東京大学教養学部 (前期過程) 2008 年度冬学期 宇宙科学 II (担当教官 海老沢 研)

試験問題および解答

2008 年 2 月 2 日 17:00 – 18:30

150 点満点

以下の四角の中に入る数値、数式、または語句を解答用紙に記入せよ。有効数字が指定されている時はそれに従うこと。

問 **1.** プランク時間、プランク長、プランク質量 **(**各 **2** 点、計 **20** 点**)**

以下の (1),(3),(5),(7) には式を、(2),(4),(6),(8),(9),(10) には数値を有効数字一桁で入れること。

自然界を記述する，もっとも基本的な定数は万有引力常数 G、光速 c、プランク定数 h であり、これらの値は以下の通りである。

$$G = 6.6726 \times 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2}\ (\mathrm{m^3/kg/s^2})$$
$$c = 2.9979 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$$
$$h = 6.62607 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s} \quad (\mathrm{kg{\cdot}m^2/s})$$

ただし、h を 2π で割った、$\hbar$ が良く使われる。

$$\hbar = 1.05457 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s} \quad (\mathrm{kg{\cdot}m^2/s})$$

この $G, c, \hbar$ を組み合わせて、単位 (次元) に注意して、時間、長さ、質量、さらに密度の単位を持つ物理量を作ってみる。これらが、プランク時間、プランク長、プランク質量、プランク密度である。

$$Planck\ Time = \boxed{\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}} = \boxed{5 \times 10^{-44}}\ [\mathrm{sec}] \tag{1}$$

$$Planck\ Lengh = \boxed{\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}} = \boxed{2 \times 10^{-35}}\ [\mathrm{m}] \tag{2}$$

$$Planck\ Mass = \boxed{\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}} = \boxed{2 \times 10^{-8}}\ [\mathrm{kg}] \tag{3}$$

$$Planck\ Density = \boxed{\frac{c^5}{\hbar G^2}} = \boxed{5 \times 10^{93}}\ [\mathrm{g/cm^3}] \tag{4}$$

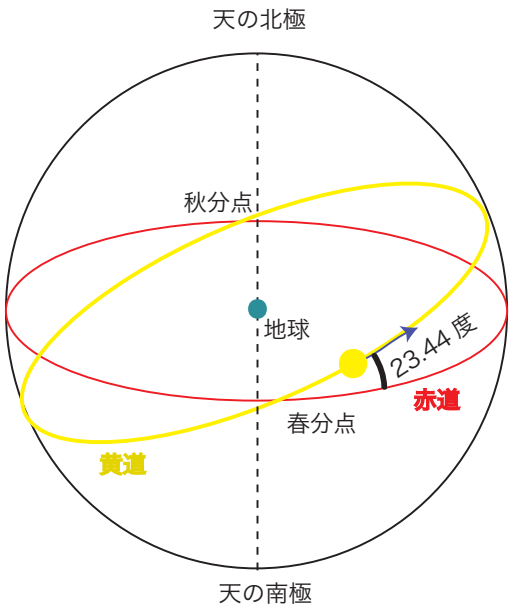
宇宙の誕生直後、宇宙年齢がプランク時間のころ、宇宙の大きさはプランク長程度で、その密度はプランク密度程度だったのであろう。それ以前の宇宙の姿を、現代の物理学で記述することはできない。我々が知る事ができるのは、それ以後の宇宙の姿である。

仮想的に、プランク長をシュワルツシルド半径とする粒子 (「プランク粒子」) を考えると、その質量がプランク質量に対応する。陽子の質量は、約 1.7×10^{-27} kg、大きさ (コンプトン波長) は、約 1.3×10^{-15} m である。これと比較するとプランク粒子の質量は $\boxed{1 \times 10^{19}}$ 倍、大きさは $\boxed{2 \times 10^{-20}}$ 倍である。プランク粒子は現実の素粒子よりもはるかに小さくてはるかに重い事に注意しよう。ちょうどブラックホー

ルが、現実の素粒子から構成されている星よりもはるかに小さくてはるかに重いように。

問 2. 座標変換、人工衛星の姿勢 (各 1 点、計 31 点)

以下の四角の中の数字を埋めよ。有効数字は 4 桁とする。



天球上で、太陽が通る道を黄道と呼ぶ。春分の日に太陽は春分点に、秋分の日に秋分点にいるが、上図のように天の赤道と黄道は春分点と秋分点で交わり、黄道は赤道に対して 23.44 度傾いている。赤道座標に基づいた (x,y,z) 軸と、黄道座標に基づいた (x',y',z') 軸を考える。x 軸、x' 軸は春分点を指し、z 軸は天の北極を指している。(x,y,z) 軸を x 軸の周りに θ 回転すると、$x'y'z'$ 軸が得られ、z' 軸は黄道の北極を指すことになる。

xyz 系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y}, \boldsymbol{e_z}$,$x'y'z'$ 系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e'_x}, \boldsymbol{e'_y}, \boldsymbol{e'_z}$ とする。天球上のある点の方向ベクトルを $\boldsymbol{p}$、その赤道座標での成分を (x,y,z), 黄道座標での成分を (x',y',z') とすると、

$$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y}, \boldsymbol{e_z}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e'_x}, \boldsymbol{e'_y}, \boldsymbol{e'_z}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{5}$$

