isas.jaxa.jp/ASTRO-F/Outreach/results/PR081119/IRC09AllSky01\\_ss.png](http://www.ir.isas.jaxa.jp/ASTRO-F/Outreach/results/PR081119/IRC09AllSky01_ss.png) を見てみよう (銀河座標)。よ〜く見ると、スキャンパスが NEP、SEP を通っていることがわかるだろう。

### 4.2.2 人工衛星の姿勢とオイラー角

天球に対する人工衛星の姿勢を、オイラー角を使って表わすことができる。Z 軸を天の北極、X 軸を春分点、Y 軸を赤経=90° が衛星の初期姿勢で、そこから ZYZ の順に回転させていった 3 つのオイラー角で、衛星の姿勢を定義する。

衛星のオイラー角と、観測している視野の関係は大切である。ZYZ のオイラー角を  $(\phi, \theta, \psi)$  としよう。衛星の +Z 軸が観測装置が見ている方向だから、赤経 (R.A.)、赤緯 (Dec.)

<sup>9</sup>国や宇宙機関によって衛星座標系の定義が違うので注意が必要である。

<sup>10</sup>太陽と +Y 軸のなす角を「太陽角 (solar angle)」と言う

<sup>11</sup>球を平面に投影するのに、いろいろな投影法がある。世界地図と同じ事。メルカトル図法とか、メルワイデ図法とか、小学校の社会科で勉強しませんでした? <http://plain.isas.jaxa.jp/~ebisawa/Planetarium/>などを参考に

<sup>12</sup>あかりの全天スキャンを説明したアニメーションです。<http://www.nikon.co.jp/profile/technology/field/akari/index4.htm>

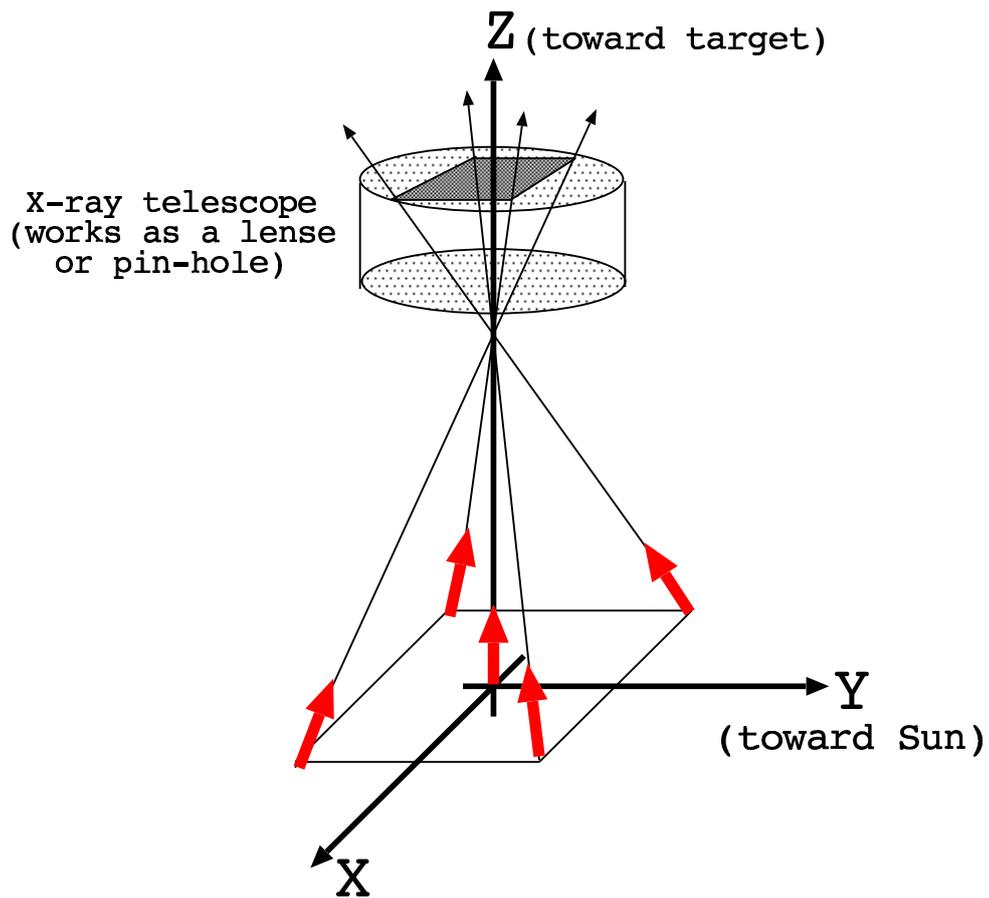


Figure 4.4: 人工衛星の三軸と視野

は、

$$R.A. = \phi, Dec. = 90^\circ - \theta \quad (4.54)$$

で与えられることがただちにわかるだろう。

第3オイラー角、 $\psi$ は、観測装置がターゲットの周りに回転する角、いわゆる**ロール角**を与える。慣習として、ロール角は、天の北から観測装置の+Y軸 (DETY) へ、**反時計周り**に計った角を使う<sup>13</sup>。第3オイラー角とロール角 (ROLL) の関係は、

$$Roll = 90^\circ - \psi \quad (4.55)$$

で与えられる。

人工衛星を使って天体を観測する場合、オイラー角を指定して衛星の姿勢を決める必要がある。第一、第二オイラー角は天体の位置から決まるわけだが、第三オイラー角は太陽パネル (Y軸) が太陽の方向を向かなくてはならないという条件から、季節によって決まる。

### 4.2.3 観測ターゲットと季節の関係

人工衛星による実際の観測においては、観測ターゲットの天球上での位置と季節 (太陽の天球上での位置) に応じて、オイラー角を決定する必要がある<sup>14</sup>。NEPは一年中観測できるので、ポピュラーな領域である。季節によって、NEPを観測するためのオイラー角を考えてみよう。NEPの赤経、赤緯は、天球上のX軸が春分点、Z軸が天の北極を向いている状態から、X軸の周りに $23.^\circ 4$ 回転したときに新たなZ軸が向く方向だから、 $(\alpha, \delta) = (270^\circ, 66.^\circ 6)$ で与えられることはわかるだろう (33頁の図参照)。これが観測方向 (衛星のZ軸) になることから、最初の二つのオイラー角は決まり、 $\phi = 270^\circ, \theta = 23.^\circ 4$ である。衛星のZ軸、Y軸の周りに連続してこの二つの回転をおこなった時点で、衛星のY軸は春分点を向いている事に注意しよう。Z軸の回りの第三オイラー角 $\psi$ の回転によって、Y軸は太陽と同じ向きに黄道上を移動する。よって、太陽パネル (衛星の+Y軸方向) が太陽の方向を向くという条件は、以下のようなことになる事を理解しよう<sup>15</sup>。

春分のとき  $\psi = 0^\circ$

夏至のとき  $\psi = 90^\circ$

秋分のとき  $\psi = 180^\circ$

冬至のとき  $\psi = 270^\circ$ 。

具体的な例を見てみよう。「すざく」衛星は、今までこの近傍を7回観測している。その時期とオイラー角は以下の通りである。

2006-06-10 (270.67, 22.36, 87.93), (シークエンス番号=701012010)

2005-09-02 (272.79, 24.02, 159.07), (シークエンス番号=100018010)

2009-11-15 (270.05, 23.44, 232.82), (シークエンス番号=504070010)

2009-12-07 (270.05, 23.43, 255.35), (シークエンス番号=504072010)

2009-12-15 (270.05, 23.43, 261.93), (シークエンス番号=504074010)

2009-12-28 (270.04, 23.42, 284.63), (シークエンス番号=504076010)

2006-02-10 (272.82, 23.98, 323.70), (シークエンス番号=500026010)

実際の第三オイラー角によって、Y軸が太陽の方向を向いていることを確認しよう<sup>16</sup>。

<sup>13</sup>地球上では、通常、方位角は北から時計周りに計った角で定義する。経度が増える向きが地球と天球で反対のため、こうなる。

<sup>14</sup>こういう衛星運用も、宇宙科学研究所の研究者の大事な仕事である

<sup>15</sup>これを間違えると、太陽電池パネルに陽が当たらなくて、衛星が死ぬことになる！

<sup>16</sup>以下のようにして、観測情報を得ることができる。

SEP も一年中観測できるので、ポピュラーな領域である。SEP を観測するためのオイラー角を考えてみよう。SEP の赤経、赤緯は、天球上の X 軸が春分点、-Z 軸が天の南極を向いている状態から、X 軸の周りに  $23.^\circ 4$  回転したときに新たな-Z 軸が向く方向だから、 $(\alpha, \delta) = (90^\circ, -66.^\circ 6)$  で与えられることはわかるだろう。これが観測方向（衛星の Z 軸）になることから、最初の二つのオイラー角は決まり、 $\phi = 90^\circ, \theta = 156.^\circ 6$  である。衛星の Z 軸、Y 軸の周りに連続してこの二つの回転をおこなった時点で、衛星の Y 軸は秋分点を向いている事に注意しよう。第三オイラー角  $\psi$  は、太陽パネル（衛星の+Y 軸方向）が太陽の方向を向くという条件から決まる。それが以下のような事を理解しよう。

春分のとき  $\psi = 180^\circ$

夏至のとき  $\psi = 90^\circ$

秋分のとき  $\psi = 0^\circ$

冬至のとき  $\psi = 270^\circ$ 。

#### 4.2.4 衛星座標から天球座標への変換

衛星のオイラー角を用いて、衛星座標と天球座標の変換を行うことができる。観測装置の視野は、衛星座標に固定されている。それが、与えられた姿勢のとき、天球上のどこに投影されるか、という問題である。

衛星座標系と赤道座標系の基底ベクトル間変換は、(4.46) で与えられるので、衛星の姿勢を表す ZYZ オイラー角を  $(\phi, \theta, \psi)$  とすると、衛星座標系に於ける成分、 $(x''', y''', z''')$ 、と赤道座標系における成分、 $(x, y, z)$ 、の間の変換は、同じ行列を使って以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

具体的な例を考えてみよう。「すぎく」衛星搭載の X 線 CCD カメラは、XY 軸に沿った、 $18' \times 18'$  の正方形の視野を持っている。その視野が、あるオイラー角で表される姿勢のときに、天球上のどこに来るか？それがわからなければ、いったい空のどこを見ているのかわからなくなってしまう。また、視野が軸対称ではないので、広がった天体を観測するときには、視野の傾きを正確に知る必要がある。図 4.4 からわかるように、CCD カメラの正方形の視野に入ってくる X 線は、天球上にそれを投影した正方形に含まれる領域から発せられたものである。CCD の中心にくる X 線の到来方向の方向ベクトルは衛星座標系で  $(0, 0, 1)$  であることはただちにわかるだろう。それ以外の X 線については到来方向の方向ベクトルは  $(0, 0, 1)$  から少しだけずれている。その方向ベクトルをまず衛星座標系でもとめ、それをオイラー角を使って赤道座標系に変換すれば、対応する天球上の位置がわかる。

2006 年 10 月 15 日から 17 日にかけておこなわれた銀河面観測のデータを見てみよう (シーケンス番号=500009020)。[http://darts.jaxa.jp/cgi-bin/judo/draw\\_fits\\_suzaku?seq\\_no=500009020&group=SUZAKU](http://darts.jaxa.jp/cgi-bin/judo/draw_fits_suzaku?seq_no=500009020&group=SUZAKU) を見てみたらわかるように、この観測のオイラー角は以下の通りである。

$$\phi = 281.004, \theta = 94.078, \psi = 184.470. \quad (4.57)$$

さて、すぎく搭載 X 線 CCD カメラは衛星の Z 軸の方向を向いており、その  $18' \times 18'$  の正方形の視野の辺は X 軸、Y 軸に沿っている。つまり、衛星の XY 平面上で、視野の 4 つの

[http://darts.jaxa.jp/cgi-bin/judo/draw\\_fits\\_suzaku?seq\\_no=500026010&group=SUZAKU](http://darts.jaxa.jp/cgi-bin/judo/draw_fits_suzaku?seq_no=500026010&group=SUZAKU)

なお、Y 軸は少々太陽からずれていても良い（太陽パネルに斜めに陽が当たると言うこと）。Y 軸が完全に太陽の方向を向いているとき、太陽角=0 度。すぎく衛星の場合は、太陽角が 25 度まで許される。それ以上太陽角が大きくなると、電力供給不足で人工衛星が危なくなる。

角は以下の XY 座標を持つことがわかる (単位は度)。

$$(0.15, 0.15), (-0.15, 0.15), (-0.15, -0.15), (0.15, -0.15). \quad (4.58)$$

また、人工衛星座標における、これら 4 つの角に対応する方向ベクトル (図 4.4 では赤で示した) は以下の通りであることがわかるだろう ( $0.15^\circ = 2.61799 \times 10^{-3}$  rad であることに注意。)

$$\begin{pmatrix} 2.61799 \times 10^{-3} \\ 2.61799 \times 10^{-3} \\ 0.9999931 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.61799 \times 10^{-3} \\ -2.61799 \times 10^{-3} \\ 0.9999931 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.61799 \times 10^{-3} \\ -2.61799 \times 10^{-3} \\ 0.9999931 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.61799 \times 10^{-3} \\ 2.61799 \times 10^{-3} \\ 0.9999931 \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

(4.57) を (4.56) に代入して、この観測における、衛星座標上の方向ベクトル成分から天球座標上の方向ベクトル成分への変換は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0629713 & -0.979686 & 0.190394 \\ -0.084471 & -0.184856 & -0.979129 \\ 0.994434 & -0.0777398 & -0.0711144 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

となる。これに (4.59) を代入すると、赤道座標系における X 線 CCD カメラの 4 隅の方向ベクトル成分は、

$$\begin{pmatrix} 0.187663 \\ -0.979827 \\ -0.0687141 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.192793 \\ -0.978859 \\ -0.068307 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.193123 \\ -0.978417 \\ -0.0735139 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.187993 \\ -0.979385 \\ -0.0739209 \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

であることがわかる。これを赤経、赤緯に直すには、(4.5) を用いれば良い。結局、CCD カメラの 4 隅の赤道座標は、

$$(\alpha, \delta) = (280.842, -3.940), (281.142, -3.917), (281.166, -4.216), (280.866, -4.239). \quad (4.62)$$

であたえられる。JUDO ([http://darts.jaxa.jp/astro/judo/?center\\_lng=281.004&center\\_lat=-4.078&pa=0&ext=30&crd=equatorial&scl=log&img=color&selectedLayer=0,1,2,3,10,11,12,13,15,16,18,19,21,22,23,24,25,26,27,28&layer1=scl:log, img:color, op:1.00&layer4=scl:log, img:color, op:1.00&layer7=scl:log, img:color, op:1.00&layer10=scl:log, img:color, op:1.00&layer23=scl:log, img:color, op:1.00&layer26=scl:log, img:color, op:1.00&search\\_lng=266.404996&search\\_lat=-28.936172&search\\_crd=equatorial&search\\_radius=0.02](http://darts.jaxa.jp/astro/judo/?center_lng=281.004&center_lat=-4.078&pa=0&ext=30&crd=equatorial&scl=log&img=color&selectedLayer=0,1,2,3,10,11,12,13,15,16,18,19,21,22,23,24,25,26,27,28&layer1=scl:log, img:color, op:1.00&layer4=scl:log, img:color, op:1.00&layer7=scl:log, img:color, op:1.00&layer10=scl:log, img:color, op:1.00&layer23=scl:log, img:color, op:1.00&layer26=scl:log, img:color, op:1.00&search_lng=266.404996&search_lat=-28.936172&search_crd=equatorial&search_radius=0.02)) を使って、確認してみよう<sup>17</sup>。実際、JUDO の中では上記のような計算をしている訳だが。

## 4.3 四元数と座標変換、人工衛星の姿勢

### 4.3.1 四元数 (quaternion)

これまで見てきたように、オイラー角を用いて人工衛星の姿勢を記述することができる。また、オイラー角から得られる回転行列 (式 4.46) を用いれば、天球座標と衛星座標の変換が計算できる。

<sup>17</sup>JUDO の初期画面から Show Information チェックボックスをチェック。filter ダイアログボックスに 500009020 を入力すればよい。その画面に対応するパーマリンクが上記の URL。

時々刻々と変化する人工衛星の姿勢を記述する「姿勢ファイル」の中身を見てみよう。たとえば、「あすか」衛星の1993年9月28日の観測に対応する姿勢ファイルは `ftp://ftp.darts.isas.jaxa.jp/pub/asca2/10010120/aux/fa930928_0641.1435.gz` に置いてある。これは FITS(Flexible Image Transportation System) という天文分野独自のフォーマットを持つが、その中身の一部は以下のようなものである<sup>18</sup>。

```

2.335207979544103E+07  -3.664577454889666E-01
                        4.253754826778572E-01
                        5.598341700062809E-01
                        6.093850355900631E-01
2.335208379541934E+07  -3.664573182646553E-01
                        4.253649060520620E-01
                        5.598375141751545E-01
                        6.093896030552058E-01
2.335208779543787E+07  -3.664571463319929E-01
                        4.253647582397316E-01
                        5.598375515033529E-01
                        6.093897753298769E-01
2.335209179521501E+07  -3.664635097319999E-01
                        4.253653064430918E-01
                        5.598271266903228E-01
                        6.093951430157092E-01
2.335209579523355E+07  -3.664768211073824E-01
                        4.253597832398843E-01
                        5.598082237138666E-01
                        6.094083582093963E-01

```

一行目は、1993年の始まりからの経過秒、二行目のそれぞれの時刻に対する4つの数が、そのときの人工衛星の姿勢を記述する**単位四元数**である。それぞれの時刻において、4つの数字の二乗和を計算してみよう。1になっていることがわかるだろう。

多くの場合、人工衛星の姿勢を記述するのに、**四元数(quaternion)** が用いられる。四元数を使うと、任意の座標変換を連続的に表現できる<sup>19</sup>、計算に三角関数が必要ない、9つの要素を持つ変換行列と比較して、パラメーターが4つだけなので計算量が少なくて済む、等のメリットがあるので、人工衛星の姿勢計算やコンピューターグラフィクスなどに広く用いられている。また、オイラーの定理により、任意の座標変換はある回転軸のまわりの一回の回転で表される訳だが、四元数を用いて座標変換を表現すると、その回転軸と回転角が陽に表される。

#### 4.3.2 四元数の性質<sup>20</sup>

四元数は19世紀にハミルトンによって発見されたそうだ。数学的な側面はともかく、ここでは四元数の応用面について述べる。すぐ後に述べるように、**ノルム(norm)が1である**

<sup>18</sup>fv(<http://heasarc.gsfc.nasa.gov/fv/>)などのツールを使うと FITS ファイルを読むことができる。お試しあれ。

<sup>19</sup>たとえば、ZYZ で定義されるオイラー角を採用した場合、X 軸の周りの回転を記述するのはやっかいである。

<sup>20</sup>この節と次節では `ftp://ftp.cis.upenn.edu/pub/graphics/shoemake/quatut.ps.Z` を参考にしています。このメモの著者の Ken Shoemake は、コンピューターグラフィクスに quaternion を導入した人らしい。

**単位四元数 (unit quaternion) は、3次元直交座標系の中の直交変換を記述する。**

四元数は複素数の拡張として、以下のように定義される。

$$q \equiv ix + jy + kz + w, \text{ where } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (4.63)$$

ここで、 $x, y, z, w$  は実数である。

$ijk = -1$  の左から  $i$  を掛けて  $i^2 = -1$  を使うと、

$$jk = i \quad (4.64)$$

が得られる。同様に、右から  $k$  を掛けて  $k^2 = -1$  を使うと、

$$ij = k \quad (4.65)$$

が得られる。式 (4.64) の左から式 (4.65) を掛けて  $j^2 = -1$  を使うと、

$$-ik = ki \quad (4.66)$$

が得られる。同様に、(4.64) の右から  $k$  を掛けて、

$$-j = ik = -ki \quad (4.67)$$

が得られる。左から  $j$  を掛けると、

$$-k = ji \quad (4.68)$$

が得られる。最後に、(4.65) の右から  $j$  を掛けて、

$$-i = kj \quad (4.69)$$

が得られる。以上をまとめて、使いやすい形として、

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = -ji = k \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \end{cases} \quad (4.70)$$

を得る。

また四元数を以下のようにも表す。

$$q = [\mathbf{v}, w] = [(x, y, z), w] = [x, y, z, w]. \quad (4.71)$$

$\mathbf{v}$  は、3次元空間のベクトルを表す。 $q = [\mathbf{v}, w], q' = [\mathbf{v}', w']$  とするとき、四元数同士の和は四元数であり、それは次のように定義される。

$$q + q' = [\mathbf{v}, w] + [\mathbf{v}', w'] \equiv [\mathbf{v} + \mathbf{v}', w + w']. \quad (4.72)$$

積については、以下のように考えられる。

$$qq' = [\mathbf{v}, w][\mathbf{v}', w'] = (xi + yj + kz + w)(x'i + y'j + z'z + w') \quad (4.73)$$

$$= xx'i^2 + xy'ij + xz'ik + xw'i + yx'ji + yy'j^2 + yz'jk + yw'j + zx'ki + zy'kj + zz'k^2 + zw'k + wx'i + wy'j + wz'k + ww' \quad (4.74)$$

$$= -xx' + xy'k - xz'j + xw'i - yx'k - yy' + yz'i + yw'j + zx'j - zy'i - zz' + zw'k + wx'i + wy'j + wz'k + ww' \quad (4.75)$$

$$= (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k + w(x'i + y'j + z'k) + w'(xi + yj + zk) + ww' - xx' - yy' - zz' \quad (4.76)$$

$$= [\mathbf{v} \times \mathbf{v}' + w\mathbf{v}' + w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']. \quad (4.77)$$

ここで、式の変形には、(4.70)を用いた。

四元数の積が可換でないことに注意 (異なる軸の周りの回転が可換でないことに対応している)。また、 $q'' = [\mathbf{v}'', w'']$  としたとき、

$$(qq')q'' = q(q'q'') \quad (4.78)$$

が成立する<sup>21</sup>。

定数や3次元ベクトルも、四元数表示することができる。 $s$ を実数の定数としたとき、その四元数表示は、 $[0, 0, 0, s] = [\mathbf{0}, s]$ 。  $\mathbf{v}$  を3次元ベクトルとしたとき、その四元数表示は、 $[\mathbf{v}, 0]$ 。定数や3次元ベクトルを四元数表示したとき、それらを含む四元数の積に関して、以下は自明である。

$$sq = [\mathbf{0}, s][\mathbf{v}, w] = [s\mathbf{v}, sw] = qs, \quad (4.79)$$

$$\mathbf{v}\mathbf{v}' = [\mathbf{v}, 0][\mathbf{v}', 0] = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}', -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']. \quad (4.80)$$

$s, s'$  を四元数の定数、 $p, q, q'$  を任意の四元数としたとき、以下のように線型性が成立する。

$$p(sq + s'q') = spq + spq', \quad (4.81)$$

$$(sq + s'q')p = sqp + s'q'p. \quad (4.82)$$

四元数の共役 (conjugate) の定義と、その性質は以下の通りである。

$$q^* = [\mathbf{v}, w]^* \equiv [-\mathbf{v}, w]. \quad (4.83)$$

$$(q^*)^* = q, \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} (pq)^* &= \{[\mathbf{v}, w][\mathbf{v}', w']\}^* = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}' + w\mathbf{v}' + w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']^* \\ &= [\mathbf{v}' \times \mathbf{v} - w\mathbf{v}' - w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'] \\ &= [-\mathbf{v}', w][-\mathbf{v}, w'] = q^*p^*, \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$(p + q)^* = p^* + q^*. \quad (4.86)$$

ノルムの定義と性質は以下の通りである。

$$N(q) \equiv qq^* = q^*q = w^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = w^2 + x^2 + y^2 + z^2, \quad (4.87)$$

$$N(qq') = (qq')^*(qq') = q'^*q^*qq' = N(q)q'^*q' = N(q)N(q'), \quad (4.88)$$

$$N(q^*) = N(q). \quad (4.89)$$

特に、ノルムが1である四元数を単位四元数 (unit quaternion) と呼ぶ。 $q$  の逆四元数を

$$q^{-1} = q^*/N(q) \quad (4.90)$$

で定義する。 $q$  が単位四元数であるとき、

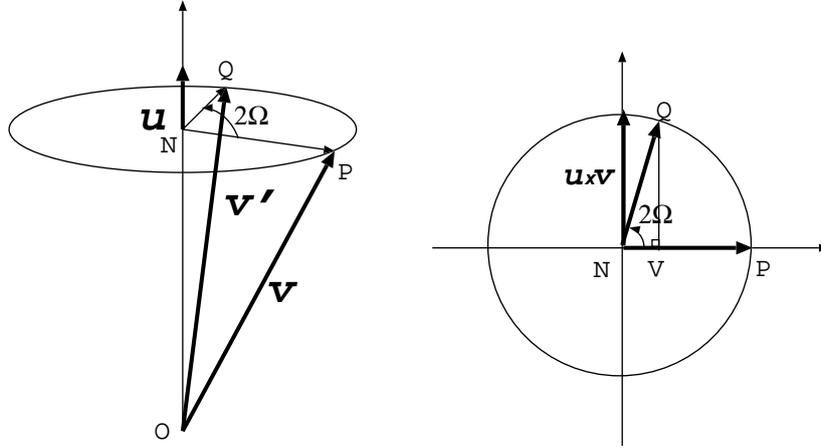
$$q^{-1} = q^* \quad (4.91)$$

である。

<sup>21</sup>これはそんなに自明でないから、ぜひ自分で手を動かして確認しておこう。その証明には、スカラー三重積に関する法則 (4.31) と、ベクトル三重積に関する法則、 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ 、 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$  を使う。(おそらく) 力学の教科書に書いてあるように、ベクトル三重積の展開式を以下のように覚えておく。(1) 展開式はカッコ内のベクトルの一次結合であって、(2) 各ベクトルの係数は他の2つのベクトルの内積であり、(3) その符号は三重積の中央のベクトルに対しては正、端のベクトルに対しては負である。

4.3.3 四元数と回転<sup>22</sup>

**定理 II**  $\mathbf{u}$  を単位ベクトルとするとき、ノルムが 1 である単位四元数、 $q = [\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega]$  と、任意のベクトル  $\mathbf{v}$  を空間成分とする四元数、 $p = [\mathbf{v}, 0]$  を考える。 $p' = qpq^{-1} = [\mathbf{v}', 0]$  としたとき、 $\mathbf{v}'$  は、 $\mathbf{v}$  を  $\mathbf{u}$  の周りに角度  $2\Omega$  回転したものである。



まず、幾何学的に考えよう。上図がここで考えている状況を図示したものである。 $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$  を  $\mathbf{u}$  の周りに  $2\Omega$  回転したものが、 $\mathbf{v}' = \overrightarrow{OQ}$  である。ここで、 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ}$  であることに注目する。また、 $\overrightarrow{ON} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$ 、 $\overrightarrow{NV} = \cos 2\Omega (\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u})$ 、 $\overrightarrow{VQ} = \sin 2\Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  である。よって、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \cos 2\Omega (\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}) + \sin 2\Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= (1 - \cos 2\Omega) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \cos 2\Omega \mathbf{v} + \sin 2\Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

一方、四元数の計算より、

$$\begin{aligned} p' &= qpq^{-1} = [\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega][\mathbf{v}, 0][-\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega] \\ &= [\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega][-\sin \Omega (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) + \cos \Omega \mathbf{v}, \sin \Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] \\ &= [-\sin^2 \Omega \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) + \sin \Omega \cos \Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \sin \Omega \cos \Omega (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) + \cos^2 \Omega \mathbf{v} + \sin^2 \Omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}, 0]. \end{aligned} \quad (4.93)$$

空間ベクトル部を取りだして、ベクトル三重積を展開して変形すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= -\sin^2 \Omega \mathbf{v} + \sin^2 \Omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + 2 \sin \Omega \cos \Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \cos^2 \Omega \mathbf{v} + \sin^2 \Omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} \\ &= 2 \sin^2 \Omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + (\cos^2 \Omega - \sin^2 \Omega) \mathbf{v} + 2 \sin \Omega \cos \Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= (1 - \cos 2\Omega) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \cos 2\Omega \mathbf{v} + \sin 2\Omega \mathbf{u} \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (4.94)$$

