

各[番号]に入る数字または語句を答えよ。番号の後に複数の語句が示されているときは、正しいものを選択せよ。また、説明が求められているところでは、番号を記した後に説明を記述せよ。

各問 3 点、計 165 満点。得点に 100/165 を掛けた値を成績とした。

1 ブラックホール (33 点)

質量 M 、球対象で回転していない天体を考える。その周りの重力場はシュワルツシルドメトリックで表され、十分遠方の観測者が乗っている座標を r, ϕ, t とすると、

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\phi^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 \quad (1)$$

と書ける。 r_s が、質量 M の天体のシュワルツシルド半径であり、それは光速 c 、万有引力定数 G 、 M を用いて、 $r_s = \boxed{2GM/c^2}$ と書ける。太陽についてその値は $\boxed{3}$ km、地球については、 $\boxed{9}$ mm である。

ブラックホール自身は光を出さないわけだが、仮にブラックホールとその周辺の降着円盤を「撮像」したら、降着円盤の中にぽっかりと穴が開いたような「ブラックホールシャドウ」が見えるだろう。ここでは単純に、シュワルツシルド半径をブラックホールシャドウの半径だと考えて、その見かけの広がりを見積もってみよう。私たちの銀河の中心までの距離は 8 kpc であり、そこには質量 370 万 $M_\odot$ のブラックホールが存在する。その見かけ上の広がり、約 $\boxed{9 \times 10^{-6}}$ 秒角である。波長 λ 、基線長 D を持つ電波干渉計において、その位置分解能をおおまかに λ/D で見積もることが出来る。波長 $\lambda = 1\text{cm}$ の電波で観測するとき、 $D = \boxed{2 \times 10^5}$ km であれば、原理的にそのようなブラックホールを分解できることになる。実際、そのような電波干渉計が提案されており、より短い観測波長、より長い基線長を目指して開発が進められている。

ニュートン力学では、質量 M の天体の周りの安定円軌道について、その最小半径は存在しない。一方、一般相対性理論ではブラックホールの周りの質点の運動を解くと安定な円軌道の最小半径 (Innermost Stable Circular Orbit; ISCO) が、ブラックホールの角運動量 a ($0 \leq a \leq 1$) の関数として得られる。回転していないブラックホールの周辺、シュワルツシルド時空の場合 ($a = 0$)、 $R_{ISCO} = \boxed{3r_s = 6GM/c^2}$ である。ブラックホールの回転と円運動の方向が一致しているときは、 a とともに R_{ISCO} は減少し、角運動量最大 ($a = 1$) のとき、 $R_{ISCO} = \boxed{0.5 r_s = GM/c^2}$

である。

無限遠から質量 m の物質が角運動量を受けて (渦を巻いて) 落ち込んでいき、降着円盤を作り、最終的に R_{ISCO} に達すると考える。簡単のためにニュートン力学で考えると、その場における全エネルギーを G, M, m, R_{ISCO} を用いて、 $E = \boxed{-\frac{GMm}{2R_{ISCO}}}$ と書ける。よつ

て、単位時間あたり $\dot{m}$ の質量の物質が落ちるとき、円盤の光度は、 $L_{disk} \approx \boxed{\frac{GM\dot{m}}{2R_{ISCO}}}$

となる。 R_{ISCO} として、シュワルツシルドブラックホールの場合、極端なカーブラックホール ($a = 1$) の場合、それぞれについて $\boxed{6GM/c^2}$ 、 $\boxed{GM/c^2}$ を代入し、

$$L_{disk} \approx \boxed{0.083} \dot{m} c^2 \quad (\text{Schwarzschild black hole}) \quad (2)$$

$$L_{disk} \approx \boxed{0.5} \dot{m} c^2 \text{ (Extreme Kerr black hole)} \quad (3)$$

が得られる。厳密に、一般相対論的な計算によると上記の係数（エネルギー効率）はそれぞれ、 $1 - \sqrt{8/9} \approx 0.057$, $1 - \sqrt{1/3} \approx 0.42$ であるが、ニュートン近似でも大まかな値が見積もれることがわかる。

一方、熱核融合反応の時、水素が鉄に達するまでの平均で、エネルギー効率は 0.009 である。**ブラックホールへ物質が落ち込む際の重力エネルギーの解放が非常に効率的である**ことを理解しよう。

2 エディントン限界光度と黒体輻射 (12 点)

κ_T をトムソン散乱による質量吸収係数 ($\sim 0.4 \text{ cm}^2/\text{g}$) とする。質量 M の天体が球対象で X 線放射をしているとき、そのエディントン限界光度 L_{Edd} を導出し、 c, G, M, κ_T で表せ。ただし、元素は水素のみを仮定する。