である。方向ベクトルの黄道座標における成分から赤道座標における成分への変換は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0.9175} & \boxed{-0.3978} \\ \boxed{0} & \boxed{0.3978} & \boxed{0.9175} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{6}$$

で与えられる．

黄北極 (North Ecliptic Pole; NEP)、黄南極 (South Ecliptic Pole; SEP) を考えてみよう。NEP の黄道座標における方向ベクトルは、$(x',y',z')=(0,0,1)$,SEP の方向ベクトルは $(0,0,-1)$ である。これと (6) より、赤道座標における NEP の方向ベクトルは $(x,y,z)=(\boxed{10},\boxed{\text{-}0.3978},\boxed{0.9175})$、SEP の方向ベクトルは、$(\boxed{0},\boxed{0.3978},\boxed{\text{-}0.9175})$ となる。これから、NEP の赤経、赤緯は $(\boxed{270^\circ},\boxed{66.^\circ56})$、SEP の赤経、赤緯は $(\boxed{90^\circ},\boxed{\text{-}66.^\circ56})$ である。

天文衛星を使って空を観測することを考えよう。一般に人工衛星の姿勢はオイラー角を用いて記述されるが、ここでは、衛星の X 軸が春分点を、Z 軸が天の北極を向いているときを初期姿勢として、Z 軸の回りに ϕ、Y 軸の回りに θ、Z 軸の回りに ψ の順に回転させたときのオイラー角 (ϕ,θ,ψ) で衛星の姿勢を記述することにしよう。なお、JAXA 宇宙科学本部のほとんどの科学衛星がそうであるように、+Y 軸の方向に太陽パネルがついていて、+Z 軸の方向に観測装置が向いているとする。人工衛星の太陽パネル (+Y 方向) は常に太陽を向いていなくてはいけないが、NEP, SEP は、太陽とちょうど 90 度離れているので、季節によらず常に観測できる。

各季節において、NEP, SEP を観測する際のオイラー角は以下の通りである。

	NEP	SEP
春分	$(\boxed{270},\boxed{23.34},\boxed{0})$	$(\boxed{90},\boxed{156.56},\boxed{180})$
夏至	$(\boxed{270},\boxed{23.34},\boxed{90})$	$(\boxed{90},\boxed{156.56},\boxed{90})$
秋分	$(\boxed{270},\boxed{23.34},\boxed{180})$	$(\boxed{90},\boxed{156.56},\boxed{0})$
冬至	$(\boxed{270},\boxed{23.34},\boxed{270})$	$(\boxed{90},\boxed{156.56},\boxed{270})$

問 3. 光のドップラー効果 (各 2 点、計 24 点)

以下の四角に式を入れよ。

四次元座標系 K と、それと相対的に等速運動している系 K' を考える。時間 t, 光速 c, 虚数 i を導入し、K 系において $(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv(x,y,z,ict)$ で表される世界点が K' 系においては $(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)\equiv(x',y',z',ict')$ で表されるとする。このように定義した 4 次元時空における直交行列は、等速で相対運動をしている二つの慣性系の間のローレンツ変換を与える。ローレンツ変換によって、二点間の世界間隔は不変である。すなわち、

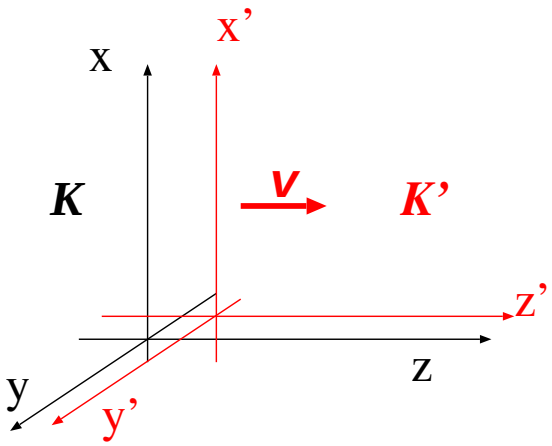
$$s^2\equiv x_1^2+x_2^2+x_1^2+x_4^2=x_1'^2+x_2'^2+x_1'^2+x_4'^2, \tag{7}$$

または

$$s^2\equiv x^2+y^2+z^2-(ct)^2=x'^2+y'^2+z'^2-(ct')^2 \tag{8}$$

である。

具体的なローレンツ変換を考えよう。下図のように K' 系が K 系に対して、+z 軸方向に K 系から見た速度 v で動いているとする。



このとき、K 系における世界座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) と K' 系における世界座標 (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) との間のローレンツ変換は、i, β, γ を用いて