となり、式 (4.92) と式 (4.94) は完全に一致する。よって、定理 II が示された。

$p = [\mathbf{v}, 0]$  について、単位四元数  $q, q'$  による回転を引き続いて行う場合を考える。

$$q'(qpq^{-1})q'^{-1} = q'qpq^{-1}q'^{-1} = (q'q)p(q'q)^{-1}. \quad (4.95)$$

ここで、(4.78)、(4.85) を用いた。よって、以下の定理が得られた<sup>23</sup>。

<sup>22</sup>この節の議論は、有名な教科書、「Classical Mechanics」H. Goldstein に倣いました。

<sup>23</sup>オイラー角を用いて、3つの回転を順次行う際の行列計算が非常に面倒くさかったことを思いだそう (4.46 式など)。四元数を用いると、回転はよりシンプルに記述できる。

**定理 III** 単位四元数  $q$  による回転に引き続いて  $q'$  という回転を行うとき、その回転は  $q'q$  という新たな単位四元数で表わされる。

#### 4.3.4 四元数と変換行列の関係

$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  として、(4.92) または (4.94) の各成分を書き下してみる。ただし、

$$q = [\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega] \equiv [q_1, q_2, q_3, q_4] \quad (4.96)$$

とする。これが単位四元数であるという条件から、

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (4.97)$$

である。 $\sin \Omega \mathbf{u} = q_1 \mathbf{e}_x + q_2 \mathbf{e}_y + q_3 \mathbf{e}_z$  であることを使う。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= 2(\sin \Omega \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \sin \Omega \mathbf{u} + (2 \cos^2 \Omega - 1)\mathbf{v} + 2 \cos \Omega (\sin \Omega \mathbf{u}) \times \mathbf{v} \\ &= 2(q_1 x + q_2 y + q_3 z)(q_1 \mathbf{e}_x + q_2 \mathbf{e}_y + q_3 \mathbf{e}_z) + (q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) \\ &\quad + 2q_4 \{(q_2 z - q_3 y)\mathbf{e}_x + (q_3 x - q_1 z)\mathbf{e}_y + (q_1 y - q_2 x)\mathbf{e}_z\} \\ &= (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_1 q_2 - 2q_3 q_4 & 2q_1 q_3 + 2q_2 q_4 \\ 2q_1 q_2 + 2q_3 q_4 & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_2 q_3 - 2q_1 q_4 \\ 2q_1 q_3 - 2q_2 q_4 & 2q_2 q_3 + 2q_1 q_4 & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\equiv (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.98)$$

ここで、式 (4.98) で得られた  $3 \times 3$  変換行列を簡単のために  $A$  と表わした。式 (4.99) の意味は以下の通りである。基底ベクトル  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  を持つ座標系で、 $(x, y, z)$  という成分で表わされるベクトル  $\mathbf{v}$  を、式 (4.96) で表される四元数によって回転し、 $\mathbf{v}'$  というベクトルが得

られたとき、同じ座標系におけるその成分は  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  で与えられる。ここで考えたのは、

**ベクトルの変換 (回転) であって座標変換ではないことに注意。**

次に座標変換を考える。すなわち、 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  という基底ベクトルそれぞれを、式 (4.96) で表される四元数によって回転し、新たな  $(\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z)$  という基底ベクトルを定義したとき、 $\mathbf{v}$  というベクトルの旧座標系における成分  $(x, y, z)$  から新座標系における成分  $(x', y', z')$  への変換を考える。その変換行列は  $A^{-1} = {}^t A$  で与えられることは自明だろう。よって、以前に式 (4.28) で定義した変換行列と対比して書くと、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_1 q_2 + 2q_3 q_4 & 2q_1 q_3 - 2q_2 q_4 \\ 2q_1 q_2 - 2q_3 q_4 & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_2 q_3 + 2q_1 q_4 \\ 2q_1 q_3 + 2q_2 q_4 & 2q_2 q_3 - 2q_1 q_4 & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

37 頁で述べたオイラーの定理を思い出そう。 $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33})$  の 9 つの成分を持つ変換行列が与えられたとき、それに対応する回転軸と回転角はどうやって求めたら良いだろうか？まず、(4.100) によって、 $(a_{11}, \dots, a_{33})$  から、対応する四元数  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]$  を求める。50 頁の定理 II によって、 $q = [q_1, q_2, q_3, q_4] = [\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega]$  と書いたとき、その座標変換はベクトル  $\mathbf{u}$  のまわりの角度  $2\Omega$  の回転に対応している。

### 4.3.5 座標変換への応用

赤道座標から銀河座標への変換行列の式 (4.53) と式 (4.100) を比較してみよう。これ  $q_1, q_2, q_3, q_4$  について解くことができ、

$$q_1 = 0.4832, q_2 = -0.1963, q_3 = -0.6992, q_4 = 0.4889 \quad (4.101)$$

が得られる。40 頁の例にあるように、赤道座標における方向ベクトル  $(0.19033, -0.97915, -0.0709752)$  を空間成分に持つ四元数  $p = (0.19033, -0.97915, -0.0709752, 0)$  を考える。上記の  $q$  を使い、定義に従って四元数の積を計算すると、

$$q^{-1}pq = (0.879122, 0.476581, -0.00355986, 0) \quad (4.102)$$

が得られる。この空間成分が銀河座標における方向ベクトルに対応している。式 (4.53) を使った行列計算でも、四元数を使った計算でも同じ結果が得られるというわけだ。

また、定理 II より、 $q = [\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega]$  として、この  $q$  パラメーターは、単位ベクトル  $\mathbf{u} = (0.5539, -0.2250, -0.8016)$  の周りの  $2\Omega = 2 \times 60.^\circ 73$  の回転に対応していることがわかる。4.1.10 節では、赤道座標から銀河座標への変換を 3 つのオイラー角 (各座標軸の周りの回転) で表わしたが、これは上記で示される、一回の回転と等価である (定理 I 参照)。

### 4.3.6 人工衛星の姿勢への応用

四元数の具体的な応用例として、人工衛星の姿勢の平均や補間を考えよう。現実的に、二つ (あるいはそれ以上) の人工衛星の姿勢の平均や、離れた時間の中の姿勢の補完が必要になることがある。例えば、二つの姿勢計があり、その測定が少々違う場合、その平均をもっともらしい姿勢として採用することがある<sup>24</sup>。また、姿勢ファイルにはとびとびの時刻 (たとえば 4 秒ごと) における姿勢が書かれているので、その間の時刻における姿勢は、二つの姿勢の補間で決める必要がある。

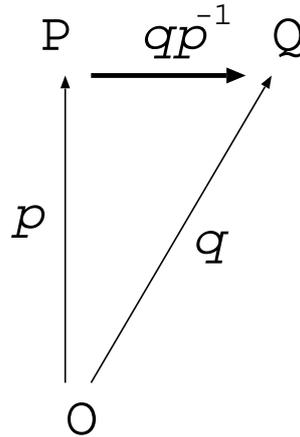
元の姿勢 (通常、Z 軸が天の北極、X 軸が春分点の状態) を  $O$ 、四元数  $p$  で表わされる姿勢を  $P$ 、四元数  $q$  で表わされる姿勢を  $Q$  とする。下図からわかるように、姿勢  $P$  から  $Q$  への変換は、新たな四元数  $qp^{-1}$  で表されるはずである。

$qp^{-1}$  がわかれば、それを  $[\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega]$  と分解し、回転軸  $\mathbf{u}$  と回転角  $2\Omega$  がわかる。たとえば、その回転角のちょうど半分回転したのが、 $P$  と  $Q$  の平均の姿勢になる。 $P$  から  $Q$  に姿勢が移動しているとき、その間の姿勢を計算するには、回転角を経過時刻に合わせて補間してやれば良い。具体的には、姿勢  $P$  を持つ時刻を  $t_0$ 、姿勢  $Q$  を持つ時刻を  $t_1$  とすると、その間の時刻  $t$  における姿勢は、四元数  $[\mathbf{u} \sin \Omega(t), \cos \Omega(t)]$  で与えられ、

$$\Omega(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \quad (4.103)$$

である。

<sup>24</sup>私が「あすか」衛星の Slew (大きな姿勢移動) 中のデータを解析したとき、ジャイロを前方から積分して決めた姿勢と、後方から積分した姿勢の平均を使うと、もっとも正確な姿勢が得られることがわかりました。



## 4.4 人工衛星の軌道

### 4.4.1 二体問題とケプラーの法則

地球の周りの人工衛星の運動は、太陽の周りの惑星の運動と全く同様に、古典力学の「二体問題」として解くことができる。また、そこから自然に**ケプラーの三法則**が導かれる。古典力学の復習として、ここではそれを見てみよう。

質量  $M$  を持った恒星 (位置ベクトル  $\mathbf{r}_1$ ) の周りを質量  $m$  (位置ベクトル  $\mathbf{r}_2$ ) を持った惑星が公転している。互いの間には重力のみが働き (万有引力定数  $G$ )、外力は存在しないと仮定する。天体の間に働く力を  $\mathbf{F}$  とすると、運動方程式は、

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (4.104)$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\mathbf{F} \quad (4.105)$$

と書ける。両式から、

$$\frac{d^2 (M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2)}{dt^2} = 0 \quad (4.106)$$

$$\frac{mM}{m+M} \frac{d^2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{dt^2} = -\mathbf{F} \quad (4.107)$$

が得られる。式 (4.106) は、重心  $(M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2)/(M + m)$  が等速運動することを示す。式 (4.107) は、換算質量質量  $\mu \equiv mM/(m + M)$  を持った惑星の、恒星に対する相対的な運動を表す。

重心の位置ベクトルは、

$$\frac{M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2}{M + m} = \frac{\mathbf{r}_1 + m/M\mathbf{r}_2}{1 + m/M}$$

よって、 $m/M \approx 0$  とすると、これは  $\approx \mathbf{r}_1$  となり、恒星の位置ベクトルにほぼ一致する。また、

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1+m/M}$$

なので、 $m/M \approx 0$  のとき、これは  $m$  に一致する。つまり、惑星の質量  $m$  が恒星の質量  $M$  に比べてはるかに小さいときは、重心は恒星の位置ベクトル  $\mathbf{r}_1$  の近くにあり、換算質量は  $m$  に近い。

以下では、 $m$  は惑星の換算質量を表すとし、恒星に対する相対運動を考える。恒星に対する惑星の相対位置ベクトルを、 $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{r}$  と定義する。動径方向の単位ベクトル  $\mathbf{e}_r$  とそれと直行する単位ベクトル  $\mathbf{e}_\theta$  を基底とする極座標を考える。惑星の速度ベクトルは  $d\mathbf{r}/dt = d(r\mathbf{e}_r)/dt = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$  で表される。

惑星の角運動量を  $h$  とすると  $h = mr^2\dot{\theta}$  と書ける。惑星の恒星に対する位置ベクトル  $\mathbf{r}$  が単位時間に掃く面積を面積速度と呼ぶが、面積速度を惑星の角運動量の大きさ  $h$  と質量  $m$  で表すと、 $h/2m$  となる。加速度ベクトルは、 $d^2\mathbf{r}/dt^2 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta$  となる。よって、動径方向とそれに直交する方向の成分についての運動方程式は、それぞれ、

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2} \quad (4.108)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \quad (4.109)$$

となる。

(4.109) から、

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0. \quad (4.110)$$

$mr^2\dot{\theta}$  が角運動量の大きさ  $h$  だから、**角運動量は一定**である。また面積速度は  $h/2m$  だから、**面積速度も一定である (ケプラーの第2法則)**。

角運動量  $h$  が一定である事を用いて、(4.108) を  $r$  で積分し、エネルギー保存則を導くと、それは

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{h^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E \quad (4.111)$$

と書ける。ただし、全エネルギーを  $E$  とした。

ここでは、**惑星が描く軌道が、恒星をひとつの焦点とする楕円になること (ケプラーの第1法則)** を見てみよう。角運動量が一定であることを用いて、(4.111) の第一項の時間による微分を角度  $\theta$  による微分に変換すると、

$$\frac{m}{2} \left( \frac{h}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{h^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E. \quad (4.112)$$

この微分方程式は、 $r$  と  $\theta$  の関係を与える。よって、 $r$  を  $\theta$  について解くことによって、惑星の軌道が得られる。

ここで、 $1/r = u$  と変数を変換すると、 $u$  と  $\theta$  の間の微分方程式を得ることができる。これは、以下のように整理できる。

$$\pm \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{h^2} + \frac{G^2M^2m^4}{h^4} - (u - \frac{GMm^2}{h^2})^2}} = d\theta \quad (4.113)$$

これを積分すると、

$$\pm \cos^{-1} \left( \frac{u - \frac{GMm^2}{h^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{h^2} + \frac{G^2M^2m^4}{h^4}}} \right) = \theta \quad (4.114)$$

が得られる。ただし、積分定数がゼロになるように角度の基準をとった。 $r$ について整理すると、ひとつの解として

$$r = \frac{\frac{h^2}{GMm^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2M^2m^3} \cos \theta}} \quad (4.115)$$

が得られる。一般に、平面上のある一点（焦点と呼ぶ）とそれを通る基準線を考え、その点からの距離を  $r$ 、基準線からの角度を  $\theta$  とし、

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \quad (0 \leq e < 1) \quad (4.116)$$

を満たす点をつなげると、それは楕円になる。ここで、 $e$  は離心率、 $l$  は半直弦と呼ばれる。 $e = 0$  が円に対応し、 $e$  が 1 に近づくほど、扁平した楕円になる。惑星の描く軌道(4.115)は、

$$l = \frac{h^2}{GMm^2} \quad (4.117)$$

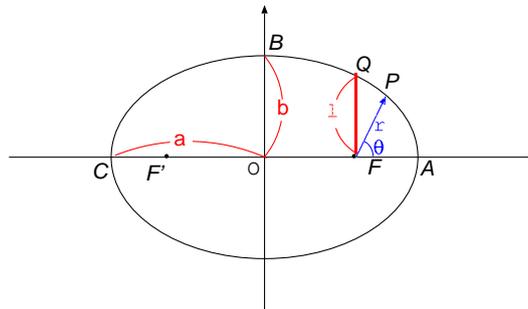
$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2M^2m^3}} \quad (4.118)$$

とすると、楕円の式(4.116)に他ならないことがわかる。

次に、「惑星の公転周期の二乗が軌道長半径の三乗に比例する」というケプラーの第3法則が成立することを見てみよう。その準備として、楕円の性質について復習する。下図のように長半径  $a$ 、短半径  $b$  の楕円を考える。楕円は式(4.116)のように表されるが、もう一つの性質として、「二つの焦点  $F, F'$  からの距離の和が一定」ということが挙げられる。楕円上の点  $A$  または  $C$  を考えると、その距離の和が  $2a$  であることがただちにわかるだろう。一方、式(4.116)を使って、 $FA, F'A$  という長さを  $l$  と  $e$  で表すこともできる。これから  $a, l, e$  の間の関係式が得られ、それは

$$a = \frac{l}{1 - e^2} \quad (4.119)$$

となる。よって、距離  $OF$  を  $a$  と  $e$  を使って表すと  $ae$  となる。



点  $B$  に注目し、 $BF + BF' = 2a$  だから、 $2\sqrt{b^2 + (ae)^2} = 2a$  である。式(4.119)を用いて  $e$  を消去し、 $b$  を  $a, l$  で表すことができる。

$$b = \sqrt{al} \quad (4.120)$$

さて、楕円の面積は  $\pi ab$  だから公転周期を  $T$  として、面積速度は

$$h/2m = \frac{\pi ab}{T} \quad (4.121)$$

と書ける。(4.120)を用いて、さらに $l$ が(4.117)で表されることを用いると、

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \quad (4.122)$$

となり、ケプラーの第3法則が得られた。

#### 4.4.2 軌道六要素

ある時刻(エポック)における人工衛星の軌道(一般に楕円軌道)と位置は、以下で示す**軌道六要素**を用いて記述できる。図4.5は「人工衛星の力学と制御ハンドブック」より<sup>25</sup>。

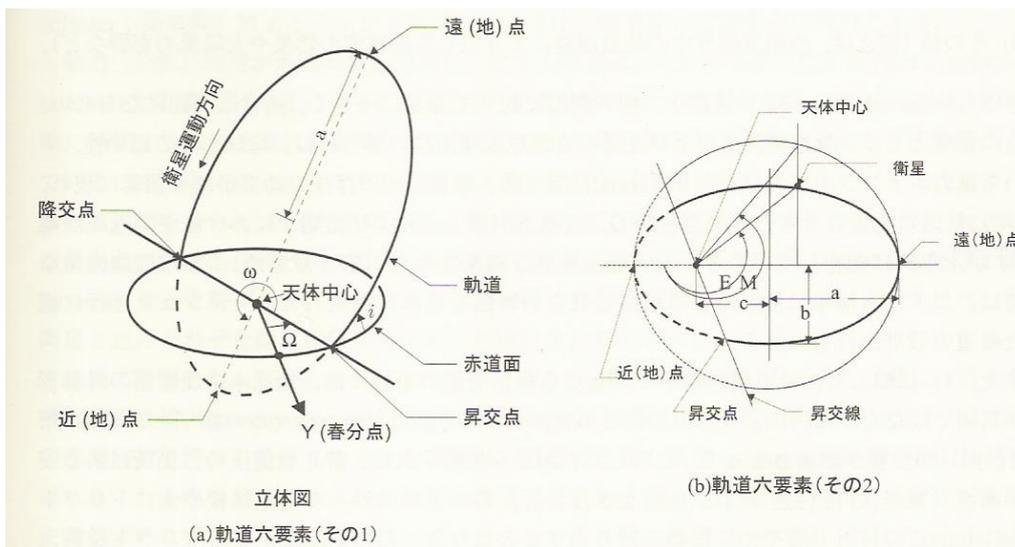


Figure 4.5: 人工衛星の軌道を記述する軌道六要素。「人工衛星の力学と制御ハンドブック」

- $a$ : 軌道長半径 (semi-major axis)。円軌道のときは、円の半径。
- $e$ : 離心率 (eccentricity)  $e = 0$  は円軌道。
- $i$ : 軌道傾斜角 (inclination)。地球の赤道面と人工衛星の軌道面がなす角度。
- $\Omega$ : 昇交点赤経 (right ascension of the ascending node)。  $i \neq 0$  のとき、地球の赤道面と人工衛星の軌道面が交差する点の赤経。
- $\omega$ : 近地点引数 (argument of perigee)。楕円軌道の場合、昇交点から測って近地点が軌道面上のどこに来るかを表わす。  
以上5つのパラメーターで軌道は決まる。
- $M$ : 平均近点離角 (mean anomaly)。与えられたエポックにおける人工衛星の軌道上での位置を表す。

図4.6に、1987年2月5日に打ち上げられ、1991年11月1日に大気圏に再突入した「ぎんが」衛星の軌道六要素の時間変化を示す。 $e \approx 0$ から、ほぼ円軌道であることがわかる。

<sup>25</sup><http://spaceflight.nasa.gov/realdata/elements/graphs.html> も参考に

地球の半径は、約 6378km だから、ぎんが衛星の打ち上げ時の高度は、約 550 km。軌道傾斜角  $i$  が、「ぎんが」衛星が打ち上げられた内之浦宇宙空間観測所の緯度に対応していることに注意しよう。地球の自転速度を稼ぐために、人工衛星は真東に打たれる。その結果、軌道傾斜角が打ち上げ地の緯度に一致することになる。

もし衛星の軌道の地球に対する相対的な位置が不変ならば、 $\Omega$  も  $a, e, i$  と同じくほぼ一定のはずであるが、 $\Omega$  は周期的に変化している。これは、地球が扁平である影響で人工衛星の軌道面が歳差運動をしているためである。ほぼ円軌道なので、近地点の位置を表わす  $\omega$  はあまり意味を持たない。

ミッションの終了近くになって、大気の摩擦のために、急激に  $a$  が減少 (衛星が降下) していることがわかる。また、もともと離心率は小さくほぼ円軌道であったが、衛星が降下するにつれて、さらに円軌道からのずれが「なまされて」、離心率も減少していることがわかる。

ケプラーの法則

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}. \quad (4.123)$$

より、 $a$  から衛星の公転周期が求められる。地球のシュワルツシルド半径、 $2GM/c^2 = 8.87$  mm を使うと、以下のように簡単に計算できる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\sqrt{2}\pi a^{3/2}/c}{\sqrt{2GM/c^2}} = \frac{2\sqrt{2}\pi(a/6900 \text{ km})^{3/2}(6900 \text{ km})^{3/2}/(300000 \text{ km/s})}{\sqrt{8.87 \text{ mm}}} \\ &= 95 \text{ min}(a/6900 \text{ km})^{3/2}. \end{aligned} \quad (4.124)$$

このようにして求められた公転周期と  $a$  の関係を図 4.7 に示す。

ぎんが衛星のように低高度の衛星は、一日に地球の周りを約 15 周することがわかる。

#### 4.4.3 静止衛星

地球の自転周期は 23 時間 56 分 4.09 秒である<sup>26</sup>。(4.124) から、人工衛星の公転周期が自転周期と等しくなるのは、 $a = 42200$  km のとき (高度は約 35800 km)。赤道上、この高さにある衛星は地表から見て静止しているように見えるので、**静止衛星**と呼ばれる。常に地表から見えている必要がある通信衛星、放送衛星、気象衛星などは、静止軌道に打ち上げられる。

#### 4.4.4 Two Line Elements

軌道六要素で衛星の軌道とある時刻における位置を表わすことができるわけだが、それと等価な情報とさらに衛星名、国際識別番号などを付加した情報を記述する、**Two Line Elements (TLE)** と言う標準的なフォーマットがある。

NORAD (NORTH American aerospace Defence Command; 北アメリカ航空宇宙防衛司令部;<http://www.norad.mil>) は、地球の周りを周回している (ほぼ) すべての人工衛星をモニターし、その軌道要素を TLE で公開している。TLE の説明については、[http://science.nasa.gov/Realtime/rocket\\_sci/orbmech/state/2line.html](http://science.nasa.gov/Realtime/rocket_sci/orbmech/state/2line.html) を参照。そこから TLE の定義を図 4.8 に再掲する。

軌道長半径  $a$  の代わりに、一日あたりの周回数である、“Mean Motion” が使われていることに注意。いくつかの衛星について、具体的な TLE の値を見てみよう。現在地球を周回している衛星の最新の TLE は、たとえば <http://celestrak.com> から入手できる。

<sup>26</sup>24 時間ではないことに注意。太陽に対して同じ向きになる周期が 1 日=24 時間。

## SUZAKU

1 28773U 05025A 08013.93865221 .00000558 00000-0 37528-4 0 6575

2 28773 31.4061 323.8498 0007001 164.9250 195.1602 15.00529329137995

## ASTRO-F (AKARI)

1 28939U 06005A 08014.23580039 .00000005 00000-0 11192-4 0 6030

2 28939 98.2316 16.5778 0008622 0.3484 359.7729 14.57435459100351

## HINODE (SOLAR-B)

1 29479U 06041A 08013.94377495 .00000087 00000-0 26130-4 0 4426

2 29479 98.0789 23.2007 0014564 229.4553 130.5382 14.62802560 69920

## INTEGRAL

1 27540U 02048A 08012.45833333 .00000061 00000-0 10000-3 0 6500

2 27540 86.3672 23.5282 7969010 276.7243 358.3858 0.33418208 2558

## HIMAWARI 6

1 28622U 05006A 08014.77456198 -.00000264 00000-0 10000-3 0 4588

2 28622 0.0211 76.8046 0002163 49.6656 46.0362 1.00271868 10549

これから、以下のことが読みとれる。(1) ずごく (X 線天文衛星)、あかり (赤外線天文衛星)、ひので (太陽天文衛星) は、一日に約 15 周回する、低軌道衛星である。ひまわりは一日に一周回する、静止衛星である。INTEGRAL 衛星は三日で一周する、大きな軌道である。(2) INTEGRAL は離心率が大きな楕円軌道を持つが、他の衛星はほぼ円軌道である。(3) ずごくの軌道傾斜角は、ぎんがと同じく、内之浦から真東に打ちだしているのので、内之浦の緯度に対応して 31.4 度である。ひまわりは赤道上の静止衛星なので、軌道傾斜角は 0 度。あかり、ひのでの軌道は、赤道とほぼ直交している。この二つの衛星は**太陽同期軌道**を持ち、軌道面が常に太陽を向いていて、ちょうど昼と夜の境目を周回している。それによって、ひのでは常に太陽を観測することが可能である。一方、あかりは、つねに地球と反対向きの空を観測することが可能になっている<sup>27</sup>。

巷に、TLE から衛星軌道を計算したり表示させたりするプログラムが溢れている。たとえば、<http://science.nasa.gov/Realtime/jtrack/3d/JTrack3D.html> (衛星の軌道を 3 次元的に表示し、そのスケールや向きをインターアクティブに変更できる<sup>28</sup>)、<http://www.lizard-tail.com/isana/tracking>、<http://www.n2yo.com> (Google map 上に衛星の位置をリアルタイムで表示できる) などを参照。

#### 4.4.5 準天頂衛星

静止衛星は地上から静止しているように見えるので、通信衛星や気象衛星として利用するのに便利である。しかし、地球上の緯度が高くなると静止衛星の仰角は低くなるので、地形や建物の陰となって見えにくくなり、不便である<sup>29</sup>。では、高緯度の場所からでも、常に天頂近くに見えるような衛星は実現できないだろうか？まず、軌道周期は、地球の自転周期と同じでなくてはならないことは明らかである。次に、軌道傾斜角は、その衛星を使う場所の地球上の緯度とほぼ同じでなくてははいけない。さらに、少々軌道を楕円にして (離心率 > 0)、遠地点がその場所の上空に来るようにすれば、衛星がその地点の上空にとどまる時間が長くなる (面積速度一定の法則!)。このように軌道をデザインしたのが、**準天頂衛星**である<sup>30</sup>。

<sup>27</sup>地球は赤外線を出すので、赤外線衛星にとってはノイズ源になる。

<sup>28</sup>なんと、2011 年 1 月時点でリンク切れ！これほど良いサイトがどこにいったのか…。NASA 頑張れ！

<sup>29</sup>緯度の高い国に行く機会があったら、衛星放送アンテナの向きがほとんど地面と並行になっていることを確かめてみてください！

<sup>30</sup>日本初の準天頂衛星みちびきが 2010 年 9 月 11 日に打ち上げられた。<http://qz-vision.jaxa.jp/>

準天頂衛星の軌道を地球表面に投影すると、8の字になる。しかし、準天頂衛星は地上から見て同じ位置にとどまり続けることはできないので、実用性を持たせて、常に天頂付近に衛星があるようにするには、昇交点赤経  $\Omega$  の異なる三機の準天頂衛星が必要になる<sup>31</sup>。

みちびきの TLE は以下の通りである<sup>32</sup>。

```
1 37158U 10045A 11015.18584668 -.00000050 00000-0 10000-3 0 607
2 37158 040.9221 193.2641 0749201 270.0188 212.6145 01.00271298 1281
```

これから、以下のことが読み取れる。

- 一日辺りの周回数、Mean Motion は当然ながら、ほぼ 1.00。
- 軌道傾斜角は 40.92 度 (青森県北部に対応)。
- 離心率は 0.0749 だから、ちょっとだけ円からずれている。
- 近地点引数は 270 度。赤道面を南から北へ横切って、位相が 270 度 (3/4 周期) 進んだところが近地点になっている。つまり、位相が 90 度進んだとき、青森県の上空が遠地点になっている。

現在、2011 年 1 月現在、日本の準天頂衛星は一機だけであるが、第二機、三機の打ち上げが計画されている。それらが打ち上げられたら、TLE で軌道を確認してみよう。それらの TLE は昇交点赤経 (上記の 193.2641) と平均地点離角 (212.6145) だけが異なって、あとは全く同じはずである。