半径 r において、水素原子（質量を m_H とする）一個について重力と輻射圧が釣り合う条件より、

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_T}{c} \frac{L_{Edd}}{4\pi r^2} &= \frac{GMm_H}{r^2}, \\ L_{Edd} &= \frac{4\pi cGM}{\sigma_T/m_H} \\ &= \boxed{\frac{4\pi cGM}{\kappa_T}}. \end{aligned}$$

具体的な数字を入れると、

$$L_{Edd} \approx \boxed{10^{38}} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) [\text{erg/s}] \quad (4)$$

である。これから、質量 $1M_\odot$ 、半径 10km の中性子星がエディントン限界光度で黒体輻射をしているとき、その温度は $\boxed{\text{約 } 2} \text{ keV}$ となる。これは典型的な X 線バーストに対応する。また、質量 $1M_\odot$ 、半径 5000 km の白色矮星がエディントン限界光度で黒体輻射をしているとき、その温度は $\boxed{0.08} \text{ keV}$ となる。ここで、ステファンボルツマン係数、 $\sigma \approx 1 \times 10^{24} \text{ erg/s/cm}^2/\text{keV}^4$ を用いよ。非常に低温のスペクトルを持つ Super-soft Source の起源は、そのような黒体輻射をしている白色矮星だと考えられている。

3 降着円盤 (36 点)

質量 M のブラックホールの周りの、光学的に厚い標準降着円盤を考える。物質は質量降着率 $\dot{M}$ でブラックホールに落ちていくとする。物質が dr 落ちる間に解放される重力エネルギーの半分が熱化され、ディスクの両面から黒体輻射で放出されると考えると、ディスクの温度の半径依存性は、 $G, M, \dot{M}, \sigma$ を用いて、

$$T(r) \approx \left(\frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4} \quad (5)$$

と書ける。ただし、ここでは内縁の境界条件を無視して単純化している。これを、内縁半径を r_{in} 、温度を T_{in} として、

$$T(r) = T_{in}(r/r_{in})^{\boxed{-3/4}} \quad (6)$$

と書く。ディスクの両面が黒体輻射をしていることを考慮し、 r_{in} から $r_{out}(\gg r_{in})$ まで積分し、ディスクの光度は、 σ, r_{in}, T_{in} を用いて、

$$L_{disk} \approx \boxed{4\pi\sigma r_{in}^2 T_{in}^4} \quad (7)$$

と表される。

降着円盤の内縁が、前節で述べた R_{ISCO} だとしよう。また、降着円盤はエディントン限界光度を仮定する。すると、降着円盤の内縁半径は質量 M だけの関数となり、シュワルツシルド時空（回転していないブラックホール）の場合は、

$$T_{in} \approx \boxed{1} \text{ keV} \left(\frac{M}{10M_{\odot}} \right)^{-1/4} \quad (8)$$

となる。よって、最大光度（エディントン限界）で光っている質量 $\sim 10M_{\odot}$ のブラックホールの周りの降着円盤は、 $\boxed{\text{約 } 1} \text{ keV}$ の温度を持つので、X線領域で観測されることがわかる。ブラックホールの質量が大きいほど、降着円盤の温度が $\boxed{\text{低く}}$ なることに注意。たとえば、太陽の 10^9 倍の質量を持つ巨大ブラックホールの降着円盤の温度は $\boxed{\text{約 } 10} \text{ eV}$ となり、これは $\boxed{\text{紫外線領域}}$ で観測される。

回転しているブラックホールの場合は、 R_{ISCO} が $\boxed{\text{小さく}}$ なるので、同じ円盤光度に対して、 T_{in} の値は、 $\boxed{\text{高く}}$ なる。実際、質量がわかっているブラックホールに対し、その円盤光度と T_{in} の測定から R_{ISCO} を見積もり、ブラックホールのスピンの制限を与える試みが行われている。

なお、厳密にはディスク放射スペクトルは黒体輻射ではなく、その色温度と有効温度の違いを考慮する必要がある。ディスクの表層の高温電子によるコンプトン効果のために、ディスク放射の色温度は有効温度よりも $\boxed{\text{高く}}$ なっている。それに気づかずに、ディスク放射を黒体輻射と思ってブラックホールの質量を見積もると、それは実際の質量よりも $(T_{col}/T_{eff})^2$ だけ $\boxed{\text{小さく}}$ なってしまうので、注意が必要である。