<sup>31</sup> 準天頂衛星の解説、<http://www.satnavi.jaxa.jp/project/qzss/movie/index.html>、日本上空を通過する三機の準天頂衛星の運動を示したアニメーション、<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/ba/Qzss-01-120s2.gif>、が大変良くできている。これらの作者に感謝します。現在のみちびきの位置:<http://www.n2yo.com/?s=37158> あるいは、百聞は一見にしかず: <https://il.youtube.com/watch?v=kMrmgspfu5o>

<sup>32</sup> なぜか、<http://www.n2yo.com/satellite/?s=37158> というサイトにあった。

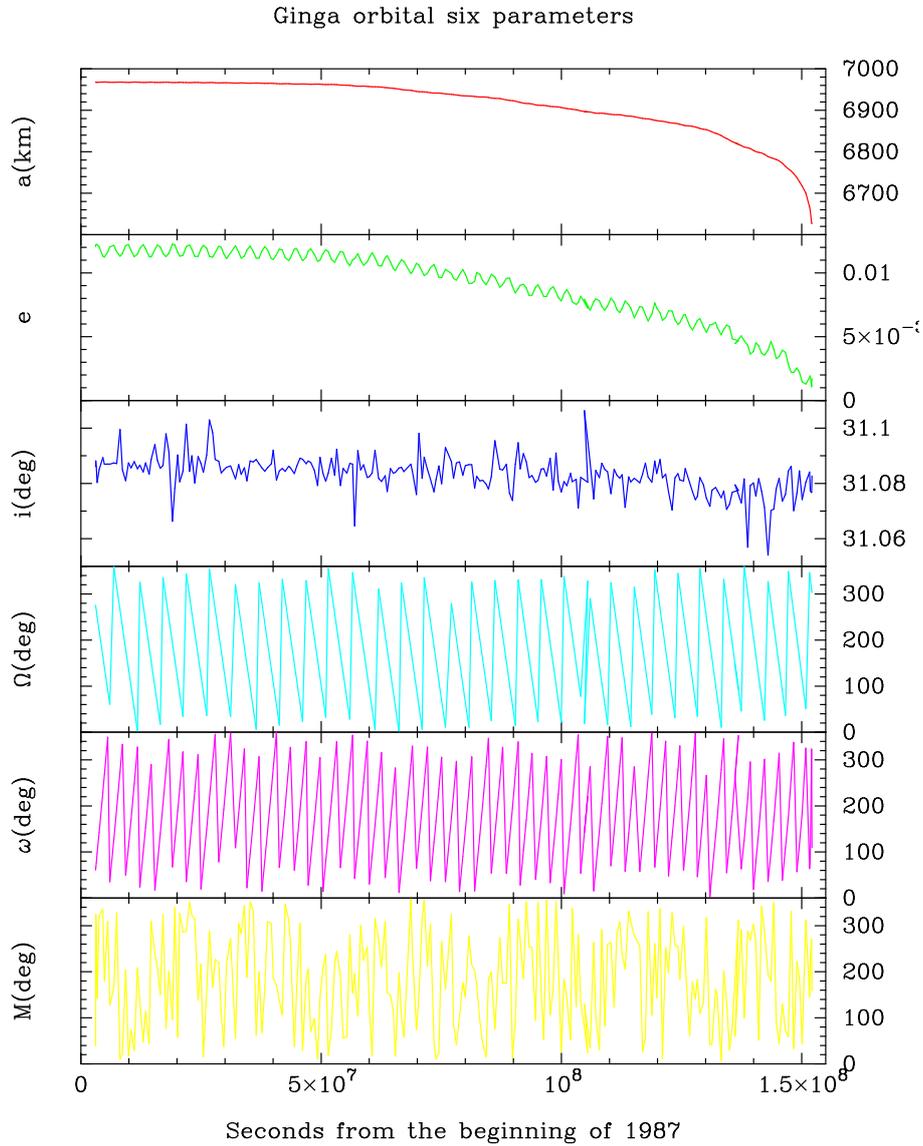


Figure 4.6: ぎんが衛星の軌道六要素の打ち上げから大気圏再突入までの時間変化。

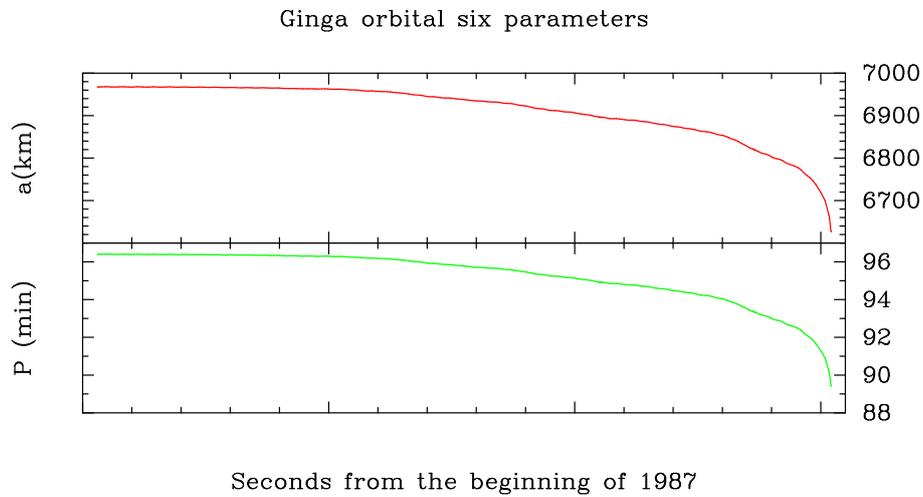


Figure 4.7: ぎんが衛星の打ち上げから大気圏再突入までの軌道長半径と周期の変化。

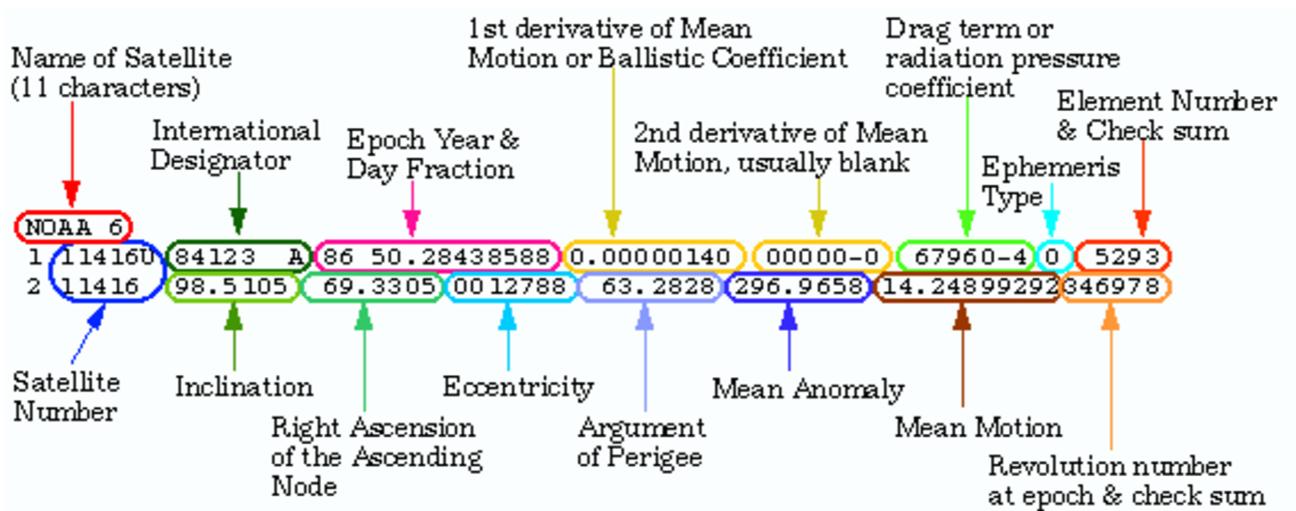


Figure 4.8: 人工衛星の軌道と位置を記述する Two Line Elements (TLE) の説明。 [http://science.nasa.gov/Realtime/rocket\\_sci/orbmech/state/2line.html](http://science.nasa.gov/Realtime/rocket_sci/orbmech/state/2line.html) より。



## Chapter 5

# X線天文学ことはじめ

### 5.1 様々な物理量の見積もり、覚えておくと便利な数値、式など

ここに書いた数値、事項を暗記しておく、あるいは即座に導けるようにしておくとう便利です。正確な値は文献を参考にしてください。

#### 5.1.1 基本中の基本

$$1 \text{ pc} \approx 3 \times 10^{18} \text{ cm}$$

$$\text{光速 } c \approx 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$$

$$1 \text{ 年} = 3.15 \times 10^7 \approx \pi \times 10^7 \text{ sec}$$

**地球と太陽との距離** 1Astronomical Unit (AU)  $\approx$  500 light-seconds

X線観測では、ひとつひとつのX線光子の到達時刻を精密に測定することができる(検出装置によっては～マイクロ秒の精度)。パルサーなどの時刻解析を行うときには、地球の運動、衛星の運動、天体の方向を考慮して”barycentric correction”を適用し、衛星上のX線光子到達時刻を太陽系重心(太陽の中にある)における到達時刻に変換する。Barycentric correctionによって、到達時刻は最大～500秒補正される。

#### X線の波長とエネルギーの換算式

$$E [\text{keV}] \approx \frac{12.4}{\lambda [\text{\AA}]}$$

「12.4 keVのX線の波長は1 Å」と覚えておこう。

#### X線のエネルギーと温度の換算式

$$1 \text{ eV} = 11604 \text{ K} \approx 10^4 \text{ K}$$

非常に大ざっぱに言って、「1 keVで光っている天体の温度は約1000万度」。

**エネルギーの単位の換算**  $1 \text{ eV} \approx 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg}$

**ボルツマン定数**  $k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$

**ステファン-ボルツマン定数**  $\sigma = 1.03 \times 10^{24} \text{ erg/s/cm}^2/\text{keV}^4$

この単位で覚えておくと実用的。たとえば、2 keV の黒体放射をしている半径 10 km の中性子星の光度  $L$  は、

$$L = 4\pi (10 \text{ km})^2 \sigma (2\text{keV})^4 \approx 2 \times 10^{38} \text{ erg/s.}$$

また白色矮星が Eddington 光度 (3.5) の黒体放射をしているときの温度は、

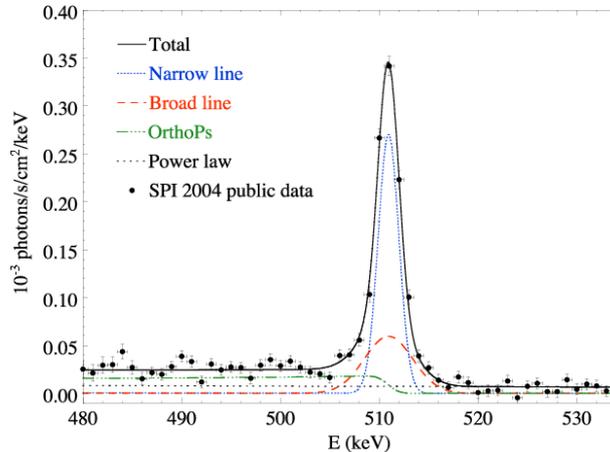
$$T = \left( \frac{L}{4\pi\sigma R^2} \right)^{1/4} \approx 80 \text{ eV} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{1/4} \left( \frac{R}{5000\text{km}} \right)^{-1/2}.$$

ROSAT 衛星が、典型的に  $\sim 50 \sim 100 \text{ eV}$  の温度を持つ “Super-soft Sources” を多数発見したが、上式による簡単な見積りから、その起源は (ほぼ) 黒体放射している白色矮星だと考えられている。

### 5.1.2 原子物理の復習

#### 電子/陽電子の質量

$m_e c^2 \approx 511 \text{ keV}$   $e^+e^-$  の対消滅で、二つのガンマ線光子が発生する。これが、511 keV の対消滅線 (annihilation line) として、銀河中心から観測されている (下図参照)。



Knödseder et al. 2006, A&A, 445, 579 より。

#### コンプトン波長

電子の静止エネルギー 511 keV を波長で表したのが電子の「コンプトン波長」

$$m_e c^2 = h\nu = hc/\lambda$$

より、 $\lambda_c = h/m_e c$ . 波長で表すと、 $12.4 \text{ keV}\text{\AA}/511 \text{ keV} \approx 0.024\text{\AA}$ .

**核子の質量**

$$m_p c^2 \approx m_n c^2 \approx 940 \text{ MeV} \approx 1 \text{ GeV}$$

**微細構造定数**

$$\frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

**プランク定数の覚え方**

$$\hbar c = 1973 \text{ eV} \text{ \AA} \approx 2000 \text{ eV} \text{ \AA}$$

これと微細構造定数を覚えておけば、いろいろな基本的なパラメーターを導ける。

**古典電子半径**

古典的には電子は「古典電子半径」 $r_0$ を持った球と近似できる。 $r_0$ は電気ポテンシャルと静止質量が等しくなる条件

$$\frac{e^2}{r_0} = m_e c^2$$

で定義される。上で示した数値を覚えておけば値を導くことができる。

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar c}{m_e c^2} \approx \frac{1}{137} \frac{2000 \text{ eV} \text{ \AA}}{511 \text{ keV}} \approx 3 \times 10^{-5} \text{ \AA}.$$

より正確には  $r_0 = 2.818 \times 10^{-5} \text{ \AA}$ .

**トムソン散乱の断面積  $\sigma_T$** 

古典電子半径を持つ球の断面積と置いていいが、正確には

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_0^2 = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2.$$

その逆数は、 $1.5 \times 10^{24} \text{ cm}^{-2}$ 。水素柱密度  $N_H$  がこれを越える物質は、トムソン散乱に対して光学的に厚くなる (Thomson thick; Compton thick)。

**ボーア半径**

単純に電子が陽子の回りで半径  $r_B$  の円運動をしていて、角運動量は量子化されていると考える。

$$m_e \frac{v^2}{r_B} = \frac{e^2}{r_B^2}$$

$$m_e v r_B = \hbar$$

これから  $v$  を消去して

$$r_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}.$$

$r_B \approx 0.5 \text{ \AA}$  と覚えておくと良いが、微細構造定数と  $\hbar c$  を覚えておけば、以下のようにしても導ける。

$$\frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx \frac{\hbar c}{m_e c^2} \frac{\hbar c}{e^2} \approx \frac{2000 \text{ eV \AA}}{511 \text{ keV}} 137 \approx 0.5 \text{ \AA}.$$

電子を一個だけ残して電離したイオン (hydrogenic-ion) についても、同様の議論ができる。原子番号  $Z$  の時、原子核の正電荷は  $Ze$ 。一つの  $e$  の代わりに  $Ze$  としたら良いから、電子の半径はボーア半径の  $1/Z$  となる。(正電荷が強いので、より中心集中する。)

### 水素のライマンエッジ

水素原子中の電子の結合エネルギー (binding energy) は、

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{r_B} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r_B} = -\frac{m_e e^4}{2 \hbar^2}.$$

電子にこれだけのエネルギーを与えてやれば、陽子から離れられる (無限遠で  $v > 0$ )。これがライマンエッジに対応する。13.6 eV と覚えておくと良いが、以下のように導くこともできる。

$$\frac{m_e e^4}{2 \hbar^2} = \frac{m_e c^2}{2} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 = \frac{511 \text{ keV}}{2} \left( \frac{1}{137} \right)^2 = 13.6 \text{ [eV]}.$$

また、波長にすると、 $12.4 \text{ [keV \AA]} / 13.6 \text{ eV} = 911 \text{ \AA}$  も覚えておこう。

### Hydrogenic-ion のライマンエッジ

水素原子の結合エネルギーは

$$E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r_B}$$

であったが、原子番号  $Z$  の原子が電子一つだけを残して電離したとき (hydrogenic-ion) は、 $r_B$  は  $1/Z$  になり (上記参照)、ひとつの  $e$  の代わりに  $Ze$  とすればよい。よって、原子番号  $Z$  の hydrogenic-ion の結合エネルギーは、水素の場合の  $Z^2$  倍になるので、 $13.6 Z^2 \text{ eV}$ 。

特に X 線天文で重要なのが、鉄 ( $Z = 26$ ) の K エッジあたりの構造。Fe 26 の K エッジのエネルギーは、 $13.6 \text{ [eV]} \times 26 \times 26 \approx 9.2 \text{ keV}$ 。

### 磁場の単位とエネルギー密度

おそらく教養、学部の電磁気学の授業では MKSA 単位系 (応用物理には便利) を用いたと思うが、天体物理のほとんどの教科書では Gauss 単位系を用いている (このノートでもすでにそうだが)、実際このほうが天文学の議論には便利。

特に磁場の強さ  $B$  を [gauss] で表わすと、エネルギー密度  $\epsilon$  [erg/cm<sup>3</sup>] は、

$$\epsilon \text{ [erg/cm}^3\text{]} = \frac{1}{8\pi} (B \text{ [gauss]})^2 \quad (5.1)$$

と簡単に表わされる。MKSA では、真空の透磁率  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [kg}\cdot\text{m}\cdot\text{C}^{-2}=\text{N/A}^2\text{]}$  を用いて、以下のようになる。

$$\epsilon \text{ [J/m}^3\text{]} = \frac{1}{2\mu_0} (B \text{ [Wb/m]})^2.$$

$1 \text{ [Wb/m]} = 10^4 \text{ [gauss]}$ 、 $[\text{Wb/m}] = [\text{N}/(\text{A}\cdot\text{m})]$  を思い出せば上の二つの式が等価であることがわかる。

### サイクロトロン振動数

磁場中の電子の、磁力線に垂直方向の運動を考える。

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e v B}{c} \quad (5.2)$$

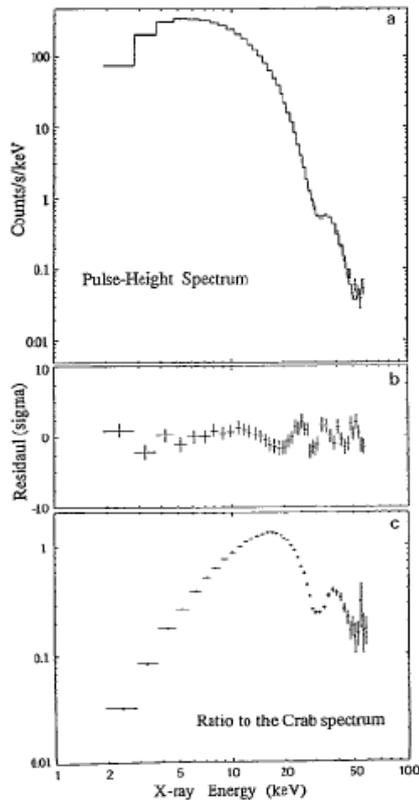
電子は磁力線のまわりに円運動を行う。上式より、その角振動数は  $\omega = v/r = eB/mc$  で、同じ角振動数の電磁波が放射される (サイクロトロン放射)。よってサイクロトロンエネルギー  $E_c$  は、

$$E_c = \frac{\hbar e B}{m_e c} = \frac{\hbar e}{2m_e c} 2B.$$

ここで、 $\hbar e/(2m_e c)$  は「ボア磁子」で、 $9.3 \times 10^{-21}$  erg/gauss という値を持つ。X線観測では以下の値を覚えておくと便利。

$$E_c = 11.6 \text{ keV} \frac{B}{10^{12} [\text{Gauss}]} \quad (5.3)$$

実際、X線連星パルサー中の中性子星は  $10^{12}$  Gauss 以上の強い磁場を持ち、中性子星大気中のサイクロトロン吸収線が、式 (5.3) で表わされるエネルギーに観測されている。



「ぎんが」が観測した X0331+35 からの 28.5 keV のサイクロトロン吸収線 (Makishima et al. 1990, ApJ, 365, L59)。これから、式 (5.1.2) を使って、中性子星の磁場は  $2.5 \times 10^{12}$  ガウスと導かれる。

また、ブラックホール周辺の磁場の強さは  $B \sim 10^7$  G と考えられていて、それによるサイクロトロン放射のエネルギーは、 $\sim 0.1 \text{ eV} \approx 10 \mu\text{m}$  で、赤外線領域にくる。これらの低エ

エネルギー光子が種となり (seed photons)、ブラックホール周辺の高エネルギー電子による逆コンプトン散乱 (inverse compton) を受けて、X線領域で観測される、というモデルがある。

### 5.1.3 宇宙物理とはじめ

#### カニ星雲 (Crab nebula) の X 線スペクトル

カニ星雲自体、興味深い観測対象であるが、単純なべき関数 (power-law) スペクトルを持ち、明るくてフラックスが変化しないため、ほぼすべての X 線天文衛星がカニ星雲を標準光源、"standard candle" として、検出器の較正 (calibration) に使っている。

1 keV  $\approx$  100 keV の範囲で「photon spectrum」は、

$$f(E) \approx 10 (E/1 \text{ keV})^{-2.1} [\text{photons/s/cm}^2/\text{keV}].$$

photons/s/cm<sup>2</sup>/keV というのが、X 線天文観測でよく使われるスペクトルの単位。「1 keV のところで 1cm<sup>2</sup> あたり毎秒  $\sim$ 10 個の光子が来る」と覚えておく。

#### Crab unit

カニ星雲は標準光源なので、特定のエネルギー範囲のカニ星雲のエネルギーフラックスを "Crab unit" として、X 線天体のおおざっぱな光度を示す慣用的な単位として用いている。「LMC X-3 の 2-10 keV における X 線強度は、 $\sim$ 10mCrab から  $\sim$ 40mCrab の間で変化する」等。

Xe や Ar を使った比例計数管の感度が 2-10 keV に高い感度を持つので、X 線天文学の初期の時代より、このエネルギーバンドで精力的に観測が行なわれてきた。2-10 keV において、1 Crab の「エネルギーフラックス」は photon spectrum にエネルギーを掛けて積分して、

$$\int_2^{10} 10 E^{-2.1} E dE = 13.9 \text{ keV/s/cm}^2 \approx 2 \times 10^{-8} \text{ erg/s/cm}^2$$

に対応する。「理科年表」の宇宙 X 線の項もそうだが、X 線天体の強度を示す際、2 - 10 keV の範囲のエネルギーフラックスを erg/s/cm<sup>2</sup> を単位として表すことが多い。

#### Opacity

星の大気中の輻射輸送で、光の経路に沿って 1 g あたりの断面積を良く使う。記号、単位は通常、 $\kappa$ 、[cm<sup>2</sup>/g]。X 線領域では、トムソン散乱による opacity、 $\kappa_T$  が支配的。厳密には  $\kappa_T$  は元素組成によるが (核子と電子の割合)、ほとんどが水素だと思って、

$$\kappa_T \approx \frac{\sigma_T}{m_p} \approx \frac{\sigma_T c^2}{1\text{GeV}} \approx \frac{6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2 \times (3 \times 10^{10} \text{cm/s})^2}{10^9 \times 1.6 \times 10^{-12} \text{erg}} \approx 0.4 [\text{cm}^2/\text{g}] \quad (5.4)$$

#### 典型的な星間密度

$$\approx 1 \text{ Hydrogen atom/cm}^3$$

これを使って、銀河系内の天体までの距離  $d$  と水素柱密度 (hydrogen column density) の関係： $\approx 3 \times 10^{21} (d/\text{kpc}) \text{ cm}^{-2}$

### 星間磁場と銀河系内のエネルギー密度

星間磁場の典型的な強度は、 $B \approx 3\mu$  Gauss。(5.1)より、エネルギー密度は  $\approx 3.6 \times 10^{-13}$  erg cm $^{-3} \approx 0.2$  eV cm $^{-3}$ 。

宇宙背景輻射 (Cosmic Microwave Background) のエネルギー密度は  $\approx 0.3$  eV/cm $^3$  で、星間磁場のエネルギー密度と同じくらい<sup>1</sup>。

一方、宇宙線のエネルギー密度は、 $\approx 1$  eV/cm $^3$ 。これが星間空間のエネルギー密度のうち最大を占める。

### X線吸収と空間吸収 (extinction) の関係

星間ガス中の C, N, O, Ne, Mg, Fe などの重元素により、X線は光電吸収を受ける。その大きさは、宇宙組成を仮定して、水素柱密度 ( $N_H$ ) で見積られる<sup>2</sup>。一方、可視光、赤外の空間吸収 (extinction) と赤化 (reddening) はダストによる。水素柱密度の量と、各バンドの extinction, reddening の間には経験則がある。いくつかの例を挙げる。

$$N_H/A_V = 1.9 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2} \text{ mag}^{-1} \quad (5.5)$$

$$N_H/A_J = 5.6 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2} \text{ mag}^{-1} \quad (5.6)$$

$$N_H/E(J-K) = N_H/(A_J - A_K) = 1.1 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2} \text{ mag}^{-1} \quad (5.7)$$

式 (5.5) と (5.7) は Allen's Astrophysical Quantities より。式 (5.6) は、Vuong et al. 2003, A&A, 408, 581 より。式 (5.6) と (5.7) から、

$$N_H/A_K = 1.1 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2} \text{ mag}^{-1}. \quad (5.8)$$

$V \rightarrow J \rightarrow K$  と波長が長くなるにつれ、一等級暗くなるのに必要な水素柱密度が大きくなる。つまり、より銀河面を「深く」見通せることに注意<sup>3</sup>。

### 空間吸収 (extinction) と光学的厚み (optical depth) の関係

空間吸収の量を  $A$ , それに対応するダストの光学的厚みを  $\tau$  とする。空間吸収を受ける前のフラックス、等級を  $f_b, m_b$ 、受けた後のフラックス、等級を  $f_a, m_a$  とすると、

$$f_a = f_b e^{-\tau}$$

$$m_b = -2.5 \log f_b + C, m_a = -2.5 \log f_a + C$$

だから、

$$A = m_a - m_b = 2.5 \log(f_b/f_a) = 2.5 \tau \log e = 1.09 \tau \approx \tau. \quad (5.9)$$

つまり、extinction により星のフラックスを一等級暗くする星間ダストの量は、ほぼ光学的厚みが 1 に対応している。

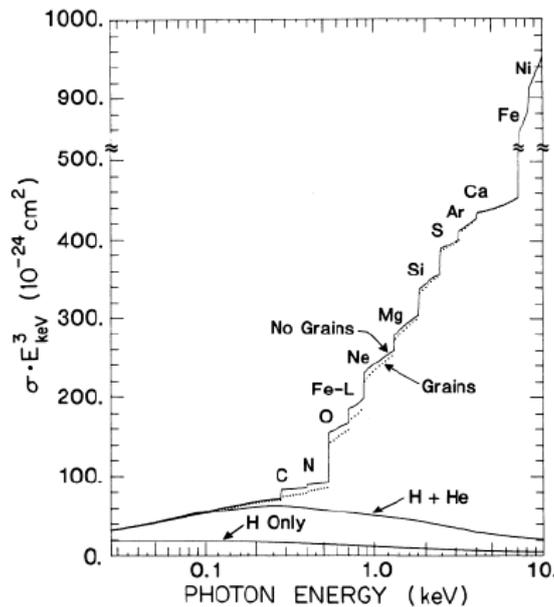
<sup>1</sup>一般に、磁場中に低エネルギー光子と高エネルギー電子が共存するときにはシンクロトン放射と逆コンプトン散乱による放射が観測されるが、磁場のエネルギー密度と低エネルギー光子密度の比が、両エネルギースペクトルの強度比を与える (式 6.69)。よって、星間磁場中の高エネルギー電子 (たとえば超新星残骸中) がシンクロトン放射するとともに宇宙背景輻射光を逆コンプトン散乱で叩きあげるとき、観測される両スペクトル成分のエネルギーはほぼ等しくなる (6.7 節)。

<sup>2</sup>水素自身は X線吸収に全く効かないことに注意。ヘリウムも同様。

<sup>3</sup>なぜか、 $N_H/A_K$  を陽に書いてある文献が見当たらない。御存知の方、教えてください。

### X線とKバンドの透過力の比較

式(5.8)と(5.9)より、Kバンドで $\tau \approx 1$ となるのは、 $N_H \approx 1.1 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$ のとき。X線に対する星間吸収の吸収断面積はエネルギーに大きく依存するが(下図参照)、1.5 keVのときに $\sim 9 \times 10^{-23} \text{ cm}^2$ となり、 $N_H \approx 1.1 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$ に対して $\tau \approx 1$ となる。つまり、**Kバンドの赤外線と1.5 keVのX線は、星間物質に対してほぼ同じ透過力を持つことになる。**濃い物質に遮られて可視光では見えない天体が、X線と赤外線では観測できる、という例がよくある。