理論的には、 T_{col}/T_{eff} の値はディスクの光度や半径に依らず、ほぼ ~ 1.7 で一定である。この値を用いて、ブラックホール連星について、X線観測から見積もったブラックホール質量と、軌道運動の測定から求められた、より信頼できる質量との間に、良い一致が見られる。

4 人工衛星による観測と季節の関係 (24 点)

宇宙からの X 線は大気によって吸収されるため、観測には人工衛星を用いる必要がある。人工衛星の姿勢はオイラー角で表される。衛星の座標軸やオイラー角にはさまざまな定義があるが、ここでは宇宙科学研究所の X 線天文衛星に倣って、望遠鏡の指向方向を Z 軸とし、太陽パネルが Y 軸方向に配置しているとする。また、初期姿勢を、天の北極を衛星の Z 軸、春分点を X 軸が指している状態と定義する。Z 軸、Y 軸、Z 軸のまわりに順に回転した 3 つの角、 (ϕ, θ, ψ) の組が、衛星の姿勢を表すオイラー角である。

黄北極 (North Ecliptic Pole; NEP) は一年中観測できるので、ポピュラーな領域である。季節によって、NEP を観測するためのオイラー角を考えてみよう。NEP の赤経、赤緯は、天球上の X 軸が春分点、Z 軸が天の北極を向いている状態から、X 軸の周りに $23.^\circ 4$ 回転したときに新たな Z 軸が向く方向だから、 $(\alpha, \delta) = (\boxed{270^\circ}, \boxed{66^\circ.6})$ で与えられることはわかるだろう。これ衛星の Z 軸になることから、最初の二つのオイラー角は決まり、 $\phi = \boxed{270^\circ}, \theta = \boxed{23^\circ.4}$

である。衛星の Z 軸、Y 軸の周りに連続してこの二つの回転をおこなった時点で、衛星の Y 軸は春分点を向いている事に注意しよう。Z 軸の回りの第三オイラー角 ψ の回転によって、Y 軸は太陽と同じ向きに黄道上を移動する。よって、太陽パネル (衛星の +Y 軸方向) が太陽の方向を向くという条件は、以下のような事を理解しよう¹。
 春分のとき $\psi = 0^\circ$ 、夏至のとき $\psi = 90^\circ$ 、秋分のとき $\psi = 180^\circ$ 、冬至のとき $\psi = 270^\circ$ 。

5 熱制動輻射の特徴 (30 点)

X 線天体が連続 X 線を放出する代表的なメカニズムとして、すでに述べた黒体輻射の他に、熱制動輻射、シンクロトロン輻射、逆コンプトン散乱がある。ここでは、熱制動輻射の特徴について考えてみよう。

5.1 広範囲 (Broad band) のエネルギースペクトル

熱制動輻射の広範囲にわたるエネルギースペクトルを、同じ温度をもつ黒体輻射のスペクトルと比較してみると、熱制動輻射の広がりの方が大きいことがわかる。特に熱制動放射のほうが、低エネルギー側に裾を引く。これは、熱制動放射において、わずかな軌道を曲げられる電子が低エネルギーの電磁波を放射するとして理解できる。

5.2 熱制動輻射の輻射効率の低さ

講義で述べたように、熱的な放射の強度は黒体輻射を超えない。X 線天文学の非常に初期の時代、Sco X-1 など $\sim 10^{38}$ erg/s という大きな光度を示す X 線天体の正体がまだ謎だったころ、そのスペクトルの形が熱制動輻射と良く似ていて、それが可視光や赤外線のスpectrumも説明できる、というモデルがあった。このモデルを検証してみよう。熱制動輻射の輻射効率は、

$$\int \epsilon_{\nu}^{ff} d\nu = 2.4 \times 10^{-27} T^{1/2} n_e^2 \text{ [erg s}^{-1} \text{ cm}^{-3}] \quad (9)$$

で与えられる。ただし、ここで温度 T は [K]、電子密度 n_e は cm^{-3} という単位で表す。これより、 $T = 2 \times 10^7$ K (~ 2 keV) として、観測された光度 $\sim 10^{38}$ erg/s を説明するにはエミッションメジャー、 $n_e^2 V \approx 10^{61} \text{ [cm}^{-3}]$ が必要になる。高密度なプラズマでも、密度は $\sim 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ なので、 $V \approx 10^{31} \text{ cm}^3$ となり、輻射領域の大きさは $R \approx 10^{10} \text{ cm}$ 。これは中性子星の半径、 $\sim 10^6 \text{ cm}$ よりはるかに大きい。つまり、端的に言って、**光学的に薄い熱制動輻射で大きな光度を稼ぐには、大きな体積が必要。中性子星のように小さな領域が熱的な輻射で十分明るく輝くためには、光学的に厚い輻射 (黒体輻射) しかあり得ない**²。