Morrison and McCammon, 1983, ApJ, 270, 119 より。

ちなみに、 $l \approx 28^\circ$ の方向で、銀河円盤を貫いたときの水素柱密度は $\sim 6 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$ 。Kバンド、あるいは1.5 keVのX線では貫くことは非常に難しいが、さらに高エネルギーのX線を用いれば、簡単に銀河面の向こう側を見ることができる<sup>4</sup>。

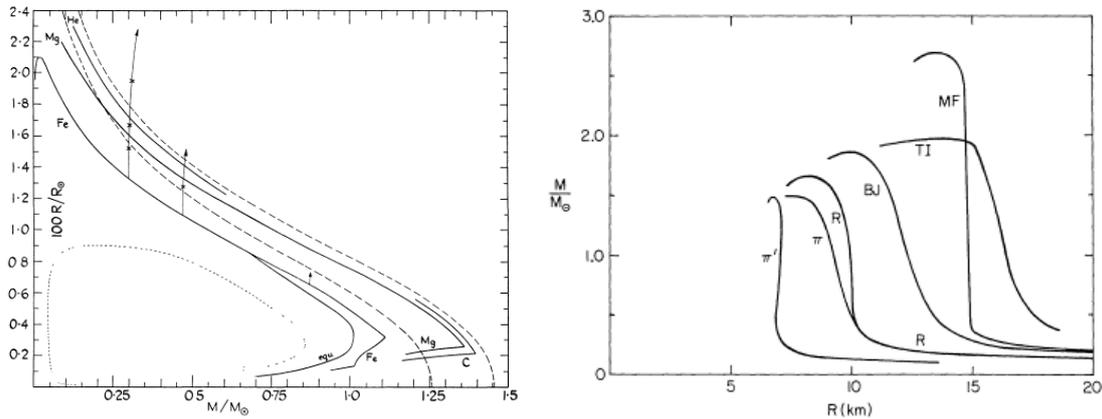
### 白色矮星のパラメーター

- 白色矮星が電子の縮退圧で支えられる最大限界質量  $\approx 1.4M_\odot$ 。  
これを Chandrasekhar limit という。Chandrasekhar は、1983年のノーベル物理学章受賞。Chandra 衛星の名前は Chandrasekhar の業績に由来する。
- 典型的な質量  $\approx 1M_\odot$
- 典型的な半径  $\approx 6000 \text{ km}$   
太陽くらいの質量で地球くらいの大きさ、と覚えておく。
- 組成と状態方程式が決まれば、質量と半径の間に一意的な関係がある。**重いほど小さくなる。**

<sup>4</sup>銀河面上  $l \approx 28^\circ$  で観測された暗い ( $\sim 3 \times 10^{-15} \text{ erg/s/cm}^2$  [2–10 keV]) 硬 X 線天体の大部分が背景の AGN、というのが Ebisawa et al. 2001, Science, 293, 1633 の結論。

### 中性子星のパラメーター

- 典型的な質量  $\approx 1.4M_{\odot}$   
進化した星 (Type II 超新星の progenitor) の縮退したコアの質量が Chandrasekhar limit に対応している
- 典型的な半径  $\approx 10$  km
- 最大限界質量  $\approx 3M_{\odot}$  (これ以上重くなると中性子の縮退圧で支えきれなくなる)
- 組成と状態方程式が決まれば、質量と半径の間に一意な関係がある。**重いほど小さくなる。**



白色矮星 (左; Hamada and Salpeter 1961, ApJ, 134, 683) と  
中性子星 (右; Baym and Pethick ARAA 1979, 415) の質量-半径関係

### ブラックホールのパラメーター

- 最小質量  $\approx$  中性子星の最大限界質量  $\approx 3M_{\odot}$
- 測定されている最大の stellar black hole の質量 =  $15.7 M_{\odot}$  (M33 X-7)<sup>5</sup>。その次は  $\sim 14M_{\odot}$  (GRS1915+105)
- 我々の銀河中心のブラックホールの質量:  $(3.7 \pm 0.2) \times 10^6 [R_0 / (8 \text{ kpc})]^3 M_{\odot}$  (Ghez et al. 2005, ApJ, 620, 744)
- 星の進化の最終段階でできるブラックホール (stellar blackhole) の質量の上限:  $\sim 40M_{\odot}$ ? (Fryer 1999, 522, 413) まだよくわかっていない。
- “Stellar blackhole” ( $\sim 10M_{\odot}$ ) と銀河中心の “supermassive blackhole” ( $\gtrsim 10^6 M_{\odot}$ ) の中間の質量を持つ「中質量ブラックホール (Intermediate-mass blackhole)」( $100 - 1000 M_{\odot}$ ) は存在するだろうか?  
→ Ultra-luminous X-ray Sources (ULXs) と関連して、2011年現在、未だ解決していない問題。

<sup>5</sup><http://chandra.harvard.edu/photo/2007/m33x7/>

## ブラックホールの変動の時間スケール

シュバルツシルト半径を光が横切るのに要する時間

$$\Delta t \approx \frac{2GM/c^2}{c} = \frac{2GM_\odot/c^2}{c} \frac{M}{M_\odot} \approx \frac{3 \text{ km}}{3 \times 10^5 \text{ km/s}} \frac{M}{M_\odot} \approx 10 \mu\text{sec} \frac{M}{M_\odot}.$$

RXTE 衛星は最大  $\mu\text{sec}$  のオーダーの時間分解能の観測が可能。実際、多くのブラックホールや中性子星から、RXTE 衛星は数百 Hz の準周期変動 (Quasi Periodic Oscillation; QPO) を観測している。しかし、シュバルツシルト半径のあたりからやってくる X 線スペクトルの時間変動を詳細に調べるには、長い観測を行って光子をためる必要がある。そのためには、 $\sim 10M_\odot$  の stellar blackhole よりも  $\gtrsim 10^6M_\odot$  の supermassive blackhole のほうが適している。たとえば、 $\sim 10^8M_\odot$  のブラックホール質量を持つ明るい AGN のエネルギースペクトル変化を  $\sim 100$  秒ごとに調べれば (それは XMM 衛星の能力で可能)、ブラックホールを取りかこむ降着円盤の動きを追うことができる。

## 5.2 X線検出装置

### 5.2.1 検出原理

#### マイクロカロリメーター以外

エネルギー  $E$  を持ったひとつの X 線光子が検出器内のガスや半導体中で、Xe や Si 原子の内殻 (多くの場合 L 殻なので、ここではそれを仮定; binding energy を  $-E_L$  とする ( $E_L > 0$ )) に光電吸収されると、エネルギー  $E - E_L$  を持った光電子 (photoelectron) が発生する。L 殻に穴があいた原子は基底状態よりエネルギーが  $E_L$  だけ高く、不安定である。この原子に M 殻から電子が落ちてきて、エネルギー  $E_L - E_M$  の励起光 (fluorescent light) か、エネルギー  $E_L - 2E_M$  のオージェ電子 (Auger electron) を発生する。前者の場合、M 殻にひとつ穴が空いて、原子のエネルギーは基底状態より  $E_M$  だけ高くなり、後者の場合は、M 殻にふたつ穴が空いて、原子のエネルギーは基底状態より  $2E_M$  だけ高くなる。一部の励起光は検出器の外に逃げてしまう (escape) が、それ以外は原子に外殻電子により再吸収される。オージェ電子も原子にエネルギーを与える。基底状態よりエネルギーが高い原子は不安定で、さらに外殻からの励起光やオージェ電子の放出を繰り返えし、最終的には基底状態に落ちつく。

最終的に、検出器に吸収された入射光子の持っていたエネルギーは (エスケープしてカウンターから逃げた分を除くと)、検出器中のたくさんの Xe や Si 原子から電子を剥ぎとるのに使われたことになる。吸収物質の平均電離エネルギーを  $w$ 、入射 X 線エネルギーを  $E$  とすると、一次電子の数  $N$  は、

$$N = E/w \quad (5.10)$$

で与えられる。比例計数管や蛍光比例計数管によく用いられる Xe については  $w = 21.5 \text{ eV}$ 、CCD に用いられる Si については  $w = 3.65 \text{ eV}$  である。その一次電子群をなんらかの方法で増幅して、X 線光子一つに対応する電気パルス信号として検出する。パルス信号の波高 (pulse-height) が X 線エネルギーに対応し、波高のゆらぎ (不定性) がエネルギー分解能を決める。

#### マイクロカロリメーター

非常に低温に保った吸収体に X 線光子一つが入ってきたときの微少な温度上昇 (これがエネルギーに比例) を測定。Grating よりも格段に効率が良く、CCD に比べエネルギー分解能に

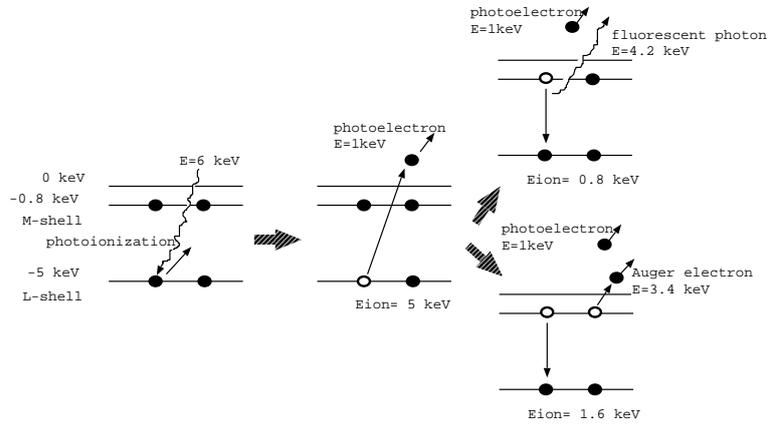


Figure 5.1: Xeによる6 keVのX線光電吸収の模式図。

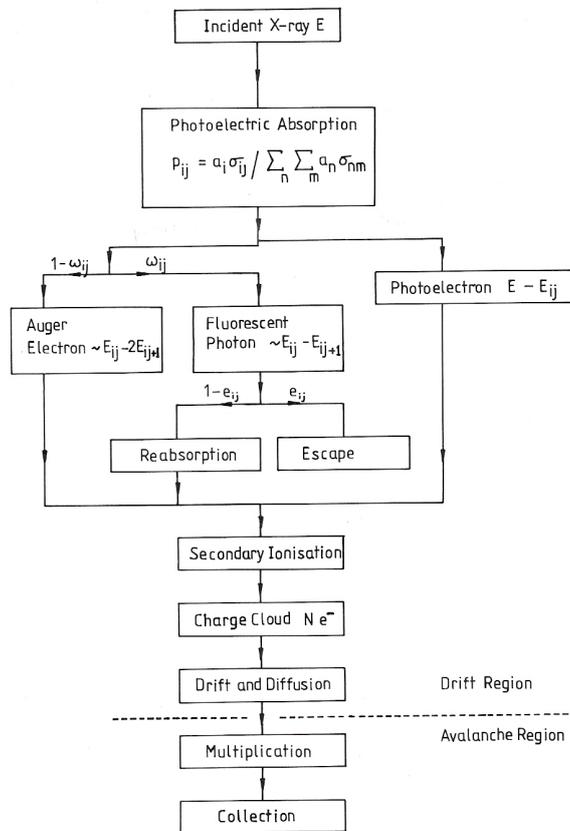


Figure 5.2: 比例計数管のX線検出原理。“X-ray detectors in astronomy” (Fraser) より。

優れている。

X線のエネルギー  $E$ 、吸収物質の熱容量  $C$  として、温度上昇

$$\Delta T = E/C \quad (5.11)$$

を測定する。すぎく XRS では、 $C \approx 0.18$  pJ/K。よって、 $1$  keV  $\approx 1.6 \times 10^{-16}$  J の X 線光子による温度上昇は、 $\sim 0.9$  mK。すぎく XRS は  $\sim 65$  mK まで冷却することによって、これほど僅かな温度上昇でも測定できた。

一つの X 線光子が入射して吸収体の温度が上昇、元に戻るまでにレスポンス時間 (数ミリ秒) が生じる。その間に別の X 線光子が入力すると、正確な温度 (エネルギー) が測れない。よって、明るい天体の観測の際には、フラックスを減少させるためのフィルターを使う。

Astro-E1, 「すぎく」に搭載した XRS (X-Ray Spectrometer) が最初だった。冷却系 (cryogenics) が技術的に非常に難しい (すぎく XRS の失敗も冷却系に起因する)。

ピクセル化が困難。XRS は  $\sim 30$  ピクセル足らずで、精密な画像は取得できなかった。ピクセル化は次世代のカロリメーターの課題。

吸収体の温度測定の精度が、エネルギー分解能を決める。XRS はサーミスタを使い、温度変化を抵抗の変化として測定。次世代のマイクロカロリメーターとして、超伝導と常伝導の境で温度によって急激に抵抗が変ることを利用した Transition Edge Sensor (TES) の開発が進められている。高ピクセル化した TES マイクロカロリメーターが、現在考えられる最高の X 線検出装置と言える (X 線の位置とエネルギーを正確に測れる)。

### 5.2.2 感度

検出装置の感度を表す量、“Imaging advantage” を  $(A_s/A_b)^{1/2}$  と定義する。 $A_s$  は天体からのイベント数、 $A_b$  はバックグラウンドイベント数。有効面積を増やして ( $A_s$  増加)、バックグラウンドを減らせば ( $A_b$  減少) 感度があがる。しかし、 $A_b$  は検出器の面積 (あるいは体積) に比例する。よって、感度を上げるにはできるだけ**大きな X 線鏡**を使い、できるだけ**小さな検出器**に集光させてやれば良い。究極的な感度は  $A_b$  で決まることに注意。(ミラーの面積が足りない分は観測時間で稼げる。)

$\sim 400$  cm<sup>2</sup> の範囲にやってくる X 線を  $\sim 24$   $\mu$ m<sup>2</sup> に集光する Chandra 衛星が、史上最高の感度を誇る。Chandra の感度は background limited でなく、photon-limited。観測時間が長いほど、暗い天体を観測できる。

観測時間  $T$  の間に、ある X 線天体からの光が一つの CCD ピクセルに集光され、 $s$  個の光子が検出された場合、その優位性を考えよう。その間の 1 ピクセルあたりのバックグラウンド (ノイズ) レートを  $b$  とする。天体からの X 線とバックグラウンドを合わせ、 $T$  の間に観測されるカウント数は、平均  $n+b$  のポアソン分布に従う。ポアソン分布の性質から、その標準偏差は  $\sigma = \sqrt{s+b}$  である。よって、S/N 比 (Signal to Noise Ratio) は、

$$S/N = \frac{s}{\sqrt{s+b}}. \quad (5.12)$$

たとえば、Chandra 衛星が今まで最も深く観測した領域の 1 つに Chandra Deep Field North があり、露光時間 (exposure time) は  $T \approx 2 \times 10^6$  sec である。Chandra の X 線 CCD バックグラウンドレートは 0.5 – 2 keV で 1 チップあたり約 0.1 cts/s/chip<sup>6</sup>。1 chip は 1024 × 1024 ピクセルだから、 $\sim 10^{-7}$  cts/s/pixel になる。つまり、約  $2 \times 10^6$  sec 積分して期待される平

<sup>6</sup>Chandra Proposers' Observatory Guide より。http://cxc.harvard.edu/proposer/POG/html/chap6.html

均のバックグラウンドレートは  $b \approx 0.2$  cts/pixel である。(5.12) 式より、 $3\sigma$  で天体を検出する条件は、 $s > 9.2$  photons/pixel/ $T$  となる。X線の平均エネルギーを 1 keV ( $\sim 1.6 \times 10^{-9}$  erg) としよう。Chandra の有効面積を  $\sim 400$  cm<sup>2</sup> とし、この検出条件 (感度) は、

$$9.2 \times 1.6 \times 10^{-9} \text{ erg}/400 \text{ cm}^2/2 \times 10^6 \text{ sec} \approx 2 \times 10^{-17} \text{ erg/s/cm}^2 \quad (5.13)$$

に対応する。実際、これがほぼ CDFN で検出されている最も暗い天体に対応している。

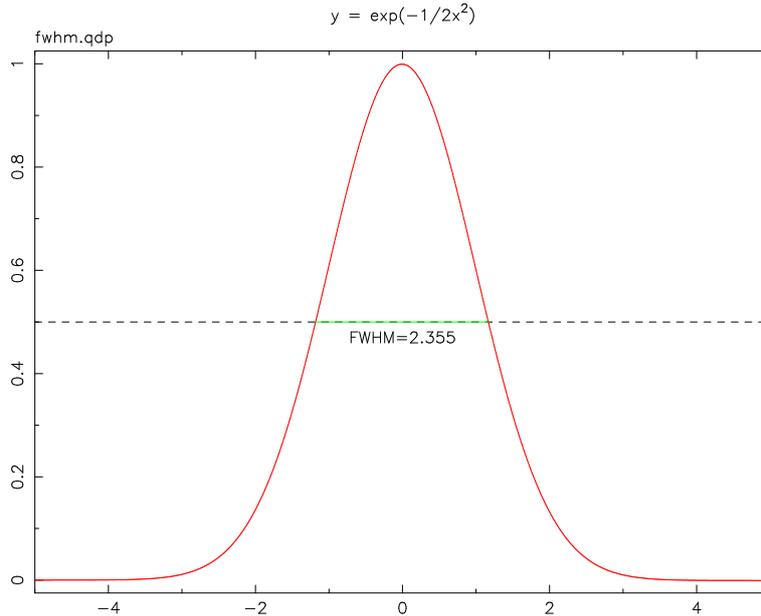
### 5.2.3 エネルギー分解能

#### 半値幅

X線検出器に細いラインが入射してきても、それは検出器のエネルギー分解能でなまされてしまい、観測されるラインプロファイルは、ガウシアンで近似される。多くの場合、検出器のエネルギー分解能はラインプロファイルの半値幅 (Full-Width at Half Maximum; **FWHM**) で表わされる。下図からただちにわかるように、FWHM と標準偏差  $\sigma$  の間には、

$$FWHM = 2.355 \times \sigma$$

という関係がある。



#### 光電吸収や電子・正孔対を利用した検出器

式 (5.10) で与えられる一次電子群をなんらかの方法で増幅、パルス信号として検出し、その波高 (pulse-height)  $P$  が X線エネルギーに対応し、波高のゆらぎ (不定性)  $\sigma_P$  がエネルギー分解能に対応している。

FWHM で表わしたエネルギー分解能は以下のように書ける。

$$\Delta E/E = 2.355 \times \sigma_P/P = 2.355 \times \sqrt{(\sigma_N/N)^2 + (\sigma_S/P)^2} \quad (5.14)$$

ここで、 $\sigma_N^2$  は一次電子数  $N$  の統計ゆらぎで決まり、 $\sigma_S^2$  はそれ以外のシステムティックな原因によるパルス波高の不定性による。たとえば比例計数管の場合は電子なだれによる増幅過程、CCD の場合は信号読み出しノイズが  $\sigma_S^2$  に寄与し、エネルギー分解能を悪化させる。

一次電子の数がポアソン分布に従うならば、 $\sigma_N^2 = N$  である。しかし、実際には、5.2.1 節で述べたように、一次電子の生成過程は互いに独立ではないので、一次電子数のゆらぎはポアソン分布の場合よりも小さくなり、平均電離エネルギー  $w$  を使って、

$$\sigma_N^2 = NF = \frac{EF}{w} \quad (5.15)$$

と書ける。 $F$  はファノファクターと呼ばれ、Xe 等を使った比例計数管の場合は  $\sim 0.17$ 、Si を使った CCD の場合は  $\sim 0.1$  である。

エネルギー分解能が一次電子数の統計的ゆらぎだけで決まる、理想的な場合を考えよう。式 (5.14) と (5.15) から、

$$\Delta E/E = 2.355 \times \sigma_P/P = 2.355 \sqrt{\frac{Fw}{E}}. \quad (5.16)$$

光電吸収を利用した検出器の場合、種類によらず**エネルギーが高いほどエネルギー分解能が良くなる** ( $\Delta E/E \propto E^{-1/2}$ ) ことを覚えておこう。

Xe ( $w = 21.5$  eV;  $F = 0.17$ ) と Si ( $w = 3.65$  eV;  $F = 0.1$ ) について具体的な値を求めると、

$$\Delta E/E = 14 \% \sqrt{\frac{1}{E[\text{keV}]}} \text{ for Xe}$$

$$\Delta E/E = 4.5 \% \sqrt{\frac{1}{E[\text{keV}]}} \text{ for Si.}$$

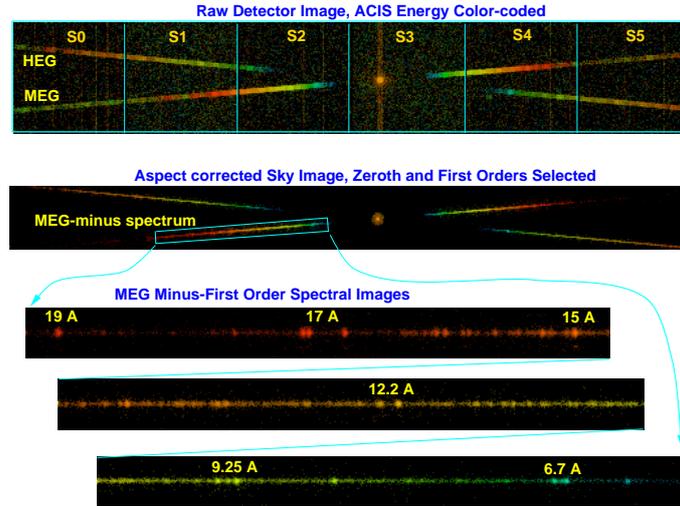
上記の理想値を実際の検出装置のエネルギー分解能と比較しよう。「あすか」衛星搭載の GIS、SIS は、それぞれ Xe を使った蛍光比例計数管、Si を使った CCD である。GIS の実際のエネルギー分解能は  $\sim 14 \% @ 1.5$  keV (理想値は 11 %; 以下同様)、 $\sim 7.7 \% @ 6$  keV (5.7 %)、SIS については  $\sim 5 \% @ 1.5$  keV (3.7 %),  $\sim 2 \% @ 6$  keV (1.8 %) であり<sup>7</sup>、数々のノイズ削減機構が効果的に働いているお陰で、理想値に近いエネルギー分解能を実現していることがわかる。

### Grating (回折格子; 分散系)<sup>8</sup>

X線ミラーと組みあわせて、X線分光観測に使う。ミラーで集光されたX線を透過型(Chandra)あるいは反射型(XMM)の回折格子により、波長に応じて分散させる。分散されたX線の到達位置を、CCDやMicrochannel Plateなどの位置検出型装置で測定し、検出器上の位置情報をX線波長(エネルギー)に換算する。X線を透過、反射するときの効率が悪いため( $\sim 20\%$ )、感度が悪い。

<sup>7</sup>Tanaka, Inoue and Holt 1994, PASJ, 46, L37

<sup>8</sup>この節、"Chandra Proposer's Observatory Guide", <http://xc.harvard.edu/proposer/POG/html> を参考にしました。



Chandra High Energy Transmission Grating (HETG) による Capella 観測時の画像データ  
([http://cxc.harvard.edu/proposer/ogplots/HETGS\\_capella.example.ps](http://cxc.harvard.edu/proposer/ogplots/HETGS_capella.example.ps))

HEG (High Energy Grating), MEG (Medium Energy Grating) という二台の grating を持ち、  
両方の分散光が同時に取得できる。検出装置は X 線 CCD。

Chandra 衛星の HETG (High Energy Transmission Grating) を例にとって、Grating (回折格子) のエネルギー分解能がどうやって決まるか考えてみよう。HETG は二種類の grating、HEG (High Energy Gratings) と MEG (Medium Energy Gratings) を搭載している (77 頁の図参照)。それぞれの格子間隔 (period)  $p$  は、 $\sim 2000\text{\AA}$ ,  $\sim 4000\text{\AA}$  である。光軸から  $\beta$  ずれた方向で波長  $\lambda$  の回折光が強め合いの干渉を起こすとすると、

$$p \sin \beta = m \lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.17)$$

の関係がある。入射光は、回折格子と焦点面との距離  $R$  を直径とする円 (ローランド円) の上に、スペクトルとなって結像する<sup>9</sup>。

以下、一次光、 $m = 1$  の場合を考える。光軸から一次光までの距離を  $y$  とすると、下図より  $y = R \sin \beta$ 、よって、(5.17) より、

$$\lambda = \frac{p y}{R}, \quad (5.18)$$

$$\Delta \lambda = \frac{p \Delta y}{R}. \quad (5.19)$$

これらの式より、

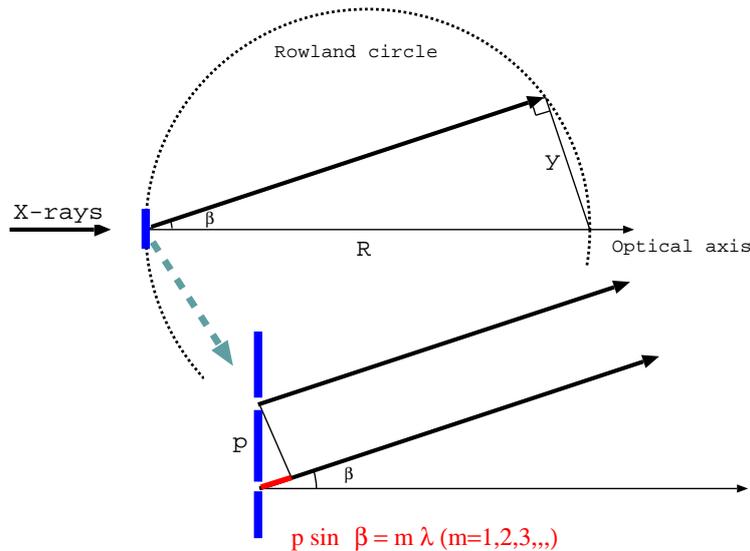
$$\Delta \lambda / \lambda = \Delta y / y. \quad (5.20)$$

つまり、分散した光の「位置」決定精度で、波長 (エネルギー) 分解能が決まることがわかる。ここで、 $\Delta \lambda = p \Delta y / R$  は波長 (エネルギー) によらないことに注意。よって、**grating のエネルギー分解能は波長が長いほど (エネルギーが低いほど) 良くなる。**

また、広がった天体 (超新星残骸、銀河団など) を grating で見ると、それ自体の拡がり  
と、波長の違いによる位置のずれ  $y$  の区別がつかないので、grating による広がった天体の  
分光観測は非常に困難である<sup>10</sup>。

<sup>9</sup>光軸上には「0 次光」が現われる。これは分散されておらず、回折格子がない場合の光が弱まったものと考えて良い。

<sup>10</sup>だからこそ X 線マイクロカロリメーターへの期待が大きい!



$\Delta y$  は分散光の検出器上の位置精度で、望遠鏡の空間分解能を  $\Delta\theta$  とすると、 $\Delta y \approx R\Delta\theta$ 。よって、 $\Delta\lambda \approx p\Delta\theta$  となる。これは、ミラーに装着された grating を「観測」して格子定数の値を測定、その不定性が波長の不定性に対応する、というイメージ。

Chandra HETG を例にとると  $p \approx 2000\text{\AA}$ ,  $\theta = 1''$  だから、 $\Delta\lambda \approx 2000 \times \pi / (3600 \times 180) \approx 0.01\text{\AA}$  となる (Proposers' Observatory Guide による実測値は  $0.012\text{\AA}$  (FWHM))。

### マイクロカロリメーター

気体検出器や半導体検出器と同様、マイクロカロリメーターのエネルギー分解能は統計的ゆらぎ (カロリメーターの場合は電子でなくフォノン) とシステムティックエラーからなる。式 (Eres) と同様に、フォノン数  $N$  のゆらぎだけで決まる原理的なエネルギー分解能を見積ってみる。吸収体の動作温度を  $T$  とすると、式 (5.11) に出てきた比熱  $C$  を使って、内部エネルギーは  $\sim CT$  と見積もられる。一方、フォノン一個あたりのエネルギーは、 $\sim kT$  なので、フォノンの数は、 $N \sim CT/kT = C/k$  である。よって、フォノン数のゆらぎによるエネルギーのゆらぎ (FWHM) は、

$$\Delta E \sim 2.355\sqrt{N}kT \sim 2.355\sqrt{kT^2C}.$$

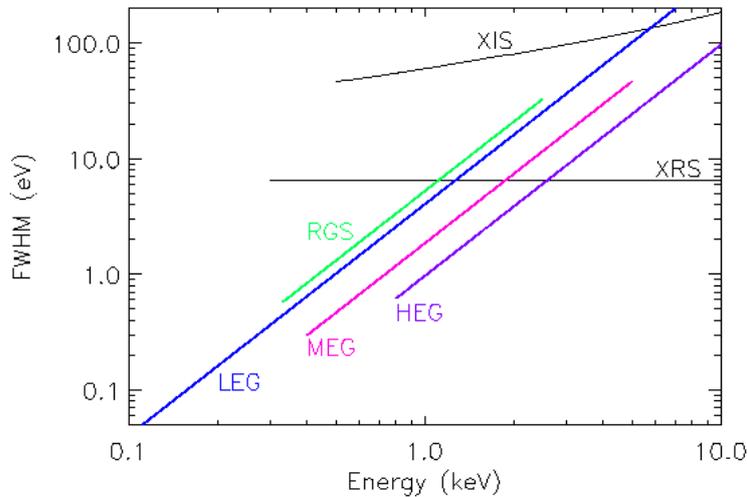
**カロリメーターの  $\Delta E$  (検出器の分解能による幅) は入射エネルギーによらないことに注意。** XRS の値、 $T \sim 65\text{ mK}$ 、 $C \sim 0.18\text{ pJ/K}$  を用いると、この値は  $\sim 1.5\text{ eV}$  になる。ASTRO-E (2000 年) 搭載 XRS のエネルギー分解能は、 $\sim 9\text{ eV}$ 、すごく (2005 年) 搭載 XRS については  $6 \sim 7\text{ eV}$  であった。ASTRO-H (2014 年打ち上げ予定) SXS では  $\sim 5\text{ eV}$  を目指している。年を追って、ノイズ低減の努力によってエネルギー分解能が理想値に近づいていることに注意<sup>11</sup>。

### いろいろな検出器のエネルギー分解能の比較

下図に、CCD, grating, カロリメーターのエネルギー分解能を比較する。 $\Delta E/E$  でなく、 $\Delta E$  をプロットしていることに注意。鉄の K バンド付近  $\sim 6\text{ keV}$  では、カロリメーターがもつ

<sup>11</sup>Transition Edge Sensor (TES) を用いた次世代のマイクロカロリメーターでは、すでに  $< 3\text{ eV}$  を実現しており、それを搭載した衛星計画が存在する。

とも優れているが、低エネルギー側では grating のほうが優れていることがわかる。観測対象に応じて、装置を使い分けることが大切である。



いろいろな観測装置のエネルギー分解能によるライン幅の比較。

[http://suzaku.gsfc.nasa.gov/Images/astroe/performance/spectro\\_enres.gif](http://suzaku.gsfc.nasa.gov/Images/astroe/performance/spectro_enres.gif) より。

XRS は「すざく」搭載の X 線マイクロカロリメーター。XIS は Chandra 搭載の CCD、LEG/MEG/HEG は、Chandra 搭載の grating。RGS は XMM 搭載の grating。

## 5.3 X線データの眺め方

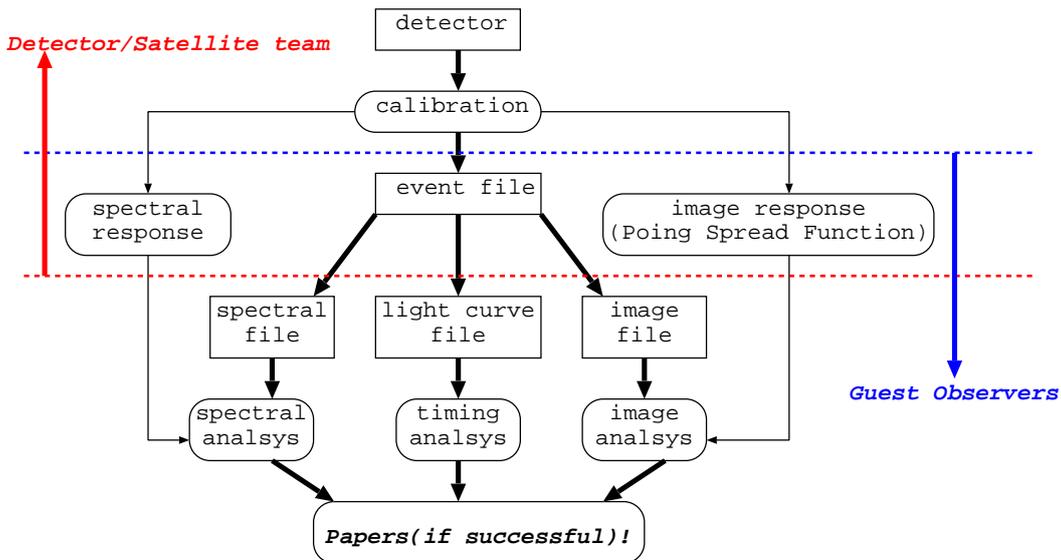
### 5.3.1 X線イベント

X線検出装置は X線光子ひとつひとつを検出し、そのエネルギー、位置、到達時刻を測定する。それに応じて、X線データは FITS フォーマットの「イベントファイル」の形式で保存される<sup>12</sup>。イベントファイルはテーブル形式になっていて、一行がイベントに対応。通常、到達時刻は TIME、天球上の位置は X、Y、エネルギーは PI というコラムに保存される。ここで、X、Y は実際には、天球を検出装置に投影した平面上の座標。“PI” は Pulse-Invariant の略で、エネルギーに比例したパルスハイト。それに対応して、PHA (Pulse-Height Analyzer) は、通常、エネルギースケール補正をしていない生のパルスハイトを指す。

検出装置のキャリブレーションを行い、イベントファイルを作成するのが、衛星/検出器チームの大切な使命である。また、キャリブレーションの結果、検出器のスペクトルレスポンスやイメージレスポンス (Point Spread Function; PSF) も作成する。イベントファイルやレスポンスを衛星のユーザー (Guest Observer) に送るのが、各衛星のデータセンターの重要な役割りである<sup>13</sup>。

<sup>12</sup>Flexible Image Transport System. X線天文衛星で打ち上げ当初から全面的に FITS を採用したのは ASCA が初めて。当時私は、その FITS フォーマットを策定した NASA/GSFC ASCA Guest Observer Facility にいまして、いろいろと勉強になりました。ASCA で決めた FITS フォーマットが、その後の X線天文衛星のファイルフォーマットの雛型になっています。

<sup>13</sup>現在では、ほとんどの場合、各衛星のユーザーは“pipe-line processing”によってキャリブレーション済みのデータを受け取り、キャリブレーションの心配をせずに直ちに解析 (data analysis) を始めることができる。それが、自分でデータを“整約 (data reduction)”しなくてはいけない地上の観測との大きな違い。また、pipe-line processing によってデータの質が均一化されているため、アーカイブを使った研究が非常にやりやすい (アーカイブユーザーも、元の観測者と同じ情報にアクセスできる)。



イベントファイルの X,Y コラムで二次元ヒストグラムを作ったものが天球上の画像、PI コラムでヒストグラムを作ればスペクトルファイル、TIME コラムで作ればライトカーブになる。これらのイメージ、スペクトル、ライトカーブから、それぞれ画像解析、スペクトル解析、時系列解析を行う。必要に応じて、スペクトルレスポンスやイメージレスポンスを使う。

### 5.3.2 画像

PSF が非常に鋭いとき (Chandra 衛星など) は、見たとおりの画像が宇宙の像だと思ってよい。それ以外の場合は、PSF で「なまされた」像を見ていることに注意。各衛星 (望遠鏡) の PSF を知った上で、画像を理解することが望ましい。

また、INTEGRAL, Swift など “coded mask” を使った観測では deconvolution によって計算された “最適解” がイメージなので、計算方法、最適化によってイメージが違いうることに注意。

RXTE や GRO 衛星搭載の OSSE など、non-imaging instrument でスキャンを行っておおまかな “画像” を得ることもできるが、計算方法による不定性が非常に大きいことに留意する必要がある<sup>14</sup>。

画像ファイルには各ピクセルあたりの X 線カウント数が入っているわけだが、それを単位時間あたりの強度に直すには、ピクセルごとの観測時間に直さなくては行けない。各ピクセルに観測時間が入っているイメージを “exposure map” と呼ぶ。元の画像 (cnt) を exposure map(s) で割ってやることによって、観測時間で規格化された天体の強度 (cnt/s) がわかる。また、exposure map にピクセルごとに有効面積を掛けておくこともある ( $s \text{ cm}^2$ )。そうすると、exposure 補正した画像は、 $\text{cnts/s/cm}^2$  という単位を持つことになる。特に複数の画像のモザイクを行うときは、このように各画像の観測時間と有効面積を規格化しておくことが必要である。

X 線観測では、可視光や近赤外線とは異なり、各光子のエネルギーを直接測ることができる。イベントファイルからエネルギーバンドごとにイメージを作り、エネルギーによる画

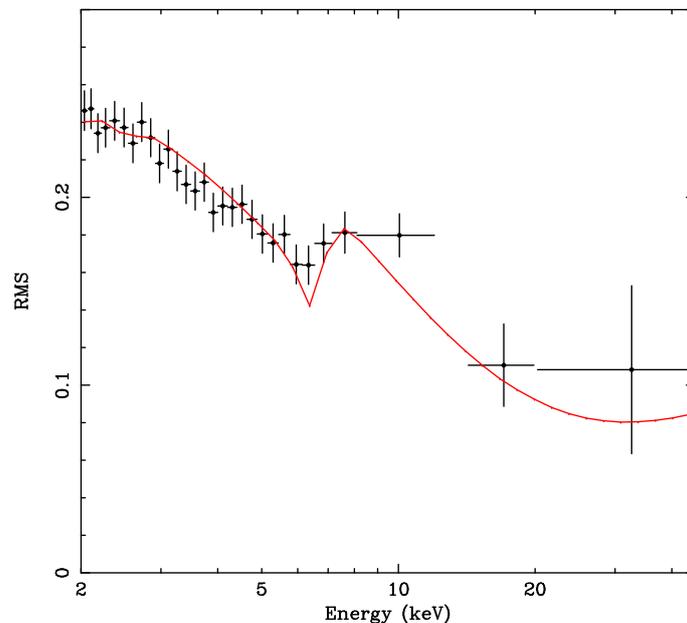
<sup>14</sup>OSSE 衛星が銀河中心の北側に 511 keV 輝線の “annihilation fountain” が存在するとして、その画像を記者発表したことがある (ここでは論文は敢えて出しませんが、後に INTEGRAL/SPI による高精度の観測で否定された。

像の違いを調べることは標準的な手法である。特に、soft, medium, har の3バンドのイメージを作り、それに Red, Green, Blue の色を割りあてることにより、擬似的なカラーイメージを作成することができる<sup>15</sup>。

### 5.3.3 ライトカーブ、時間変動の解析

大きさ  $R$  の天体の時間変動のタイムスケールは  $R/c$  であるが、X線観測ではコンパクト星を対象とすることが多いので、(5.1.3) で示したように短時間の変動が観測される。時間変動解析は、コンパクト星の研究のために非常に有効な手段である。ライトカーブの単位は通常 count/s. counts per sec だから cps と表示することが多い<sup>16</sup>。

エネルギーごとの変動を定量的に調べるために、各バンドでの変動率 (root mean square; RMS) を求め、それをエネルギーの関数として表わしたものが良く使われる (RMS spectrum とか fractional variance と呼ばれる)。



「すざく」が観測した MCG-6-3-15 の RMS spectrum の例。Miniutti et al. 2006 PASJ 特集号より。

また、短時間の変動の解析のために時系列データをフーリエ変換し、パワースペクトルを求めたり、予想されるパルス周期 (のあたり) でデータを折りたたむ (folding) のも、X線によく用いる手法である。

### 5.3.4 エネルギースペクトル

天体からのエネルギースペクトルは、"photon/s/cm<sup>2</sup>/keV" として検出装置に入力するわけだが、観測されるのは "counts/s/channel" である。十分な検出器キャリブレーションの後、単色の X線が入射したときのパルスハイト分布を計算することができる。これを細かい各

<sup>15</sup> ds9 の "rgb" というコマンドラインオプションが使える。IDL の "tv" コマンドにもこの機能がある。

<sup>16</sup> 観測プロポーザルを書くとき、提案する天体の X線強度を cps で書くことが要求される。もちろんこれは観測装置によって違うわけで、観測装置のレスポンスを取りこんで cps を計算する便利なツールが存在する。たとえば、<http://heasarc.gsfc.nasa.gov/Tools/w3pimms.html>

入力エネルギーに対して計算し、ファイルに保管しておくことができる。それは入力エネルギーと出力パルスハイトの二次元行列になり、検出器のレスポンスマトリックスと呼ばれる。

レスポンスマトリックスを使って、(自由パラメーターを持つ) 入力光子スペクトルから出力パルスハイトスペクトルモデルを計算、それと観測されたパルスハイトスペクトルを比較し、最も良くあうパラメーターを求める、というのが標準的な X 線スペクトル解析の手法である。

エネルギースペクトルの表示するときの単位として、counts/s/channel、photon/s/cm<sup>2</sup>/keV の他に、それにエネルギーを一回または二回かけて、erg/s/cm<sup>2</sup>/keV や、erg<sup>2</sup>/s/cm<sup>2</sup>/keV が使われることもあるので注意すること。

## Chapter 6

# X線放射のメカニズム

### 6.1 光学的厚み (optical depth)

光学的厚み  $\tau$  の物質を放射が通過すると、強度が  $e^{-\tau}$  になる。考えている物質の厚さを  $L$  [cm]、水素柱密度を  $N_H$  [ $\text{cm}^{-2}$ ]、密度を  $\rho$  [ $\text{g}/\text{cm}^3$ ] とすると、

$$\tau = \alpha[\text{cm}^{-1}] L[\text{cm}] = \kappa[\text{cm}^2/\text{g}] \rho[\text{g}/\text{cm}^3] L[\text{cm}] = N_H[\text{cm}^{-2}] \sigma_H[\text{cm}^2]. \quad (6.1)$$

$\alpha$  は吸収係数 (absorption coefficient)、 $\kappa$  は質量吸収係数 (mass absorption coefficient; opacity)、 $\sigma_H$  は水素原子あたりの吸収断面積 (cross section)。一般に、これらのパラメータは波長と場所の関数である。

放射強度でなく、「光子」ひとつひとつに注目すると、物質中で光子が吸収されずに  $\tau$  だけ進む確率は  $e^{-\tau}$ 、光子が進む光学的距離の平均が  $\tau = 1$ 。実際、

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau = 1,$$
$$\langle \tau \rangle \equiv \int_0^{\infty} \tau e^{-\tau} d\tau = 1.$$

$\tau > 1$  のとき、物質は光学的に厚い (不透明; 大部分の光子は吸収されてしまう)、 $\tau < 1$  のとき、物質は光学的に薄い (透明; 大部分の光子は透過する)。光子が光学的に薄い物質に吸収される確率は、 $1 - e^{-\tau} \approx \tau$ 。

光子が実際に進む距離の平均を  $l$  とすると、 $\tau = \alpha l = 1$  より、

$$l = \frac{1}{\alpha}. \quad (6.2)$$

これが平均自由行程 (mean free path)。式 (6.1) と (6.2) より、

$$\tau = \frac{L}{l}. \quad (6.3)$$

### 6.2 放射輸送 (radiative transfer)

$j_\nu$  を放射率 [ $\text{erg}/\text{s}/\text{cm}^3/\text{Hz}/\text{str}$ ]、 $\alpha_\nu$  [ $\text{cm}^{-1}$ ] を吸収係数として、源泉関数 (source function)  $S_\nu$  [ $\text{erg}/\text{s}/\text{cm}^2/\text{Hz}/\text{str}$ ] は、以下のように定義される。

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}. \quad (6.4)$$

輻射輸送 (radiative transfer) の式,

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu. \quad (6.5)$$

一般に、 $I_\nu$  (specific intensity; brightness),  $S_\nu$  (source function) は、振動数、場所、 $\tau_\nu$  (光学的厚み [optical depth])、その他の諸々の物理量の関数。様々な状況において「輻射輸送」の問題を解いて  $I_\nu$  を求め、観測と比較するのが、天文学の伝統的な手法。散乱 (scattering) があるとき、 $S$  は  $I$  に依存し、さらに問題が複雑になる。

輻射輸送の式と、 $I_\nu$  と  $S_\nu$  の単位 (次元)、 $\text{erg/s/cm}^2/\text{Hz/str}$  は覚えておこう。

熱平衡の場合、Source function は温度だけで一意的に決まり、プランク関数  $B_\nu(T)$  で与えられる:

$$B_\nu(T) = \frac{2}{c^2} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad [\text{ergs/s/cm}^2/\text{Hz/str}] \quad (6.6)$$

この標識も覚えておくと何かと便利。次元を合わせ、偏光によって factor 2 が出てくることから思いだせるはず。

式 (6.5) を以下のように直観的に解釈できる:

“ $I > S$  のとき  $dI/d\tau < 0$  で、 $I$  は減少、 $I < S$  のとき  $dI/d\tau > 0$  で、 $I$  は増加、すなわち、 $I$  は  $\tau$  に沿って  $S$  に近づこうとする。よって、 $\tau$  が十分大きい (光学的に厚い) とき、 $I$  は  $S$  に一致する。”

$S_\nu = B_\nu$  を熱的輻射 (thermal emission)、 $I_\nu = B_\nu$  を黒体輻射 (blackbody emission) という。**すべての熱的輻射は、光学的に厚い極限では黒体輻射になる。**

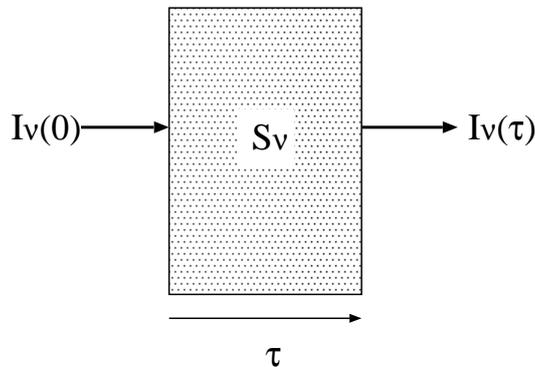
熱的な放射のときはいつでも  $S_\nu = B_\nu(T)$  だから、

$$\alpha_\nu = \frac{j_\nu}{B_\nu(T)}. \quad (6.7)$$

これが熱的な吸収と放射を関係づけるキルヒホッフの法則である。

$S_\nu$  が一定 ( $\tau$  に依らない) のとき、(6.5) を解くことができる。

$$I_\nu(\tau) = S_\nu(1 - e^{-\tau}) + I_\nu(0)e^{-\tau} \quad (6.8)$$



光学的厚み  $\tau$  の物質 (プラズマ) に向こう側から  $I_\nu(0)$  という輻射が入ってきて、我々に向かって  $I_\nu(\tau)$  が出てくる、というイメージ。式 (6.8) より、 $\tau \gg 1$  (光学的に厚い) のときは、すでに見たとおり、

$$I_\nu(\tau) = S_\nu. \quad (6.9)$$

特に、物質(プラズマ)が温度  $T$  の熱輻射をしているときは、 $I_\nu(\tau) = B_\nu(T)$ 。つまり、プラズマの組成が何であろうと、それに入射する輻射があってもなくても、そこから出る輻射は黒体輻射になる。

$\tau \ll 1$ (光学的に薄い)のとき、式(6.8)は、

$$I_\nu(\tau) = S_\nu\tau + I_\nu(0)(1 - \tau). \quad (6.10)$$

入射する輻射がないときは、第二項はゼロ。第一項より、光学的厚みに比例した、「光学的に薄い」輻射が観測される。

特に、ある線スペクトルのところだけで  $\tau$  が大きい場合は、第二項より「吸収線」が観測される。第一項は輝線を与えるので、輝線が観測されるか吸収線が観測されるかは状況に依る。

式(6.9)、(6.10)より、熱的な放射、 $S_\nu = B_\nu(T)$  を考える限りは、常に  $I_\nu(\tau) \leq B_\nu$ 。つまり、**熱的な放射の強度は、黒体輻射の強度を越えない。**

### 6.3 黒体輻射 (blackbody radiation)

黒体輻射は物質と輻射場が完全に熱平衡にあるときの放射を記述し、 $[\text{erg/s/cm}^2/\text{Hz/str}]$  という単位を持つ (str は立体角)。どんな状況においても熱平衡にあるかぎり黒体輻射は成立するので、二つの準位を持つ原子と輻射場を考える。

上の準位にある原子が単位時間あたり  $A_{21}[\text{s}^{-1}]$  の割合で下の準位に遷移し、光子を放射する。一方、輻射場の強度を  $J_\nu$  として、光子は単位時間あたり、 $B_{12}J_\nu$  の割合で、吸収される。また、輻射場の強度に刺激されて起きる放射の割合が、 $B_{21}J_\nu$  である。下の準位にある原子の密度を  $n_1$ 、上の密度にある原子の密度を  $n_2$  とし、系が平衡状態にあることから、

$$n_1 B_{12} J_\nu = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} J_\nu \quad (6.11)$$

である。これを  $J_\nu$  について解けば、

$$J_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}. \quad (6.12)$$

ここで、熱平衡の式より、

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp(h\nu/kT). \quad (6.13)$$

よって(6.12)は、

$$J_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{\exp(h\nu/kT)(B_{12}/B_{21}) - 1}. \quad (6.14)$$

ここで、一般に Einstein の関係式、

$$\begin{aligned} B_{12} &= B_{21}, \\ A_{21} &= \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \end{aligned} \quad (6.15)$$

が成立することがわかっている。前者は、詳細つりあい (detailed balance) を示し、後者では、 $2h\nu^3/c^2$  が、 $[\text{erg/cm}^2/\text{s/Hz}]$  という単位を持つフラックスである。係数2は、変更の自由度2を表わしている。式(6.15)を用いて、(6.14)は、

$$J_\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1} [\text{erg/s/cm}^2/\text{Hz/str}]. \quad (6.16)$$

これが黒体輻射の式で、通常  $B_\nu(T)$  で表す。

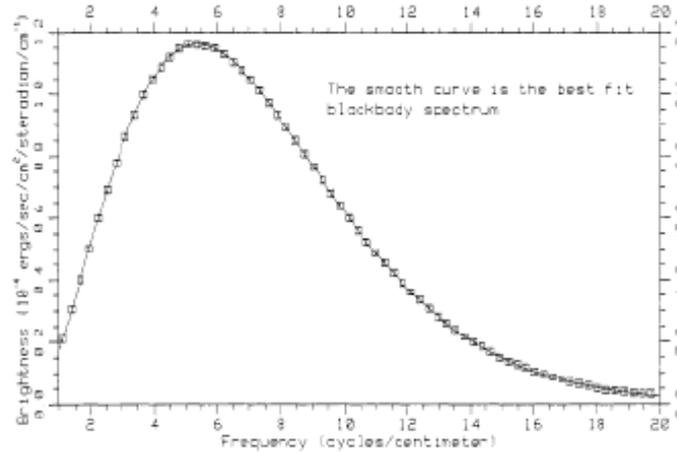


Figure 6.1: COBE 衛星が測定した CMBR のスペクトル。四角が測定点、実線は 2.735 K の黒体輻射。Mather et al. 1990, *Astrophysical Journal*, 354, L37 より。後に検出装置の較正が進み、最終的に COBE チームが 1999 年に発表した CMBR の温度は  $2.725 \pm 0.002$  K である。横軸の単位が波数 (=波長の逆数=振動数/光速) であること、横軸、縦軸ともに線型表示であることに注意。

### 6.3.1 黒体輻射の例

黒体輻射は宇宙のいたるところで観測されるが、最も普遍的なのが**宇宙背景輻射 (Cosmic Microwave Background Radiation; CMBR)**である。これは、ビッグバンから数十万年後、宇宙が約 3000 K の黒体輻射に満ちていたときの光が、宇宙が 1000 倍膨張した結果、温度 (エネルギー) が  $1/1000$  に下がった (赤方偏移) ものである。NASA の COBE 衛星はその温度を正確に  $2.725 \pm 0.002$  K と測定した (図 6.1)。COBE 衛星の業績により、Mather と Smoot の 2 人は 2006 年のノーベル物理学賞を受賞している<sup>1</sup>。さらに、CMBR の微少な空間的ゆらぎを測定することにより、宇宙膨張のパラメーターに制限が付き、宇宙の年齢を知ることができる。WMAP 衛星の測定によって、それは 137 億年と求められている。

また、孤立した中性星表面からの輻射も黒体輻射で良く説明できる (図 6.2)。

### 6.3.2 観測との比較

黒体輻射は式 (6.6) で与えられるが、スペクトルフィッティングなどで X 線観測データ (単位時間、各チャンネルあたりのイベント数) と比較する場合には、黒体輻射の光子数 (photon flux) を用いる必要がある。観測と比べるべき量は (6.6) を  $E = h\nu$  で割って、以下のとおり。

$$\begin{aligned} \frac{B_E(T)}{E} &= \frac{2}{h^2 c^2} \frac{E^2}{e^{E/kT} - 1} \quad [\text{photons/s/cm}^2/\text{Hz/str}] \\ &= \frac{2}{h^3 c^2} \frac{E^2}{e^{E/kT} - 1} \quad [\text{photons/s/cm}^2/\text{keV/str}]. \end{aligned}$$

X 線の光子フラックスは通常  $[\text{photons/s/keV/cm}^2]$  で測るので、 $\text{Hz}^{-1}$  から  $\text{keV}^{-1}$  への変換で、分母に  $h$  が掛かることを忘れないように。

<sup>1</sup>[http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/2006/phyadv06.pdf](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2006/phyadv06.pdf).