一方、白色矮星と晩期型星の連星系である激変星 (Cataclysmic Variable) から、 ~ 10 keV の高温熱輻射が観測されている。高温プラズマに特徴的な鉄輝線も観測されており、その起源が光学的に薄い熱制動輻射であることは間違いない。 $R \sim 10^8 \text{ cm}^2$, $n_e \sim 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, $T \sim 10^8 \text{ K}$ とすると、式 (9) より激変星の光度は 10^{31} erg/s となる。白色矮星より二桁小さく一桁低温である黒体輻射をしている中性子星のほうが、**7**桁も光度が大きいことに注意しよう。

¹これを間違えると、太陽電池パネルに陽が当たらずに、衛星が死ぬことになる！

²シンクロトロンのような比熱的な輻射の場合は、小さな領域でも明るく輝くことができる。

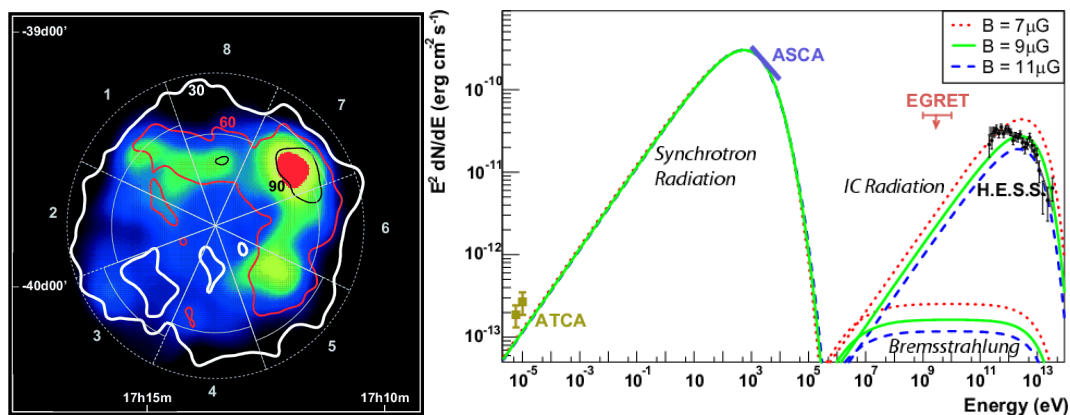


Figure 1: 左は ASCA のイメージ (1–5 keV) と HESS による TeV ガンマ線強度のコントア。北西のシェルに沿って X 線とガンマ線が光っているので、そのシェル中で電子加速が起きていると考えられている。右は、電波 (ATCA)、X 線 (ASCA)、ガンマ線 (HESS) のエネルギースペクトルとそれを説明するモデル。仮定した電子のエネルギー分布は、ベキが $p = 2$ 、exponential cut-off energy = 100 TeV。縦軸の単位に注意 (いわゆる $\nu f(\nu)$ プロット、あるいは $EF(E)$ プロット)。

5.3 熱プラズマからの輝線放射

ここまでの熱制動放射の議論では電子とイオンの間の再結合を考えていなかったもので、実は非現実的である。実際には、熱プラズマ中でイオンと電子は電離と再結合を繰り返し、それによってたくさんの輝線が放射される。そのようなプラズマからの複雑なエネルギースペクトルを計算するのは容易ではないが、XSPEC などの標準的なスペクトル解析ツールに、プラズマからの熱放射のモデルが組み込まれていて、観測データとの比較 (フィッティング) が簡便に出来るようになっている。

6 相対論的な電子によるシンクロトロン放射と逆コンプトン放射 (30 点)

6.1 超新星残骸 RXJ 1713.7–3946 の例

超高エネルギーに加速された電子 (~ 100 TeV) によるシンクロトロン放射と逆コンプトン散乱を起こしていると考えられている天体の一つに、超新星残骸 RXJ 1713.7–3946 がある³。超新星のシェル部分で加速された電子の出すシンクロトロン放射が X 線で観測され、その電子が背景の宇宙黒体放射の光子を逆コンプトンで叩きあげ、TeV ガンマ線で観測される。X 線と TeV ガンマ線のイメージがよく相関していることから (Figure 1、左)、同じ電子が両方の放射を担っていると考えられる。Figure 1(右) のスペクトルから、以下を読み取れる。