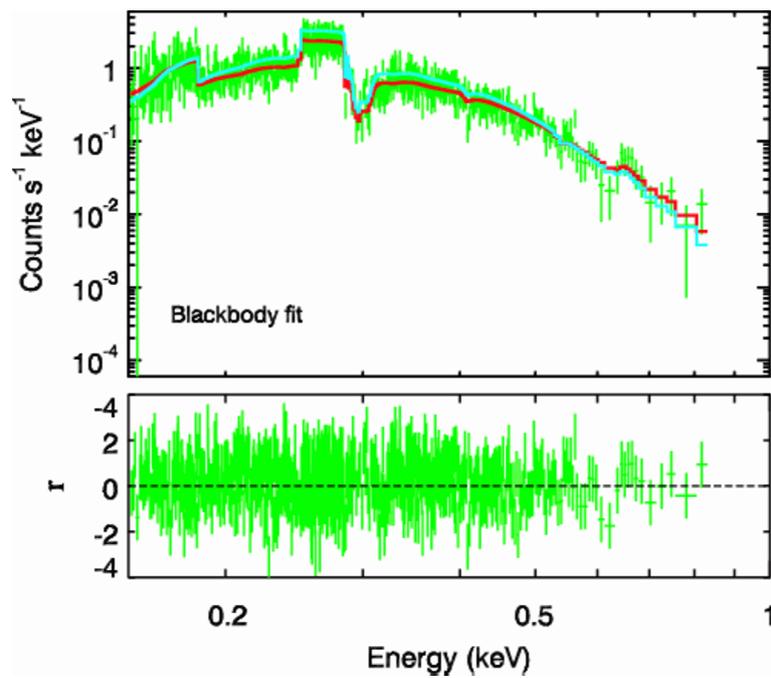


Figure 6.2: Chandra 衛星が観測した中性子星 RXJ1856.5-3754 のエネルギースペクトルを黒体輻射モデルでフィットした例 (Burwitz et al. 2001, A&A, 379, L35)。距離 60pc を仮定し、 $T=40.3$  eV、半径 12 km の黒体放射でよく表される。上段のカウントスペクトルでガタガタしているのは、検出器のフィーチャー。下段はモデルフィットとの残差。

黒体輻射をしている天体までの距離を  $d$ 、視線方向に投影した輻射面積を  $\pi R^2$  とすると、立体角は  $\pi R^2/d^2$  で与えられるので、

$$\frac{B_E(T)}{E} \left( \frac{\pi R}{d} \right)^2 = 3.15 \times 10^{31} \left( \frac{\pi R}{d} \right)^2 \frac{E[\text{keV}]^2}{e^{E/kT} - 1} \text{ [photons/s/cm}^2/\text{keV]}. \quad (6.17)$$

黒体輻射している天体を X 線で観測したとき、スペクトルフィットから温度  $T$  が求められる。これを式 (6.17) に代入するとフラックスが  $R/d$  の関数として得られる。つまり、観測したフラックスと (6.17) を比較することにより  $R/d$  が求められる。

$R$  に制限がついているとき (中性子星の半径など)、 $d$  に制限がつく。実際、銀河中心付近にある中性子星の X 線バーストの観測から、銀河中心までの距離に制限がついた (e.g., Ebisuzaki, Sugimoto and Hanawa 1984, PASJ, 36, 551)。

一方、 $d$  がわかっているときは、 $R$  を測定することができる。たとえば、こうやってブラックホール周辺の光学的に厚い降着円盤の内縁の半径を推定できる。さらに、それをシュバルツシルト半径の 3 倍と仮定して、ブラックホールの質量に制限がつく。

### 6.3.3 黒体輻射の特徴

#### ピークを与える周波数と波長

式 (6.6) に対応して、黒体輻射の単位”波長”あたりの強度を与える関数  $B_\lambda(T)$  を考えると、

$$B_\nu(T) d\nu = -B_\lambda(T) d\lambda,$$

$c = \lambda\nu$ 、 $d\nu/\nu = -d\lambda/\lambda$  より、

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \text{ [erg/s/cm}^2/\text{\AA/str]}. \quad (6.18)$$

(6.6) を  $\nu$  で微分してゼロになるところが、単位周波数あたりの放射のピークを与える周波数  $\nu_{max}$  は、

$$h\nu_{max} = 2.82 kT. \quad (6.19)$$

黒体輻射のエネルギースペクトルのピークが温度の約 3 倍にくることを覚えておくと便利。一方、(6.18) を  $\lambda$  で微分してゼロになるところが、単位波長あたりの放射のピークを与える波長  $\lambda_{max}$  は、

$$\lambda_{max} = 0.201 \frac{hc}{kT}. \quad (6.20)$$

$\lambda_{max} \nu_{max} = 0.57c \neq c$ 、つまり、**単位振動数 (エネルギー) あたりの黒体輻射のピークを与える振動数 (エネルギー) と単位波長あたりのピークを与える波長は違う**ことに注意。

#### 低周波数側と高周波数側での近似式

$h\nu \ll kT$  のとき、(6.6) から、

$$B_\nu(T) \approx \frac{2\nu^2 kT}{c^2}. \quad (6.21)$$

これが古典的な Rayleigh-Jeans の法則。 $h$  が現われないこと、 $T$  に比例することに注意<sup>2</sup>。

<sup>2</sup>エネルギー密度は  $4\pi/c$  を掛けて、 $(8\pi\nu^2/c^3)kT$ 。古典的な電磁的固有振動の密度が  $8\pi\nu^2/c^3$  であることを思いだして、一固有振動あたり  $kT$  のエネルギーが付随していると解釈できる。

$h\nu \gg kT$  のときは、

$$B_\nu(T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-kT/h\nu}. \quad (6.22)$$

これが Wien の法則。

電波天文では Rayleigh-Jeans 側を扱うことが多いが、X 線観測では、黒体輻射のピークのあたりから Wien 側からを見ることが多い。典型的な観測範囲は 2–10 keV、X 線バーストは  $\sim 2$  keV、降着円盤の内縁は  $\sim 1$  keV 等。X 線観測 (2–10 keV) が Rayleigh-Jeans 側に対応するほど高温の黒体輻射をしている天体は宇宙に (ほとんど) 存在しない。

### 6.3.4 黒体輻射のエネルギー密度、フラックス

$$\begin{aligned} u &= \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu \\ &= \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

積分の値は  $\frac{\pi^4}{15}$  (Mathematica を使おう!) だから、

$$\begin{aligned} u &= a T^4 \\ a &\equiv \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} = 7.56 \times 10^{-15} \text{ [erg cm}^{-3} \text{ deg}^{-4}]^3. \\ &= 1.37 \times 10^{14} \text{ [erg cm}^{-3} \text{ keV}^{-4}]. \end{aligned}$$

黒体輻射している表面からのフラックスを  $F$  とすると、

$$\begin{aligned} F &\equiv \int I \cos \theta d\Omega \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu \right\} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \pi \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{c}{4} u = \frac{ac}{4} T^4 \equiv \sigma T^4, \quad (6.23) \\ \sigma &= \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ [erg cm}^{-2} \text{ deg}^{-4} \text{ s}^{-1}] \\ &= 1.03 \times 10^{24} \text{ [erg cm}^{-2} \text{ keV}^{-4} \text{ s}^{-1}]. \end{aligned}$$

これがステファン-ボルツマン定数。

<sup>3</sup> 宇宙背景黒体輻射の温度は 2.725 K だから、エネルギー密度は  $4.17 \times 10^{13} \text{ erg/cm}^3 \approx 0.26 \text{ eV/cm}^3$ 。

### 6.3.5 黒体輻射の光子密度

黒体輻射の光子密度を  $n$  とすると、

$$\begin{aligned} n &= \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B_\nu(T)/h\nu \, d\nu \\ &= \frac{8\pi k^3 T^3}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx. \end{aligned}$$

$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2.404$  だから、

$$n = 60.4 \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 = C T^3,$$

$$\begin{aligned} C &= 20.3 \text{ [photons cm}^{-3} \text{ deg}^{-3}]^4 \\ &= 3.17 \times 10^{22} \text{ [photons cm}^{-3} \text{ keV}^{-3}]. \end{aligned}$$

また、(6.20) を用いて、

$$1/n \approx 2\lambda_{max}^3.$$

$1/n$  は、光子一つあたりが占める体積だから、典型的な波長  $\lambda_{max}$  を持つ光子が、空間に詰まっている様子を思い浮かべればよい。

### 6.3.6 3つの温度

黒体輻射の「温度」はユニークであるが、黒体輻射と「似た」輻射については黒体輻射の性質に基づいた3つの温度を定義することができる。黒体輻射のときは、これら3つの温度が一致するが、黒体輻射からの「ずれ」が大きくなるにつれて、これら3つの温度の違いが顕著になる。

#### 有効温度 (effective temperature)

天体の表面から発つする、全エネルギーで積分したフラックスを  $F$  として、有効温度  $T_{eff}$  を

$$\sigma T_{eff}^4 \equiv F$$

で定義する。球対象を仮定し、天体の半径を  $R$  とすると、光度は  $L = 4\pi R^2 F$ 。一方、天体までの距離を  $d$ 、観測されたフラックスを  $f$  とすると、 $f = L/4\pi d^2$ 。よって、

$$\sigma T_{eff}^4 = F = \left( \frac{d}{R} \right)^2 f$$

となり、 $d/R$  がわかっているならば、観測されたフラックスから有効温度が一意的に決まる。しかし、通常  $d/R$  はわからず、有効温度は決まらない。一方、天体の  $T_{eff}$  を理論モデルから計算することができるので (例えば、降着円盤からの輻射)、観測されたフラックス  $f$  から、 $d/R$  を推定することができる。ただし有効温度と色温度の違いに注意 (以下参照)。

<sup>4</sup>宇宙背景黒体輻射の温度は 2.725 K だから、光子密度は  $\sim 410$  photons/cm<sup>3</sup>。

**色温度 (color temperature)**

観測されたエネルギースペクトルの「形」を黒体輻射の「形」に合わせ、いちばん良く合う温度を色温度 ( $T_{col}$ ) と言う。色温度は、観測データだけから決まる (天体までの距離や天体の輻射面積によらない) ことに注意。

標準的な解析手法である X 線のスペクトルフィットで求められる温度は色温度である。これが一般には有効温度とは異なることに注意。

**輝度温度 (brightness temperature)**

ある狭い周波数 (エネルギー) 範囲で、specific intensity  $I_\nu$  を測定したとき、

$$I_\nu = B_\nu(T_b)$$

を与えるのが輝度温度、 $T_b$ 。「もし天体が黒体輻射をしているとした時、観測された輝度を実現するための温度。」Rayleigh-Jeans 近似が成立し、黒体輻射が単純に温度に比例する電波天文では良く使うが、X 線天文ではほとんど使わない。

温度  $T$  の天体が熱的な輻射をしているとき (熱制動放射等)、それは黒体輻射よりも効率が悪いので (section 6.5)、 $T > T_b$  である。一方、天体が効率の良い比熱的な輻射をしているとき (シンクロトロン放射)  $T \ll T_b$  になりうる。

**6.3.7 色温度と有効温度の違いによる補正**

中性子星表面や降着円盤内部など、X 線領域では温度が高いので ( $\gtrsim 1$  keV)、高エネルギーの電子が光子にエネルギーを与える逆コンプトン散乱 (inverse Compton scattering) の効果が顕著である<sup>5</sup>。大気の深いところでは黒体輻射をしているが、それが高温の大気外層で逆コンプトン散乱を受けて、スペクトルが歪む (distorted)。黒体輻射の低エネルギー側が下り、それが元の黒体輻射のピークよりも高エネルギー側に現われる (コンプトン散乱は光子数を保存することに注意)。よって、逆コンプトン散乱が存在するとき色温度 ( $T_{col}$ ) は有効温度 ( $T_{eff}$ ) よりも高くなる。

色温度と有効温度の比、 $T_{col}/T_{eff}$  を hardening factor と呼ぶことがある。中性子星表面や、降着円盤の内縁付近では、その値は (光度や円盤の半径によらずに) 1.4 から 1.9 である。

厳密には逆コンプトン効果を受けて出てくるスペクトルを求めるには数値計算が必要であるが、都合の良いことに、X 線の観測領域では ( $\approx 2$ –10 keV)、逆コンプトン散乱を受けたスペクトルは、形は  $T_{col}$  で決まるが有効温度は  $T_{eff}$  である”diluted blackbody”、

$$I_\nu = \left( \frac{T_{eff}}{T_{col}} \right)^4 B_\nu(T_{col}) \quad (6.24)$$

で良く近似でき、hardening factor はコンスタントと置いてよい。これを式 (6.23) と同様に全周波数で積分してやると、フラックスが  $F = \sigma T_{eff}^4$  となる (有効温度の定義) ことがポイント。

ブラックホールのまわりの光学的に厚い (=黒体輻射に近い) 降着円盤について、hardening factor、 $T_{col}/T_{eff}$  の影響を見てみる。ここでブラックホールまでの距離はわかっている場合を考える。すると、観測されたフラックス  $f$  と距離から、ディスクの光度  $L_{disk}$  を求めることが出来る。さらに、式 (3.19)、

$$L_{disk} = 4\pi\sigma r_{in}^2 T_{in}^4. \quad (6.25)$$

<sup>5</sup>X 線天文ではあたりまえのように「逆」コンプトン散乱が出てくるので、「逆」を言わないこともある。

を用いて、内縁の温度  $T_{in}$  がわかれば、内縁半径  $r_{in}$  がわかり、これをブラックホール周辺の最小円半径 (ISCO) と同一視することによって、ブラックホールの質量を見積もることができる (たとえば回転していないブラックホールの場合は、 $r_{in} = 6GM/c^2$ ; 3.6 節参照)。

ここで定義より、 $T_{in}$  は、有効温度、 $T_{in}^{(eff)}$  に対応していると考えべきである。しかし、スペクトル観測から  $T_{in}^{(eff)}$  は測定できない。測定されるのは、スペクトルの「形」をモデルフィットして求められる、円盤内縁の色温度、 $T_{in}^{(col)}$  である。よって、

$$L_{disk} = 4\pi\sigma r_{in}^2 (T_{in}^{(eff)})^4 = 4\pi\sigma r_{in}^2 \left( \frac{T_{in}^{(eff)}}{T_{in}^{(col)}} \right)^4 (T_{in}^{(col)})^4 = 4\pi\sigma (r_{in}^*)^2 (T_{in}^{(col)})^4 \quad (6.26)$$

と書くと、

$$r_{in} = r_{in}^* \left( \frac{T_{in}^{(col)}}{T_{in}^{(eff)}} \right)^2 \geq r_{in}^* \quad (6.27)$$

である。つまり、真の内縁半径  $r_{in}$  は、内縁の色温度  $T_{in}^{(col)}$  を用いて見積もった見かけの内縁半径  $r_{in}^*$  よりも、 $\left( T_{in}^{(col)}/T_{in}^{(eff)} \right)^2$  倍大きい。同様に、真のブラックホールの質量  $M$  は、内縁の色温度  $T_{in}^{(col)}$  を用いて見積もった見かけの質量よりも、 $\left( T_{in}^{(col)}/T_{in}^{(eff)} \right)^2$  倍大きい。

$T_{col}/T_{eff}$  の値は降着円盤の内の輻射輸送を理論的に解くことによって計算でき、その値は恒星質量ブラックホールの場合、半径や光度に依らず、 $\approx 1.7$  である (Shimura and Takahara 1995, ApJ, 445, 780)。降着円盤が黒体輻射 ( $T_{col} = T_{eff}$ ) だと思ってしまうと、ファクター  $(T_{col}/T_{eff})^2 \approx 3$  だけブラックホールの質量を小さく見積もってしまうことになるので注意が必要である<sup>6</sup>。

## 6.4 電子分布とエネルギースペクトル

黒体輻射の場合を除けば、ある電子分布 (熱的プラズマの場合は Maxwellian) から放出される光子のエネルギースペクトルは、電子一個の電磁相互作用によって放出、あるいは散乱される一個の光子を考え、それを電子の分布で積分することによって得られる。

一般に、エネルギー  $E$  を持つ電子の位相空間での分布確率を  $n(E)$ 、エネルギー  $E$  の電子一個から周波数  $\nu$  の光子が放出される割合を  $\mathcal{F}(\nu, E)$  とすると、エネルギースペクトルは電子分布を位相空間で積分して、

$$F(\nu) = \int d^3p n(E) \mathcal{F}(\nu, E). \quad (6.28)$$

<sup>6</sup>歴史的には、「てんま」チームが銀河系内のブラックホールや中性子星からの X 線スペクトルが光学的に厚い降着円盤で表わされることを初めて示した (Mitsuda et al. 1984, PASJ, 36, 741; Makishima et al. 1986, ApJ, 308, 635) が、まさに、「黒体輻射」をしている降着円盤では中心天体の質量が小さくなりすぎる (あるいは円盤温度が高くなりすぎる)、という批判がなされた (White, Stella and Parmar 1988, ApJ, 324, 363)。その後「ぎんが」衛星が、光度が大きく変化しても降着円盤の内縁半径が一定である例を数多く発見し、内縁の半径が  $\sim 3R_S$  に対応している (質量だけで決まっている) ことを示唆した (Ebisawa et al. 1993, ApJ, 403, 684; 1994, PASJ, 46, 375)。また、半径や光度によらず  $T_{col}/T_{eff} \approx 1.7$  でほぼ一定であるという精密な計算結果 (Shimura and Takahara 1995, ApJ, 445, 780) から、その理論的な裏づけが得られた。現在では、銀河系内ブラックホールのまわりに光学的に厚い降着円盤の存在は確立しており、降着円盤の理論と X 線観測がよく一致している (e.g., David et al. 2005, ApJ, 621, 372)。また、近年、観測と理論の精度が上がったため、正確に降着円盤内縁の半径を測定し、それを ISCO と同定し、ブラックホールのスピンの制限をつけることも試みられている (e.g., Gierliński, Maciołek-Niedźwiecki and Ebisawa 2001, MNRAS, 325, 1253; Li-Xin et al. 2005, ApJS, 157, L335; Davis et al. 2006, ApJ, 647, 525; )。

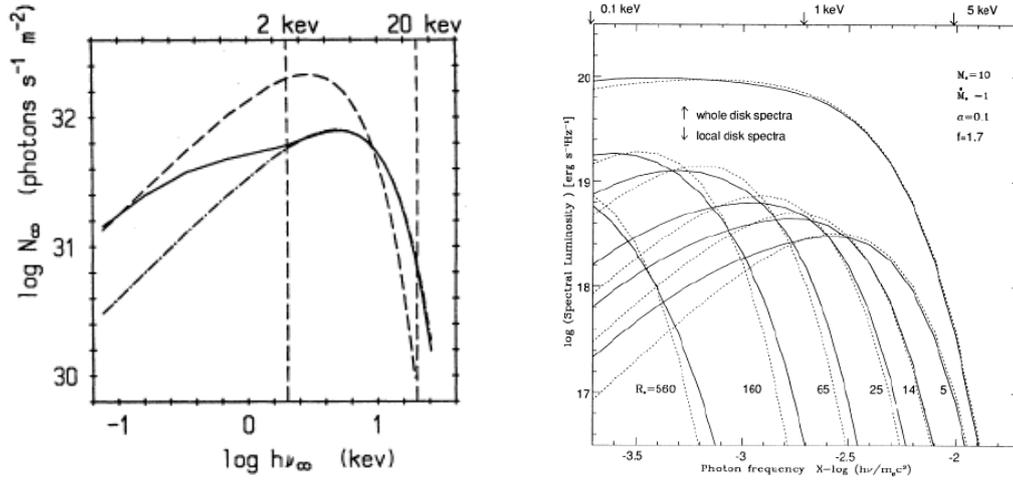


Figure 6.3: 左側 (Ebisuzaki 1987, PASJ, 39, 287 より):逆コンプトン効果を考慮した数値計算で求めた中性子星大気からのスペクトル (実線)。これは 2–20 keV の範囲で、“diluted blackbody”、 $(T_{eff}/T_{col})^4 B_\nu(T_{col})$  で良く近似できる (一点鎖線)。その有効温度  $T_{eff}$  を持つ黒体放射が破線。右側 (Shimura and Takahara 1995, ApJ, 445, 780 より):降着円盤からのエネルギースペクトルの計算例。実線が逆コンプトン効果を入れた数値計算。各半径に対応するリングからのスペクトルとその和としてのディスクスペクトルを示してある。各リングからのスペクトルに対し、 $f \equiv T_{col}/T_{eff} = 1.7$  のときの“diluted blackbody” と、その総和としてのディスクスペクトルが点線で示されている。

あるいは、エネルギー空間での電子分布を  $N(E)dE$  として、

$$F(\nu) = \int dE N(E) \mathcal{F}(\nu, E). \quad (6.29)$$

電子が熱的な場合は、 $n(E) \approx \exp(-E/kT)$ 。エネルギー  $E$  の電子が作る光子の最大周波数は  $h\nu = E$  で与えられ、一般に  $\mathcal{F}(\nu, E)$  は、 $\nu$  に対してゆっくりと変化する関数。よって、非常に大きっぱな近似として、

$$\mathcal{F}(\nu, E) \sim \begin{cases} \mathcal{F}_0 & \text{for } h\nu \leq E, \\ 0 & \text{for } h\nu > E, \end{cases} \quad (6.30)$$

と考えても良い。すると、(6.29) は、

$$\begin{aligned} F(\nu) &\sim \mathcal{F}_0 \int_{E=h\nu}^{\infty} d^3p \exp(-E/kT) \\ &\sim \mathcal{F}_0 \int_{E=h\nu}^{\infty} \sqrt{E} \exp(-E/kT) dE \\ &\sim \mathcal{F}_0 \exp(-h\nu/kT), \end{aligned} \quad (6.31)$$

となる。ここで、 $\exp$  に比べてゆっくり変化する  $\sqrt{E}$  の項は一定と大胆に近似した。つまり、温度で決まる ( $\sim kT$ ) カットオフエネルギーまではほぼ一定で、それより高エネルギー側で exponential で急激に落ちる特徴的なエネルギースペクトルが観測されることがわかる。

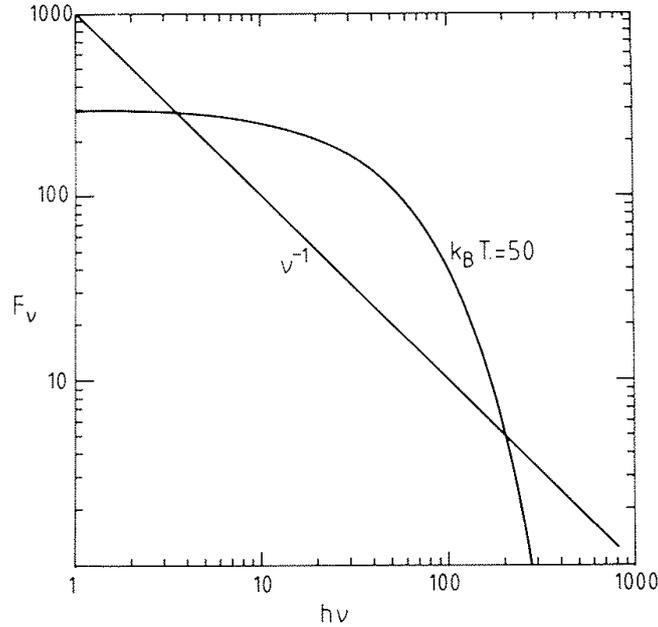


Figure 2.1. Spectral shapes.

Figure 6.4: (黒体輻射以外に)X線天体から典型的に観測される熱的なスペクトルと power-law 的スペクトル。Katz の”High Energy Astrophysics”より。

次に電子が非熱的な分布をしていて、最高エネルギーが静止エネルギーよりもはるかに高い場合<sup>7</sup>を考える。電子一個のエネルギーは、 $E = mc^2\gamma$ であるが、非常に良く出てくるのは電子のエネルギー分布がべき関数、

$$N(E)dE \propto \gamma^{-p} d\gamma \quad (6.32)$$

で表わされる場合である。様々な物理機構、天体において、このような電子のエネルギー分布が実現していると考えられている。また、エネルギー  $E = mc^2\gamma$  を持つ一つの電子を考えたとき、

1. 放出される光子の典型的なエネルギー ( $\equiv h\nu_c$ ) が  $\gamma^2$  に比例し、
2. 振動数  $\nu$  を持つ光子が放出される割合は  $F(\nu, E) = S(\nu/\nu_c)$  という関数形で表わされる

場合を考える。相対論的な電子によるシンクロトロン放射、逆コンプトン放射では、これらの条件を満たすことがわかっている (ここがポイント!)

<sup>7</sup> $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-(v/c)^2} \gg 1$ ; こういう場合を “相対論的” (relativistic) という。

すると、(6.29) は、

$$F(\nu) = \int S(\nu/\nu_c) \gamma^{-p} d\gamma$$

と書ける。ここで、 $\nu_c \propto \gamma^2$  を使って、積分変数を  $\gamma$  から  $\nu_c$  に変換する (ここがもう一つのポイント! )。

$$\frac{d\gamma}{\gamma} \propto \frac{d\nu_c}{\nu_c} \propto \nu_c d\left(\frac{1}{\nu_c}\right)$$

だから、 $\nu$  は  $\gamma$  と  $\nu_c$  に依存しない変数であることに注意して、

$$\frac{d\gamma}{\gamma} \propto \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-1} d\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)$$

が成り立つ。これを使って、

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int S(\nu/\nu_c) \gamma^{-p+1} \frac{d\gamma}{\gamma} \\ &= \int S(\nu/\nu_c) \nu_c^{-p/2+1/2} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-1} d\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \\ &= \int S(\nu/\nu_c) \left(\frac{\nu_c}{\nu}\right)^{-p/2+1/2} \nu^{-p/2+1/2} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-1} d\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \\ &= \nu^{-\frac{p-1}{2}} \int S(\nu/\nu_c) \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{\frac{p-3}{2}} d\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right). \end{aligned} \quad (6.33)$$

(6.32) の電子分布が十分広いエネルギー範囲に渡っているとき、積分範囲を 0 から  $\infty$  にすると、積分値は  $\nu$  に依らない。結局、**相対論的な電子のエネルギー分布が power-law、 $\gamma^{-p}$  で表わされるとき、そこから期待されるシンクロトロン放射あるいは逆コンプトン放射のエネルギースペクトルも power-law になり、そのべきは、**

$$s = \frac{p-1}{2} \quad (6.34)$$

になる、という重要な結果が得られる。

## 6.5 制動放射 (bremsstrahlung)

プラズマ中の自由電子が原子核 (主に陽子) のクーロン力によって曲げられ、それに伴う電気双極子の加速度運動によって発生する電磁波が制動放射 (bremsstrahlung) である。電子-電子、あるいは陽子-陽子では電気双極子にならないので、制動放射は発生しない。また、陽子が原子核のクーロン力に受ける影響は電子に比べてはるかに弱いので、陽子からの制動放射も考えなくて良い。

光学的に薄い熱的プラズマからは、熱制動放射 (thermal bremsstrahlung) による連続スペクトルが観測される<sup>8</sup>。熱制動放射では連続成分だけを考えるが、実際には数 keV の高温

<sup>8</sup>非熱的制動放射 (non-thermal bremsstrahlung) は銀河面からの硬 X 線放射のモデルなどで提案されている (たとえば、Yamasaki et al. 1997, ApJ, 481, 821)。

プラズマ中では重元素の電離と再結合が繰り返され、プラズマの温度(電離状態)に応じた、たくさんの輝線が観測される。

6.2節で述べたように、**光学的に十分厚い熱的輻射はすべて黒体輻射になり、それが熱的輻射の中では最大の輻射強度を与える**。中性子星大気、ブラックホールや中性子星の周りの標準降着円盤などは光学的に厚く、黒体輻射に近いスペクトルがX線領域で観測される(前節参照)。一方、熱制動放射は光学的に薄いプラズマから観測される。数 keV の高温プラズマによる熱制動放射によるX線を放出している天体として、白色矮星(激変星; Cataclysmic Variables)、超新星残骸、銀河、銀河団などがある。黒体輻射の強度は強いので、とても小さい天体(中性子星、降着円盤)からも強いX線が観測されるが、熱制動放射の放射効率はずっと低いので、X線で熱制動放射が観測されている天体は黒体放射をしている天体よりもはるかに大きい(**大きくなくては観測にかからない**)ことに注意。

### 6.5.1 準備 1: 電場の変化とエネルギースペクトル

時間変化する電磁場で電場と磁場は直交し、ポインティングベクトル

$$S \equiv \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (6.35)$$

が、電磁波の進行方向のエネルギーの流れを示す。ガウス単位系で $|E||B|$ ,  $|E|^2$ ,  $|B|^2$ はそれぞれ、エネルギー密度[erg/cm<sup>3</sup>]の単位を持つことので、ポインティングベクトルは[erg/s/cm<sup>2</sup>]という単位になることに注意。電磁波では電場と磁場の大きさは同じだから、単位時間、単位面積あたりの電磁波のエネルギーの流れ[erg/s/cm<sup>2</sup>]は

$$\frac{dW}{dt dA} = \frac{c}{4\pi} E(t)^2 \quad (6.36)$$

となり、ある電場変化の「パルス」によって生じる全エネルギー[erg/cm<sup>2</sup>]は

$$\frac{dW}{dA} = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t)^2 dt \quad (6.37)$$

と書ける。 $E(t)$ のフーリエ変換、

$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \quad (6.38)$$

を考える。フーリエ変換の性質より

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(t)^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega, \quad (6.39)$$

また、 $E(t)$ は実数だから、

$$\hat{E}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{E}^*(\omega) \quad (6.40)$$

以上を使うと、(6.37)は、

$$\frac{dW}{dA} = c \int_0^{\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega \quad (6.41)$$

とかける。つまり、ひとつのパルスからの、単位振動数あたりのエネルギーフラックス [erg/cm<sup>2</sup>/Hz] は、

$$\frac{dW}{dA d\omega} = c |\hat{E}(\omega)|^2 \quad (6.42)$$

となる。

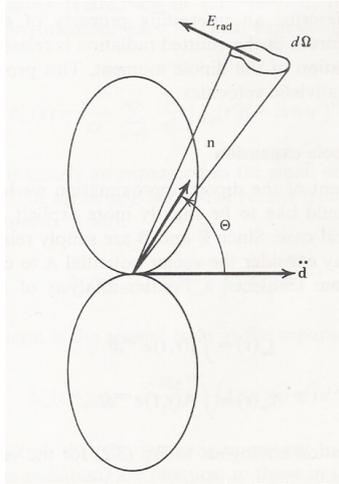
フーリエ変換の性質より、周波数の幅  $\Delta\omega$  とパルスの持続時間  $T$  の間に、 $\Delta\omega \approx 1/T$  という関係があることに注意。たとえば、電子が単振動しているとき、エネルギースペクトルはその振動数の単色になる (サイクロトロン放射がその例; section 5.1.2)。一方、電場の変化が非常に短いパルスによって引き起こされるとき、広い範囲のエネルギースペクトルが観測される (シンクロトロン放射がその例; 次節参照)。

### 6.5.2 準備 2: 電気双極子放射 (electric dipole radiation)

ここでは非相対論的な場合だけを考える。 $\mathbf{d} \equiv \sum_i q_i \mathbf{r}_i$  を電気双極子ベクトルとすると、それが加速度運動しているとき、方位ベクトル  $\mathbf{n}$ 、距離  $R$  の点に生じる電場は<sup>9</sup>、

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}})}{c^2 R}, \quad |\mathbf{E}_{rad}| = \frac{|\ddot{\mathbf{d}}| \sin \theta}{c^2 R}, \quad (6.43)$$

$\theta$  は  $\ddot{\mathbf{d}}$  と方位ベクトル  $\mathbf{n}$  のなす角。導出は、Rybicki and Lightman などの教科書参照。次元が合っていることだけは確認しておくこと。 $\ddot{\mathbf{d}}$  の方向には放射はされず、その垂直方向で放射強度が最大になる (下図参照)。



Rybicki & Lightman “Radiative and Processes in Astrophysics”, chapter 3 より。

(6.36)、(6.43) と、立体角  $d\Omega = dA/R^2$  を使って、電気双極子から単位立体角あたりに放射されるエネルギー [erg/s/str] は、

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta. \quad (6.44)$$

立体角で積分して ( $\int \sin^2 \theta d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{8\pi}{3}$ )、電気双極子から放出されるパワー [erg/s] は、

$$P = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}. \quad (6.45)$$

<sup>9</sup> 静電磁場は  $R^{-2}$  で距離とともに落ちていくが、放射場は  $R^{-1}$  でしか減少しないことがポイント。これについては Rybicki & Lightman に直感的で美しい説明があるので参考にしてください。

電気双極子放射のエネルギースペクトルを考えるには、電場強度のフーリエ変換が必要。(6.43) より、

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\sin \theta}{c^2 R} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{d} e^{i\omega t} dt. \quad (6.46)$$

電気双極子のフーリエ変換、

$$\hat{d}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d(t) e^{i\omega t} dt \quad (6.47)$$

を定義すると、

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{d}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (6.48)$$

$$\ddot{d}(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \hat{d}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (6.49)$$

だから、(6.46) は、

$$\begin{aligned} \hat{E}(\omega) &= - \frac{\sin \theta}{c^2 R} \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^2 \hat{d}(\omega') e^{-i\omega' t} e^{i\omega t} dt d\omega' \\ &= - \frac{\sin \theta}{c^2 R} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^2 \hat{d}(\omega') \delta((\omega' - \omega)t) dt \\ &= - \frac{\sin \theta}{c^2 R} \omega^2 \hat{d}(\omega). \end{aligned} \quad (6.50)$$

(6.42) と (6.50) より、(6.45) と同様に立体角  $d\Omega = dA/R^2$  を使って、電気双極子から放射される単位振動数、単位立体角あたりのエネルギー [erg/Hz/str] は、

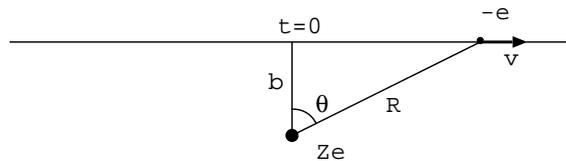
$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{c^3} \omega^4 |\hat{d}(\omega)|^2 \sin^2 \theta. \quad (6.51)$$

立体角で積分して、電気双極子放射の単位振動数あたりのエネルギー [erg/Hz] は、

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{8\pi}{3c^3} \omega^4 |\hat{d}(\omega)|^2. \quad (6.52)$$

### 6.5.3 制動放射のパワー

下図のように一つの電子 (電荷  $-e$ ) が一つの原子核 (電荷  $-Ze$ ) の近くを通り (インパクトパラメーター  $b$ )、クーロン力によって (ほんの少し) 曲げられる際の電気双極子放射を、(6.52) に従って考える。



電子の速度ベクトルを  $\mathbf{v}$  とすると、 $\ddot{\mathbf{d}} = -e\dot{\mathbf{v}}$ 。(6.49) のフーリエ変換をとって、

$$\omega^2 \hat{d}(\omega) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{d}(t) e^{i\omega t} dt$$

$$= \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t) e^{i\omega t} dt. \quad (6.53)$$

電子が原子核のクーロン場の影響を受ける時間スケールは、 $\tau \equiv b/v$  なので、上式で  $-t < t < \tau$  の時間範囲での積分が効く。もし  $\omega\tau \gg 1$  ならば、exponential の項は振動するので、打ち消し合って積分はゼロになると近似してよい<sup>10</sup>。一方、 $\omega\tau \ll 1$  のときは、exponential の項は 1 と近似して、垂直方向の運動方程式  $m dv/dt = Z \cos \theta e^2/R^2$  を用いて、

$$\begin{aligned} \omega^2 \hat{d}(\omega) &= \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ze^2 \cos \theta}{mR^2} dt \\ &= \frac{Ze^3}{2vb\pi m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{Ze^3}{vb\pi m}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

結局、(6.52) を用いて、速度  $v$  を持つ一つの電子が一つの原子核の影響を受けて放出する制動放射のエネルギー [erg/Hz] は ( $b$  の関数と考える)

$$\begin{aligned} \frac{dW(b)}{d\omega} &\approx \frac{8Z^2 e^6}{3\pi c^3 m^2 v^2 b^2} \quad (b \ll v/\omega) \\ &\approx 0 \quad (b \gg v/\omega). \end{aligned} \quad (6.55)$$

(6.55) は、 $b \rightarrow 0, v \rightarrow 0$  で発散するので、実際には現実的な  $b, v$  の下限値を設定しなくてはならない。

電子密度  $n_e$  [cm<sup>-3</sup>], イオン密度  $n_i$  [cm<sup>-3</sup>] のプラズマ中で電子が一様な速さ  $v$  を持っているとして、単位体積、単位時間あたりに放射されるエネルギー [erg/s/cm<sup>3</sup>/Hz] を考える。ひとつのイオンに対して、インパクトパラメーター  $b$  と  $b+db$  の間を単位時間あたり通過する電子の数は、 $2\pi b db v n_e$  [s<sup>-1</sup>] であることを用いて、

$$\begin{aligned} \frac{dW(b)}{d\omega dV dt} &= n_e n_i 2\pi v \int_{b_{min}}^{\infty} \frac{dW(b)}{d\omega} b db \\ &\approx n_e n_i 2\pi v \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{8Z^2 e^6}{3\pi c^3 m^2 v^2 b^2} b db \\ &= \frac{16e^6}{3c^3 m^2 v} n_e n_i Z^2 \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \\ &= \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3} c^3 m^2 v} n_e n_i Z^2 \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \\ &= \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3} c^3 m^2 v} n_e n_i Z^2 g_{ff}(v, \omega). \end{aligned} \quad (6.56)$$

ここで、 $g_{ff}(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln(b_{max}/b_{min})$  は、「Gaunt factor」と呼ばれ<sup>11</sup>、電子のエネルギーと制動放射で放射される振動数の関数であるが、大体  $\sim 1$  のオーダーと置いて良い。

<sup>10</sup>6.5.1 節の議論より、「パルス」の持続時間は  $\sim \tau$  だから、電磁波は  $\Delta\omega \sim 1/\tau$  の振動数の幅を持つ。電子が速く運動しているほど高周波の電磁波が放射される (電子がゆっくり運動しているときは高周波の電磁波は放出されない)。

<sup>11</sup> $\sqrt{3}/\pi$  がつくのが標準的な定義だそうだ。

(6.56) の次元 [erg/s/Hz/cm<sup>3</sup>] は確認しておくこと。単位時間、単位体積あたりから放射されるエネルギーが  $n_e n_i$  に比例するので、**体積  $V$  のプラズマから単位時間に放出される制動輻射のエネルギーは、 $n_e n_i V$  に比例する。**  $n_e n_i V$  を Emission Measure と呼ぶことがある [cm<sup>-3</sup>]。

#### 6.5.4 熱制動放射 (thermal bremsstrahlung)

(6.56) は電子が特定の速度  $v$  を持つときの表式だが、これを実際の電子の速度分布について平均してやれば、制動輻射のエネルギースペクトルが得られる。電子分布が熱的 (Maxwell 分布) か、比熱的 (power-law) かによって、熱制動放射、非熱的制動放射になる。電子分布に応じて、前者は電子温度に対応したエネルギー  $\sim kT$  にカットオフのあるスペクトルになり、後者は power-law になる。

電子が温度  $T$  の Maxwell 分布をしているとき、速度が  $v$  と  $v + dv$  の間にある確率  $dP$  は、

$$dP \approx v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

だから、この重みで (6.56) を平均する。積分の下限、 $v_{min}$  は、振動数  $\nu$  の光を考えているとき、 $h\nu = \frac{1}{2}mv_{min}^2$  という条件から決まる (もし  $v < v_{min}$  ならエネルギー  $h\nu$  の光子は発生しない)。

$$\frac{dW(T, \omega)}{dV dt d\omega} = \frac{\int_{v_{min}}^{\infty} \frac{dW(v, \omega)}{dV dt d\omega} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}{\int_0^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}$$

$\int_0^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}/4$  だから、分母は  $(2kT/m)^{3/2} \sqrt{\pi}/4$ 、分子には  $\int_{v_{min}}^{\infty} v \exp(-mv^2/2kT) dv$  という積分が出てくるが、 $\int_a^{\infty} x \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2} \exp(-a^2)$  を用いて、これは  $\frac{1}{2}(2kT/m) \exp(-h\nu/kT)$ 。よって、温度と周波数依存性は (Gaunt factor に弱く依存することを除けば)、 $T^{-1/2} \exp(-h\nu/kT)$  になる。

結局、熱制動輻射のエネルギースペクトル [erg/s/cm<sup>3</sup>/Hz] は、

$$\begin{aligned} \epsilon_{\nu}^{ff} &\equiv \frac{dW}{dV dt d\nu} = \frac{2^5 \pi e^6}{3mc^3} \left(\frac{2\pi}{3km}\right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 n_e n_i e^{-h\nu/kT} \bar{g}_{ff}(T, \nu) \\ &= 6.8 \times 10^{-38} T^{-1/2} Z^2 n_e n_i e^{-h\nu/kT} \bar{g}_{ff}(T, \nu) \quad [\text{CGS unit}]. \end{aligned} \quad (6.57)$$

ここで、 $\bar{g}_{ff}(T, \nu)$  は、電子の速度分布について平均した Gaunt factor で、温度、周波数に依存している。X線観測では  $kT \sim h\nu$  の場合が多いが、このときは  $\bar{g}_{ff}(T, \nu) \approx (h\nu/kT)^{-0.4}$  であることを覚えておくと便利。よって、以下の図からもわかるように、熱制動輻射の X線エネルギースペクトル [erg/s/cm<sup>2</sup>/keV] は、 $E^{-0.4} \exp(-E/kT)$ 、光子スペクトル [photon/s/cm<sup>2</sup>/keV] は、 $E^{-1.4} \exp(-E/kT)$  で近似できる。

(6.57) を振動数で積分すると、温度  $T$  のプラズマから単位時間、単位体積あたり放出される熱制動放射のエネルギー [erg/s/cm<sup>3</sup>] になる。

$$\begin{aligned} \int \epsilon_{\nu}^{ff} d\nu &= 6.8 \times 10^{-38} T^{1/2} Z^2 n_e n_i \bar{g}_{ff}(T) \frac{k}{h} \quad [\text{CGS unit}] \\ &= 1.4 \times 10^{-27} T^{1/2} Z^2 n_e n_i \bar{g}_{ff}(T) \quad [\text{CGS unit}]. \end{aligned}$$

ここで、振動数で平均した Gaunt factor は、 $\bar{g}_{ff}(T) \approx 1.2$ 、宇宙組成を仮定して、いろいろなイオンを考えると、 $\sum_Z n_e n_Z Z^2 \approx 1.4n_e^2$  だから<sup>12</sup>結局、熱制動放射の放射効率 [erg/s/cm<sup>3</sup>]

<sup>12</sup>Zombeck, "Handbook of Space and Astrophysics" 参照。

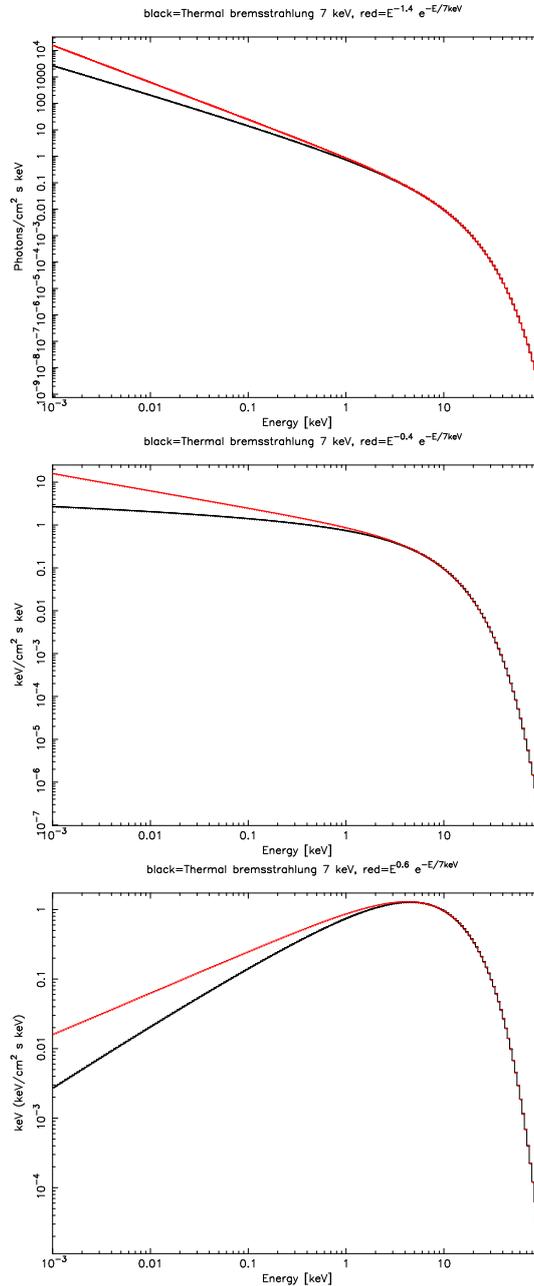


Figure 6.5: 7 keV の熱制動輻射スペクトル (黒; xspec の brems モデル) と、7 keV に cut-off エネルギーを持つ power-law モデル (赤;  $\propto E^{-p} \exp(-E/7 \text{ keV})$ ) の比較。上から順に、光子スペクトル、エネルギースペクトル、(いわゆる)  $\nu F_\nu$  プロット。 $p$  はそれぞれ、1.4, 0.4, -0.6 になる。ここではイオンを考慮していない (電子と陽子だけを考慮している) から輝線が入っていないことに注意。実際の熱的プラズマからの放射は温度に応じたたくさんの輝線が放射される。

をプラズマの温度と電子密度だけで表わす便利な公式が得られる：

$$\int \epsilon_{\nu}^{ff} d\nu = 2.4 \times 10^{-27} T^{1/2} n_e^2 \text{ [CGS unit]}. \quad (6.58)$$

### 6.5.5 X線で観測される熱制動輻射の例

光学的に薄い高温プラズマから放出される連続成分は熱制動輻射である。以下のような天体から熱制動輻射によるX線が観測されている。

- 単独の恒星のコロナ、フレア (特に早期型星)
- 晩期型星の連星系。特に RS Cvn などの active binary。激しい磁気活動により、プラズマが加熱される。
- 激変星と呼ばれる、白色矮星と主系列星の連星系。白色矮星に物質が高速で落ちるときに衝撃波が生じ、物質が加熱される。
- 超新星残骸。衝撃波によって、星間物質が高温に加熱される。
- 楕円銀河、銀河群、銀河団。ダークマターの重力ポテンシャルによって、高温プラズマが引き留められている。

### 6.5.6 熱制動輻射の特徴

#### 広範囲 (Broad band) のエネルギースペクトル

熱制動輻射の広範囲にわたるエネルギースペクトルを、同じ温度をもつ黒体輻射のスペクトルと比較してみよう (図 6.6)。熱制動輻射の方が大きく広がっていることがわかる。特に低エネルギー側に裾を引く。これは、わずかだけ軌道を曲げられる電子が低エネルギーの電磁波を放射するとして理解できる。なお、図 6.6) の縦軸の単位が  $\text{keV}^2 \text{ photons/cm}^2/\text{s}/\text{keV}^{-1}$  であることに注意 ( $\nu f_{\nu}$  プロットと呼ぶことがある)。エネルギースペクトル  $f(E)$  が  $\text{erg/s/cm}^2/\text{keV}$  という単位を持つとしたとき、あるエネルギー範囲におけるフラックスは

$$\int f(E) dE = \int E f(E) dE / E \propto \int E f(E) d(\log E) \quad (6.59)$$

と表される。よって、横軸をエネルギーや振動数で対数表示したとき、 $E f(E)$  または  $\nu f_{\nu}$  で表されるスペクトルの形がつくる面積が、そのエネルギー範囲におけるフラックスとなる。これが視覚的にわかりやすいので、 $\nu f_{\nu}$  プロットは良く用いられる。

#### 熱制動輻射の輻射効率の低さ

6.2節ですでに述べたように、熱的な放射の強度は黒体輻射を超えない。X線天文学の非常に初期の時代、Sco X-1 などの正体がまだ不明だったころ、そのスペクトルの形が熱制動輻射と良く似ていて、それが可視光や赤外線のスpectrumも説明できる、というモデルがあった。しかし、 $\sim 10^{38} \text{ erg/s}$  の光度を熱制動輻射で説明するには、式 (6.58) より、 $T = 2 \sim 10^7 \text{ K}$  ( $\sim 2 \text{ keV}$ ) として、エミッションメジャー、 $n_e^2 V \approx 10^{61} [\text{cm}^{-3}]$  が必要になる。高密度なプラズマでも、密度は  $\sim 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  なので、 $V \approx 10^{31} \text{ cm}^3$  となり、輻射領域の大きさは  $R \approx 10^{10} \text{ cm}$ 。これは中性子星の半径、 $\sim 10^6 \text{ cm}$  よりはるかに大きい。つまり、端的に言って、**光学的に薄い熱制動輻射で大きな光度を稼ぐには、大きな体積が必要。中性子星のよう**

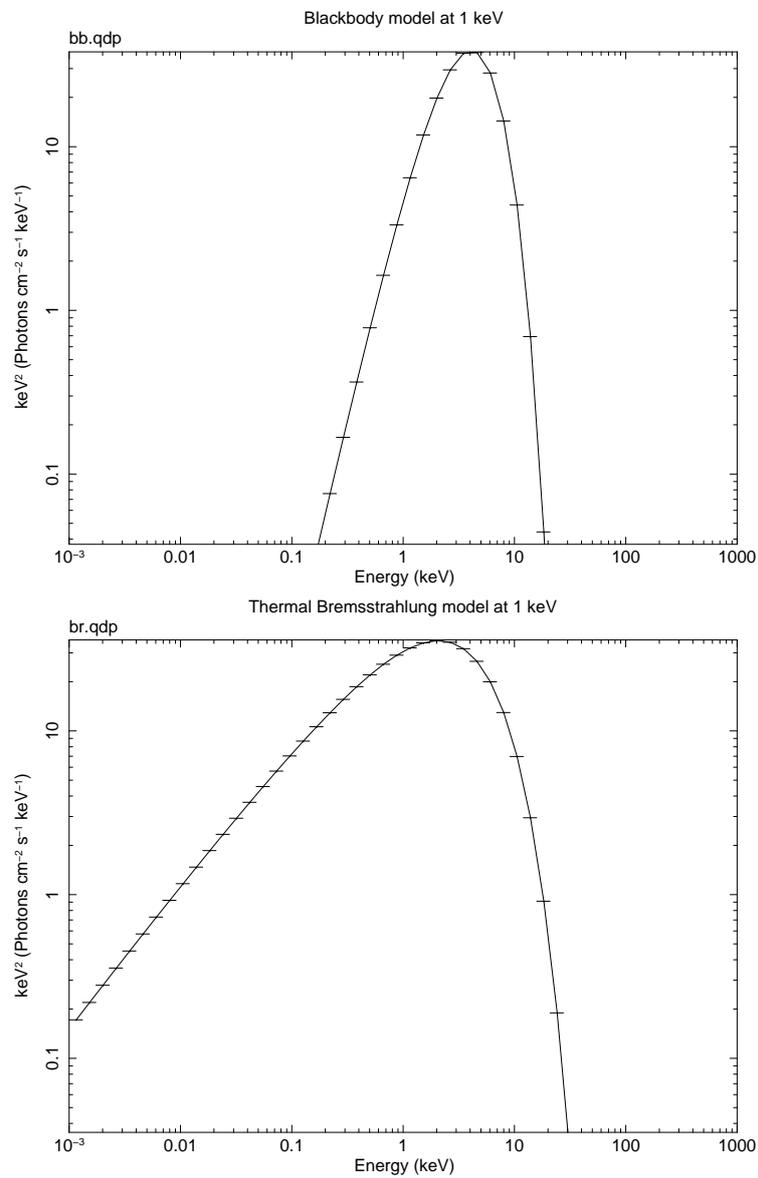


Figure 6.6:  $kT = 1 \text{ keV}$  の黒体放射 (上) と熱制動放射 (下) のエネルギースペクトルの比較。熱制動放射の方が大きく広がっている。)

に小さな領域が熱的な輻射で十分明るく輝くためには、光学的に厚い輻射（黒体輻射）しかあり得ない<sup>13</sup>。

一方、白色矮星と晩期型星の連星系である激変星（Cataclysmic Variable）から、 $\sim 10$  keV の高温熱輻射が観測されている。高温プラズマに特徴的な鉄輝線も観測されており（図 6.8）、その起源が熱輻射であることは間違いない。 $R \sim 10^8$  cm<sup>2</sup>,  $n_e \sim 10^{15}$  cm<sup>-3</sup>,  $T \sim 10^8$  K とすると、式 (6.58) より光度は  $\sim 10^{31}$  erg/s となる。白色矮星より二桁小さく一桁低温である黒体輻射をしている中性子星のほうが、7桁も光度が大きいことに注意しよう。

### 熱プラズマからの輝線放射

ここまでの熱制動輻射の議論では電子とイオンの間の再結合を考えていなかったのも、実は非現実的である。実際には、熱プラズマ中でイオンと電子は電離と再結合を繰り返し、それによってたくさんの輝線が放射される。そのようなプラズマからの複雑なエネルギースペクトルを計算するのは容易ではないが、XSPEC などの標準的なスペクトル解析ツールに、プラズマからの熱放射のモデルが組み込まれていて、観測データとの比較（フィッティング）が簡便に出来るようになっている。

## 6.6 逆コンプトン放射 (Inverse Comptonization)

### 6.6.1 用語の整理

#### トムソン散乱 (Thomson scattering)

長波長 (低エネルギー) の光の自由電子による散乱を言い、短波長 (高エネルギー) の光のコンプトン散乱の低エネルギー極限に対応する。古典電磁気学によると電子は入射光に伴う電場により振動する。その際に電子の得る速度を光速に比べ無視すると、電子は入射光と同じ振動数の散乱光を双極放射する。全断面積は、 $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2$  ( $r_0$  は古典電子半径)。

#### コンプトン散乱 (Compton scattering)

電子による X 線光子の散乱。単色の X 線が電子に当たって散乱されると散乱 X 線の中に入射 X 線と同じ波長の X 線の他に、入射 X 線の波長よりも  $\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$  だけ波長が長いものが含まれる ( $\theta$  は X 線の散乱角)。 $\lambda_C = h/mc \approx 0.02426 \text{ \AA}$  で、 $\lambda_C$  は電子のコンプトン波長と呼ばれる。この効果は古典電磁気学では説明できない。X 線を光子として扱い、電子との衝突を古典力学の弾性衝突と考えることによって定量的に説明できる。

一般に、トムソン散乱を含めてコンプトン散乱ということもあるが、特に区別する必要があるときはトムソン散乱を除いた部分を狭義のコンプトン散乱と言う。コンプトン散乱の断面積はクライン-仁科の公式で与えられ、これは入射 X 線の波長が長いとき、トムソン散乱の断面積と一致する。

#### 逆コンプトン効果 (inverse Compton effect)

高エネルギーの電子がマイクロ波や赤外線のようなエネルギーの低い光子と弾性散乱して、エネルギーの高いガンマ線を生じる現象。一方、コンプトン効果は高エネルギーの光子と低エネルギーの電子との弾性散乱によって、より低いエネルギーの光子が生じる現象である

<sup>13</sup>シンクロトロンのような比熱的な輻射の場合は、小さな領域でも明るく輝くことができる。

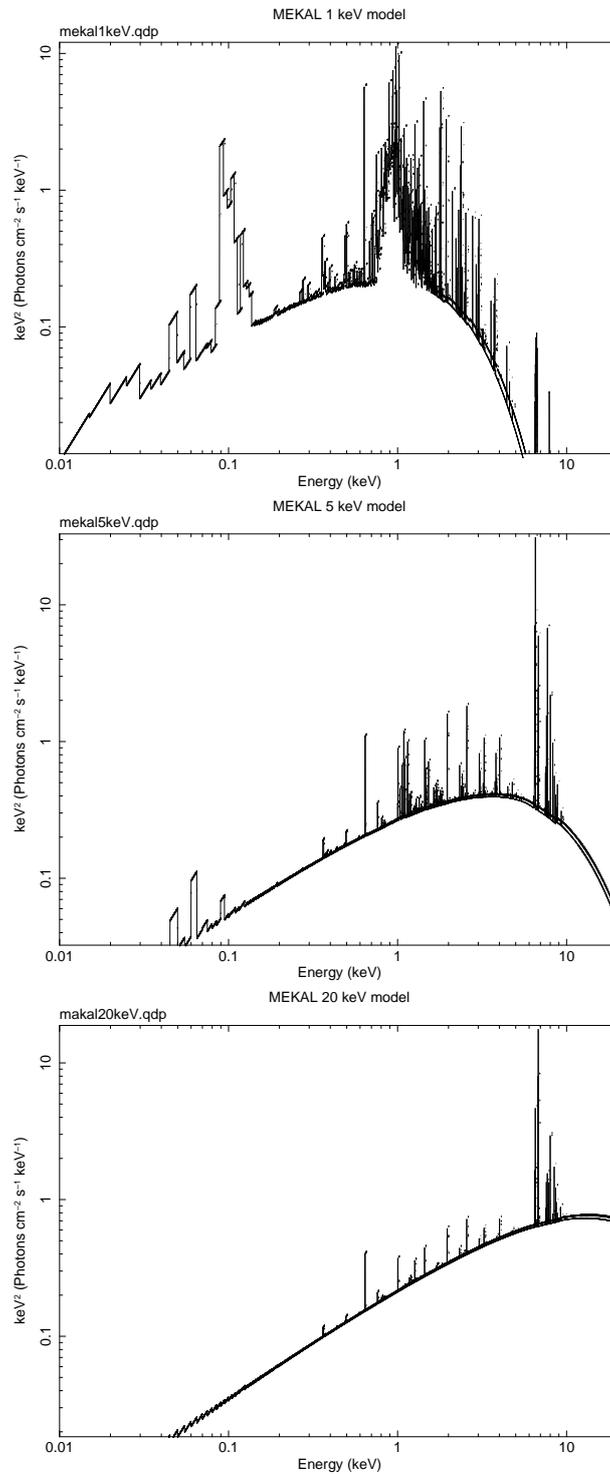


Figure 6.7: 標準的な熱プラズマモデル (mekal) で計算した、1 keV, 5 keV, 20 keV のプラズマからの放射スペクトル。温度が上がるにつれて連続成分のピークが高エネルギー側にずれるとともに、より重い元素の輝線が顕著になる (ブレて見えるのは、データ点多すぎて postscript が不都合を起こしているためと思われる。)