1. 電子の cut-off energy = 100 TeV なので、 $mc^2\gamma \approx 100$ TeV より、 $\gamma \sim 2 \times 10^8$ 。一方、2.7 K の黒体放射の単位周波数あたりの放射のピークエネルギーは、 $\sim 2.8kT$ にくるから、宇宙背景放射の典型的な光子エネルギーは、 7×10^{-4} eV。相対論的な電

³TeV ガンマ線を宇宙背景放射の逆コンプトン散乱で説明するモデルの他に、陽子の π^0 崩壊による ($pp \rightarrow \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$) と考えるモデルもある。

子の逆コンプトン散乱によって光子のエネルギーは γ^2 倍に叩き上げられるから、それは $\boxed{30 \text{ T}}$ eV となり、観測されたガンマ線が逆コンプトン散乱で説明できる。

2. エネルギー $mc^2\gamma$ を持つ相対論的電子が、磁場 B の中で、磁場と電子の運動の向きのなす角度 (ピッチ角) α で磁力線に巻き付いてらせん運動をするとき、発せられるシンクロトロン輻射スペクトルのピークを与える振動数は、

$$0.29\nu_c = 0.29 \frac{3\gamma^2 eB \sin \alpha}{2\pi m_e c}. \quad (10)$$

で与えられる。ここで、0.29 という係数と ν_c の標式は、標準的な教科書に倣った。具体的な磁場 B 、電子エネルギー E_e について、シンクロトロン放射スペクトルのピークエネルギー E_p を求めてみよう。ここで、ボーア磁子 $\hbar e/2mc = 9.3 \times 10^{-21} \text{ erg/gauss}$, $\gamma \approx \boxed{2 \times 10^7} (E_e/10 \text{ TeV})$ を用いる。

$$\begin{aligned} E_p &= 0.29 \times h\nu_c \approx 0.29h \frac{3\gamma^2 eB}{2\pi mc} = 0.29 \times 6\gamma^2 B \frac{\hbar e}{2mc} \\ &\approx \boxed{4 \text{ k}} \text{ eV} \left(\frac{E_e}{100 \text{ TeV}} \right)^2 \left(\frac{B}{10 \mu\text{G}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

式 (11) から、最高エネルギー $\sim 100 \text{ TeV}$ まで power-law で分布している電子が $10 \mu\text{G}$ の磁場中にあるとき、そこから放射されるシンクロトロンエネルギー Spektrum は、ASCA で観測した X 線領域 (1–10 keV) より下では power-law で、ASCA のバンドより上では急激に落ちることを理解できる。

3. 電子のエネルギー分布は $\sim 100 \text{ TeV}$ 以下では $N(E)dE \propto \gamma^{-p} d\gamma$ という power-law で表され、ここでは $p=2$ を仮定している。それによるシンクロトロン放射と逆コンプトン散乱のエネルギー Spektrum (縦軸を $[\text{erg/s/cm}^2/\text{keV}]$ で表わす) は、 $\propto E^{-(p-1)/2}$ で表されることがわかっている。ここでは、縦軸にもう一つエネルギーを掛けて、 $\nu f(\nu)$ プロット ($[\text{erg/s/cm}^2]$) で表わしているから、各成分の Spektrum は $\propto E^{\boxed{0.5}}$ となる (Figure1 右の Spektrum 中、右上がりの部分)。
4. いわゆる $\nu f(\nu)$ プロットの便利な点は、横軸 (エネルギー) を対数で表わしたとき、Spektrum をエネルギーの対数で積分したら (= Spektrum の「山」の面積)、そのエネルギー範囲で放射されるエネルギーになることである。それを説明せよ $\boxed{\text{以下の通りの説明}}$ 。ここで、Spektrum の縦軸は $E^2 dN/dE$ で示されている。 dN/dE は単位エネルギーあたりの光子数。

$$\int E^2 (dN/dE) d(\log E) \propto \int E (dN/dE) dE \propto \int E dN$$

だから、これは積分範囲に放出されるエネルギーに等しい。

5. Figure1 の右図で、左側の「山」の面積がシンクロトロン放射のエネルギー、右側の山が逆コンプトン散乱 (IC Radiation) のエネルギーになる。その比は、 $\boxed{\text{磁場のエネルギー密度: 低エネルギー光子のエネルギー密度}}$ で与えられ、星間磁場の強度が $B \sim 3 \mu\text{Gaus}$ のときに、ほぼ等しくなる。超新星残骸のシェル中では衝撃波により圧縮されて、磁

場はそれよりも強くなる (強くなるほど、シンクロトロン成分と相対的に IC 成分が弱くなる)。ここでは磁場強度は、観測されたシンクロトロン成分と IC 成分の比より、 $B \sim 9\mu\text{G}$ と見積もられた。

以上。