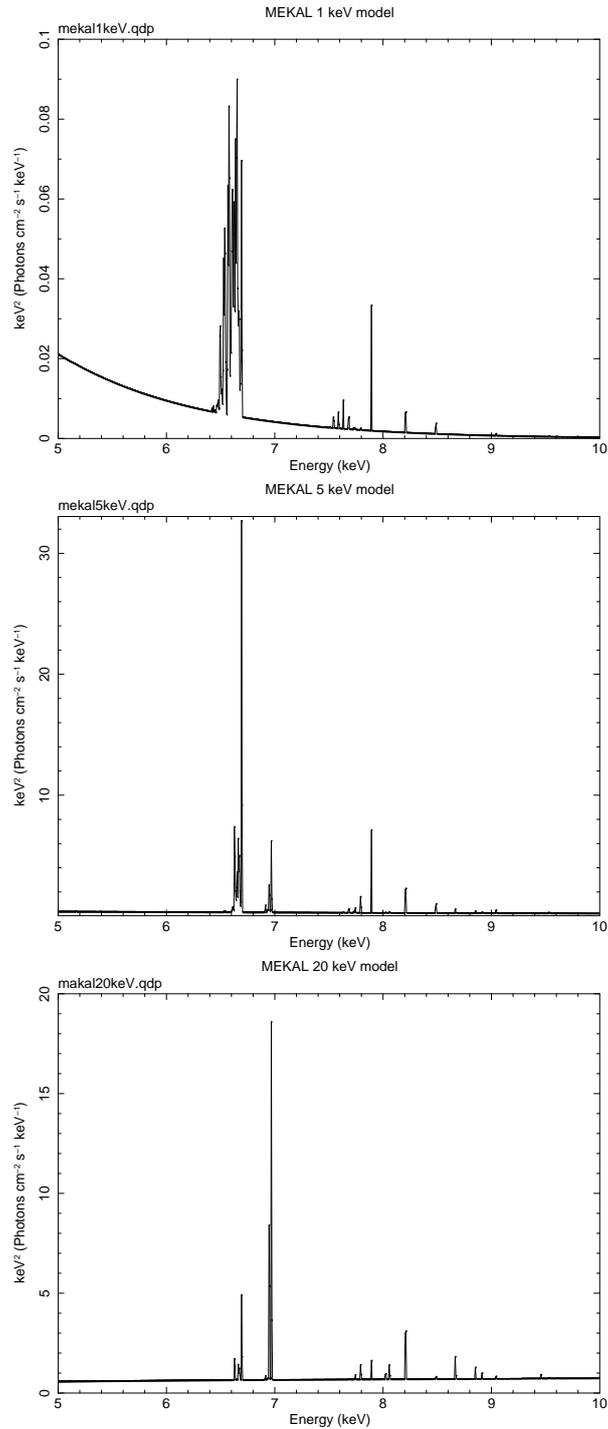


Figure 6.8: 前図の鉄ライン付近を拡大したもの。縦軸のスケールが違うことに注意。6.6 – 6.7 keV 付近に FeXXV (He-like) およびそれより電離度の低いイオンからの輝線、7.0 keV 付近に FeXXVI(H-like) の輝線が観測される。プラズマの温度が上がるにつれ、より電離が進んだ鉄からの輝線が観測される。

が、これら二つの過程は見ている座標系が異なるだけで基本的には同一の過程であり、「逆」の字を省くことも多い。

高温プラズマ中の電子 (温度  $\approx kT_e$ ) が、低エネルギーの光子 (エネルギー  $\approx E_{soft}$ ) を逆コンプトンで高エネルギー側に叩きあげる。  $E_{soft} \ll E \ll kT_e$  のエネルギー範囲のスペクトルは power-law になり (べきは電子温度と散乱の光学的厚みで決まる)、  $E \gtrsim kT_e$  では exponential で落ちる。ブラックホール連星の low state<sup>14</sup>、セイファート銀河の X 線スペクトルなどが thermal Comptonization だと考えられている。

### 6.6.2 熱的逆コンプトン放射 (thermal inverse Comptonization) のスペクトルの例

電子温度  $kT_e$ 、散乱に対する光学的厚み  $\tau$  の熱的プラズマに、エネルギー  $E_{input} (\ll kT_e)$  を持つ低エネルギー光子が入射してくる場合を考える。入射光子は逆コンプトン散乱により、電子からエネルギーを貰う。熱的プラズマがどれだけ効率良く逆コンプトン散乱を引き起こすかを表す「コンプトン  $y$  パラメーター」を以下のように定義する。

$$y = \frac{4kT_e}{mc^2} \text{Max}(\tau, \tau^2). \quad (6.60)$$

熱的逆コンプトン放射のスペクトルは、  $E_{input} \ll E \ll kT_e$  の範囲ではべき関数で表され、  $\sim kT_e$  付近で折れ曲がりを持つ (図 6.9 左)。べきは  $y$  に依存し、  $y$  が大きいほど (逆コンプトンが有効であるほど) スペクトルはフラットになる。  $\tau$  が十分大きいときには逆コンプトン効果は飽和 (saturate) し、  $3kT_e$  のあたりに Wien ピークが観測される。

熱的逆コンプトン放射は、銀河系内ブラックホール候補天体のスペクトルを説明する (図 6.9 右)。この状態はいわゆる "low state" に対応していて、降着円盤の内縁はブラックホールから遠くで切れていて、その内側に高温プラズマが存在すると考えられている。低温の黒体放射をしている降着円盤から発生した低エネルギー光子が、高温プラズマによる熱的逆コンプトン効果を受けて、高エネルギー光子として放出される<sup>15</sup>。

## 6.7 相対論電子によるシンクロトロン放射と逆コンプトン散乱

高エネルギーの電子が存在するとき、シンクロトロン放射や逆コンプトン (Inverse Compton) 散乱による X 線、ガンマ線放射が支配的になる。両者は異なった物理過程であるが、同じ電子分布から両者によって生じたスペクトルを同時に観測することもある。

わずかな磁場と非熱的な高エネルギー電子が存在するとき、電波から X 線まで広い範囲にわたってシンクロトロン放射が観測される。また、同じ高エネルギー電子が低エネルギー光子を逆コンプトン散乱で叩き上げることによる高エネルギースペクトルも観測される。Blazar<sup>16</sup>からの広い波長範囲にわたる放射は、高エネルギーまで加速された電子がシンクロ

<sup>14</sup>ブラックホール連星系は、high state, low state というはっきりと区別がつく二つのスペクトル状態 (bimodal states) を持つ。

<sup>15</sup>3.7.3 節で考えたように降着円盤の内縁が  $R_{ISCO}$  で決まるのは "high state" の場合である。両者は全く異なる性質を持つので、区別して考える必要がある。

<sup>16</sup>McGraw-Hill, Dictionary of Astronomy による定義: "A type of quasar whose light exhibits strong optical polarization and large variability." Oxford, Dictionary of Astronomy による定義: "A class of extragalactic, violently objects that includes BL Lacertae objects and optically violently variable (OVV) quasars, from which the name is contracted. They are thought to be the high-speed jet of plasma and radiation from an active galactic nucleus viewed nearly end-on. The OVV quasars have broad emission lines in their spectra, but otherwise show all the characteristics of BL Lac objects."

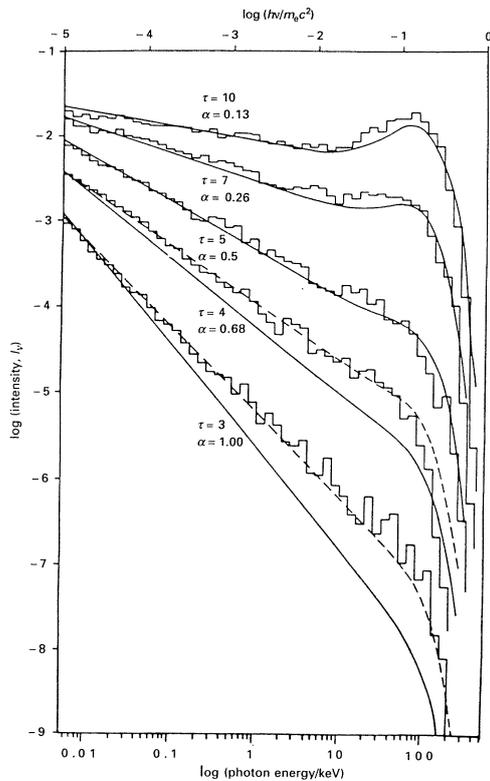


Figure 4.11. The Comptonisation of low frequency photons in a spherical plasma cloud having  $kT_e = 25$  keV. The solid curves are analytic solutions of the Kompaneets equation (see Pozdnyakov *et al.* (1983)); the results of Monte Carlo simulations of the Compton scattering process are shown by the histograms and there is good agreement

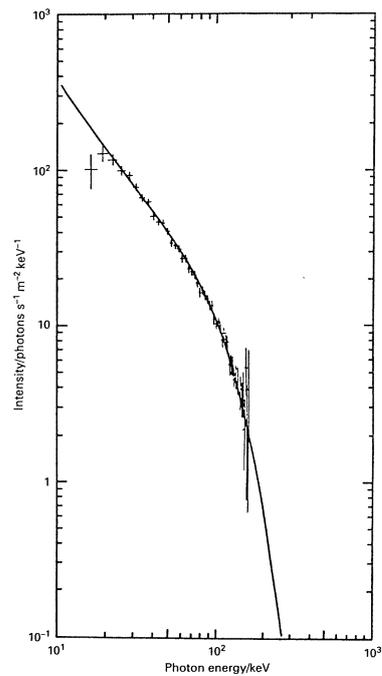


Figure 4.12. The hard X-ray spectrum of the Galactic X-ray source Cygnus X-1 observed in a balloon flight of the Max Planck Institute for Extraterrestrial Physics, on 20 September 1977 compared with the analytic solution of the Kompaneets equation with parameters  $\tau_0 = 5$ ,  $kT_e = 27$  keV. (R. A. Sunyaev and L. G. Titarchuk (1980). *Astron. Astrophys.*, **86**, 121.)

Figure 6.9: (左図) 熱的逆コンプトン放射のモデルスペクトル。電子温度  $kT_e = 25$  keV のプラズマ (球対称を仮定) に低エネルギーの光子が入射してきたとき、電子散乱の光学的厚み  $\tau = 3, 4, 5, 7, 10$  のそれぞれの場合について、放出されるスペクトルが示されている。(右図) ブラックホール候補天体 Cyg X-1 の X線エネルギースペクトルを熱的逆コンプトン放射モデル ( $\tau = 5$ ,  $kT_e = 27$  keV) でフィットした例。Longair, “High Energy Astrophysics” より。

トロン放射 (電波から X 線領域) すると共に、それによって生成された光子の一部を同じ電子が逆コンプトンで叩き上げる (ガンマ線領域)、“Synchrotron Self Compton (SSC) モデル” で説明されている。

超新星残骸のシェルでは衝撃波による電子加速が起きていて、そこからのシンクロトロン放射がシェルに沿って電波や X 線で観測されている。また、同じ電子が宇宙背景放射による光子を MeV  $\approx$  TeV ガンマ線領域まで叩き上げるので、やはりシェルに沿ったガンマ線放射が観測されている。

### 6.7.1 シンクロトロン放射

67 頁で述べたように、磁場に垂直な方向に電子が円運動するときのサイクロトロン振動数 (Larmor frequency) は、

$$\nu_L = \frac{eB}{2\pi m_e c} \quad (6.61)$$

エネルギー  $mc^2\gamma$  の電子がシンクロトロン放射で放出する光子の典型的な振動数は<sup>17</sup>、

$$\nu_c = \frac{3\gamma^2 eB \sin \alpha}{2\pi m_e c}. \quad (6.62)$$

$\alpha$  は磁場と電子の運動の向きのなす角度 (ピッチ角)。

厳密な計算によると、エネルギー  $mc^2\gamma$  を持つ一つの電子からのシンクロトロン放射スペクトルのピークは、 $0.29\nu_c$  である (図 6.10 上図)。このようなスペクトルを power-law 分布を持つ電子について積分すると、すでに (6.4) 節で説明したように、やはり power-law の光子スペクトルが得られる (図 6.10 下図)。

一つの電子から単位時間あたりシンクロトロン放射で放出されるエネルギー [erg/s] は、

$$P_{synch} = \frac{4}{3}\sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B. \quad (6.63)$$

ここで、 $\sigma_T$  はトムソン散乱断面積、 $U_B$  は磁場のエネルギー密度<sup>18</sup>、 $B^2/8\pi$ 。電子が拡がり  $\sigma_T$  を持って、光速で走っている磁場とぶつかりあっているようなイメージ。

### 6.7.2 電子エネルギー、磁場、シンクロトロン光子エネルギーの関係

具体的な磁場  $B$ 、電子エネルギー  $E_e$  について、シンクロトロン放射スペクトルのピークエネルギー  $E_p$  を求めてみよう。ここで、ボーア磁子  $\hbar e/2mc = 9.3 \times 10^{-21}$  erg/gauss,  $\gamma \approx 2 \times 10^7 (E_e/10 \text{ TeV})$  を用いる。

$$\begin{aligned} E_p &= 0.29 \times h\nu_c \approx 0.29h \frac{3\gamma^2 eB}{2\pi mc} = 0.29 \times 6\gamma^2 B \frac{\hbar e}{2mc} \\ &= 1.7 \times (2 \times 10^7 (E_e/10 \text{ TeV}))^2 \left( \frac{B}{1\text{mG}} \right) 1\text{mG} \times 9.3 \times 10^{-21} [\text{erg/gauss}] \\ &= 6.3 \times 10^{-9} \left( \frac{E_e}{10 \text{ TeV}} \right)^2 \left( \frac{B}{1\text{mG}} \right) [\text{erg}] \end{aligned}$$

<sup>17</sup>教科書 (論文) によって定義が違う。Katz はこの定義と同じ。Shu, Rybicki & Lightman では、(6.62) の  $1/2$  を  $\nu_c$  としている。

<sup>18</sup> $B$  を Gauss で表わしたとき、 $B^2/8\pi$  は [erg/cm<sup>3</sup>] という単位になることを思いだそう。

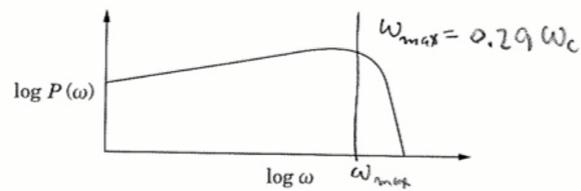


図 3.16 単一の電子からのシンクロトロン放射のスペクトル分布.

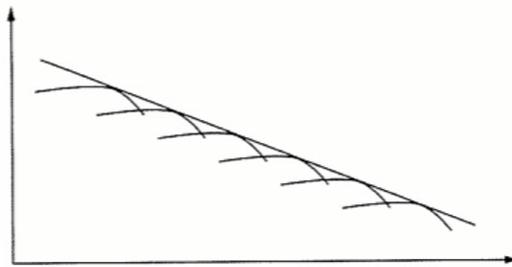


図 3.17 相対論的電子系からのシンクロトロン放射スペクトル.

Figure 6.10: 単一の電子からのシンクロトロンスペクトル（ピークが $0.29\nu_c$ にくる）と、それを power-law の電子分布について積分したときに期待されるシンクロトロン放射スペクトル（power-law になる）の模式図。シリーズ現代の天文学、「天体物理学の基礎 II より」。

$$\approx 4 \text{ keV} \left( \frac{E_e}{10 \text{ TeV}} \right)^2 \left( \frac{B}{1 \text{ mG}} \right). \quad (6.64)$$

これが、Koyama et al. (1995), Nature, 378, 255, “Evidence for shock acceleration of high-energy electrons in the supernova remnant SN1006” で引用されている式。

Koyama et al. (1995) は、ASCA 衛星を用いて、超新星残骸 SN1006 のシェル部分から、非熱的なエネルギースペクトル (=power-law で表され、輝線がない) を観測した。これをシンクロトロン放射と考え、典型的に超新星残骸中の磁場強度を 6–10  $\mu\text{G}$ 、X 線スペクトルは  $\sim 20 \text{ keV}$  まで伸びていることから、電子エネルギーは 200 TeV 以上と見積った。それまで高エネルギーの宇宙線 (cosmic-ray) は超新星残骸中の衝撃波面で加速されているという説はあったが、それを直接検証することはできなかった。ASCA の SN1006 の観測が初めて、(間接的にはあるが) 超新星残骸中の粒子加速の証拠を示した。

### 6.7.3 “Equipartition” condition

シンクロトロン放射によって単位時間、単位体積から放出されるエネルギー  $S$  [ $\text{erg/s/cm}^3$ ] は、電子密度を  $N_0$  [ $\text{cm}^{-3}$ ] とすると、式 (6.63) より、

$$S \propto N_0 \gamma^2 U_B.$$

一方、電子のエネルギー密度は  $U_e \propto N_0 \gamma$ 、磁場のエネルギー密度は  $U_B \approx B^2$  で、全エネルギー密度は、 $U = U_e + U_B$ 。特定の振動数に注目したとき、式 (6.62) より  $\gamma \propto B^{-1/2}$  の関係がある。よって、

$$S \propto N_0 \gamma \gamma B^2 \propto N_0 \gamma B^{3/2} \propto U_e U_B^{3/4}.$$

全エネルギー密度  $U$  は一定として、 $U_e$  と  $U_B$  にどういう割合でエネルギーを分配したら、シンクロトロン放射エネルギー  $S$  が最大になるかを考える。

$$S \propto (U - U_B) U_B^{3/4}$$

$$\frac{\partial S}{\partial U_B} \propto \frac{1}{4} U_B^{-1/4} (-7U_B + 3U) = 0.$$

よって、 $U_B = \frac{3}{7}U$ 、 $U_e = \frac{4}{7}U$  のときに、 $S$  が最大になることがわかる。これはおおざっぱに、 $U_B \approx U_e$  と考えても良い。つまり、**磁場のエネルギー密度と電子のエネルギー密度がほぼ等しいとき、そこからのシンクロトロン放射のエネルギーは最大になる。**

あるいは逆に、シンクロトロン放射が観測されたとき、そこでは**磁場のエネルギー密度と電子のエネルギー密度がほぼ等しくなっている (equipartition) 可能性が高い。** 限られた観測量から天体のパラメーターを見積もるとき、equipartition の条件を仮定することが多い。

### 6.7.4 ローレンツ変換と相対論的な逆コンプトン散乱

実験室系での入射光子の振動数を  $\nu$ 、電子の静止系での入射光子の振動数を  $\nu'$  とする。電子は速さ  $v$  を持ち、 $\beta = v/c$ 、 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ 。実験室系で、電子の進む方向と入射光子方向との間の角を  $\theta$  とすると、ドップラー効果の公式より、

$$\nu' = \nu \gamma (1 - \beta \cos \theta). \quad (6.65)$$

電子の静止系で、 $h\nu' \ll m_e c^2$  とすると、この系ではトムソン散乱と考えられて、振動数(エネルギー)は散乱の前後で変化しないので、散乱後の振動数も  $\nu'$ 。電子の静止系で、電子の進む方向と散乱光子方向との間の角を  $\theta'$  とすると、実験室系での散乱後の振動数  $\nu''$  は、

$$\nu'' = \nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta'). \quad (6.66)$$

$\theta$  も  $\theta'$  も  $\sim \pi/2$  程度なので、結局上の二つの式から、

$$\nu'' \sim \gamma^2 \nu \quad (6.67)$$

となる。**相対論的電子による一回の逆コンプトン散乱で、入射光子のエネルギーは  $\gamma^2$  倍になる。**

エネルギー  $mc^2 \gamma$  の一つの電子がコンプトン散乱によって単位時間に放出するエネルギーの割合 [erg/s]:

$$P_{\text{compt}} = \frac{4}{3} \sigma_{TC} \beta^2 \gamma^2 U_{ph} \quad (6.68)$$

ここで、 $U_{ph}$  は光子のエネルギー密度。

(6.63) と (6.68) から、低エネルギー光子(エネルギー密度  $U_{ph}$ )、磁場(エネルギー密度  $U_B$ )、高エネルギー電子が共存しているとき、その高エネルギー電子がシンクロトン放射で放出するエネルギーと、低エネルギー光子を逆コンプトン散乱して放出するエネルギーの比は、

$$\frac{P_{\text{synch}}}{P_{\text{compt}}} = \frac{U_B}{U_{ph}}. \quad (6.69)$$

ここで、星間空間の典型的な磁場強度、 $\sim 3\mu\text{Gauss}$  を考えると、

$$U_B \approx (3 \times 10^{-6})^2 / (8\pi) \sim 3.6 \times 10^{-13} \text{ [erg/cm}^3] \sim 0.22 \text{ [eV/cm}^3]. \quad (6.70)$$

一方、宇宙背景黒体放射を考えると (p.89 の脚注)、 $U_{ph} \approx 0.26 \text{ eV}$ 。つまり、**星間空間に高エネルギー電子が存在するとき、そのシンクロトン放射によるエネルギー放射率と、宇宙背景黒体放射の光子を逆コンプトンで叩き上げて出る逆コンプトン放射によるエネルギー放射率は、ほぼ等しい。**

### 6.7.5 超新星残骸 RXJ 1713.7–3946 の例

超高エネルギーに加速された電子 ( $\sim 100 \text{ TeV}$ ) によるシンクロトン放射と逆コンプトン散乱を起こしていると考えられている天体の一つに、超新星残骸 RXJ 1713.7–3946 (Aharonian et al. A&A 2006, 449, 223 and references therein) がある<sup>19</sup>。超新星のシェル部分で加速された電子の出すシンクロトン放射が X 線で観測され、その電子が背景の宇宙黒体放射の光子を逆コンプトンで叩きあげ、TeV ガンマ線で観測される。X 線と TeV ガンマ線のイメージがよく相関していることから (下左図)、同じ電子が両方の放射を担っていると考えられる。

上右図のスペクトルから、以下を読み取れる。

<sup>19</sup>TeV ガンマ線を宇宙背景放射の逆コンプトン散乱で説明するモデルの他に、陽子の  $\pi^0$  崩壊による ( $pp \rightarrow \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ) と考えるモデルもある。

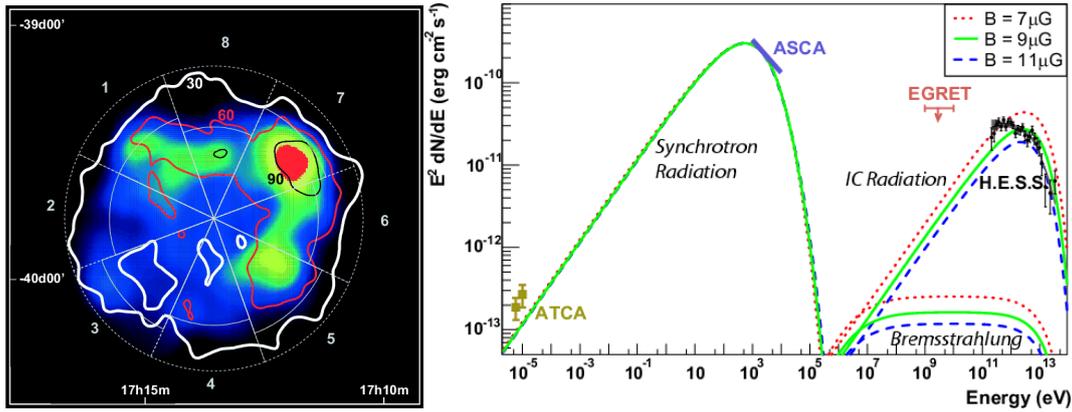


Figure 6.11: 左は ASCA のイメージ (1–5 keV) と HESS による TeV ガンマ線強度のコントア。北西のシェルに沿って X 線とガンマ線が光っているの、そのシェル中で電子加速が起きていると考えられている。右は、電波 (ATCA)、X 線 (ASCA)、ガンマ線 (HESS) のエネルギースペクトルとそれを説明するモデル。仮定した電子のエネルギー分布は、ベキが  $p = 2$ 、exponential cut-off energy=100 TeV。縦軸の単位に注意 (いわゆる  $\nu f(\nu)$  プロット、あるいは  $EF(E)$  プロット)。

1. 電子の cut-off energy = 100 TeV なので、 $mc^2\gamma \approx 100$  TeV より、 $\gamma \sim 2 \times 10^8$ 。一方、2.7 K の黒体放射の単位周波数あたりの放射のピークエネルギーは、 $\sim 2.8kT$  にくるから (式 6.19)、典型的な光子エネルギーは、 $\sim 2.7 \times 2.8/11604 = 7 \times 10^{-4}$  eV。式 (6.67) にあるように、逆コンプトン散乱によって光子のエネルギーは  $\gamma^2$  に叩き上げられるから、 $7 \times 10^{-4} \times (2 \times 10^8)^2 \sim 30$  TeV となり、TeV 領域で観測されるガンマ線が逆コンプトン散乱で説明できる。
2. X 線のエネルギー：式 (6.64) に従い、100 TeV の電子が  $\sim 10\mu\text{G}$  の磁場中で放出するシンクロトロンスペクトルのピークは、 $\sim 4$  keV。よって、ASCA で観測した X 線領域 (1–10 keV) より下では power-law で、ASCA のバンドより上では急激に落ちるシンクロトロンエネルギースペクトルを理解できる。
3. 電子は (6.32) で表わされる power-law 分布、 $\propto E^{-p}$  に従い、 $p = 2$ 。(6.34) より、シンクロトン放射と逆コンプトン散乱の「エネルギースペクトル」のベキは  $(2-1)/2 = 0.5$  (縦軸を [erg/s/cm<sup>2</sup>/keV] で表わしたとき、 $\propto E^{-0.5}$ )。ここでは縦軸にもう一つエネルギーを掛けて、 $\nu f(\nu)$  プロット ([erg/s/cm<sup>2</sup>]) で表わしているから、各成分のベキは  $\propto E^{0.5}$  (右上がりの部分)。
4. いわゆる  $\nu f(\nu)$  プロットの便利な点は、横軸 (エネルギー) を対数で表わしたとき、スペクトルをエネルギーの対数で積分したら、そのエネルギー範囲で放射されるエネルギーになること。実際、 $dN/dE$  を光子スペクトル [photons/s/cm<sup>2</sup>/keV] とすると、 $\nu f(\nu)$  は  $E^2 dN/dE$  [keV/s/cm<sup>2</sup>] と書いて、

$$\int E^2 \frac{dN}{dE} d(\log E) = 0.434 \int E^2 \frac{dN}{dE} d(\ln E) = 0.434 \int E dN \text{ [erg/s/cm}^2\text{]}.$$

つまり上右図で、二つの「山」型の面積が、それぞれシンクロトン放射のエネルギー、逆コンプトン散乱 (IC Radiation) のエネルギーになる。その比は、(6.69) で与えられ、

そこで議論したように、星間磁場の強度、 $B \sim 3\mu\text{Gauss}$  ならばほぼ等しくなる。超新星残骸のシェル中では衝撃波により圧縮されて、磁場はそれよりも強くなる(強くなるほど、シンクロトン成分と相対的にIC成分が弱くなる)。ここでは磁場強度はスペクトルフィットのパラメーターで、観測されたシンクロトン成分とIC成分の比より、 $B \sim 9\mu\text{G}$  と見積もられる。