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\gamma} & \boxed{i\gamma\beta} \\ 0 & 0 & \boxed{-i\gamma\beta} & \boxed{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{9}$$

で表される[1]。ここで、

$$\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

である。

ローレンツ変換 (9) によって変換される量を四元ベクトルと呼ぶが、電磁波の伝播を考えるとき、電磁波の波数ベクトルを $\mathbf{k}$ ($|\mathbf{k}| = \omega/c$)、角振動数を ω とすると、

$$(\mathbf{k}, i\omega/c) \tag{10}$$

は四元ベクトルである。よって、

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \\ \omega' i/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\gamma} & \boxed{i\gamma\beta} \\ 0 & 0 & \boxed{-i\gamma\beta} & \boxed{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ \omega i/c \end{pmatrix}. \tag{11}$$

が成立する。

波数の定義から $|\mathbf{k}| = \omega/c$、$|\mathbf{k}'| = \omega'/c$ である。ベクトル $\mathbf{k}$ は yz 平面上にあり、電磁波が進む向きと z 軸、z' 軸のなす角をそれぞれ θ, θ' とすると、$k_y = (\omega/c)\sin\theta$、$k'_y = (\omega'/c)\sin\theta'$ $k_z = (\omega/c)\cos\theta$、$k'_z = (\omega'/c)\cos\theta'$ である。よって、(11) で与えら

---

[1] もし忘れたら、行列の直交条件を手がかりにして思いだそう。

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij},\ a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}, x'_i = a_{ij}\,x_j,\ \ x_i = a_{ji}\,x'_j.$$

ここで、同じ添字については 1 から 4 までの和を取る。

れる 4 元ベクトルの変換の第 2,3,4 成分を書きくだすと、

$$\omega' \sin\theta' = \boxed{\omega \sin\theta} \tag{12}$$

$$\omega' \cos\theta' = \boxed{\omega\gamma(\cos\theta - \beta)} \tag{13}$$

$$\omega' = \boxed{\omega\gamma(1 - \beta\cos\theta)} \tag{14}$$

となる。式 (12) と (13) の比を取ると、

$$\tan\theta' = \boxed{\frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}} \tag{15}$$

が得られる。式 (14) は、光のドップラー効果に他ならない。$v \ll c$ のとき、$(v/c)^2$ の項を無視すれば、これは

$$\omega' = \boxed{\omega(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)} \tag{16}$$

となり、音波の場合と同じように、非相対論的なドップラー効果を表す。$(v/c)^2$ の項を無視できないとき、式 (14) で、$\theta = 0$、光源が視線方向と垂直に運動しているときにも波長が変化することに注意。これを横ドップラー効果と呼ぶ。

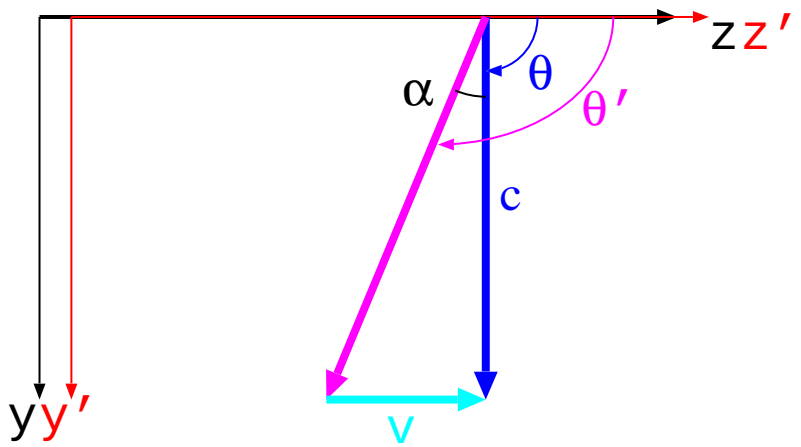
式 (15) は、地球の公転運動によって、星からの光の到来方向が変化する光行差 を説明する。地球の公転面と垂直方向から星の光がやってくるとき、$\theta = 90°$ なので、

$$\tan\theta' = \boxed{-\frac{c}{v}\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \tag{17}$$

である。

$\tan(\theta' - \pi/2) = -1/\tan\theta'$ を使って、$\theta' - \pi/2 = \alpha$ とすると (下図参照)

$$\tan\alpha = \boxed{\frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}} \tag{18}$$



非相対論的には、単純にベクトルの大きさから、

$$\tan\alpha = \boxed{\frac{v}{c}} \tag{19}$$

が得られるが、これは式 (18) で、$(v/c)^2$ の項を無視した場合と一致する。

問 4. ケプラーの第三法則 (各 2 点、計 18 点)

太陽のまわりの惑星の公転運動のような二体問題は解析的に解くことができる。太陽の質量を M, 惑星の換算質量を m, 角運動量を h, 系の全エネルギーを E とすると、惑星の軌道は、

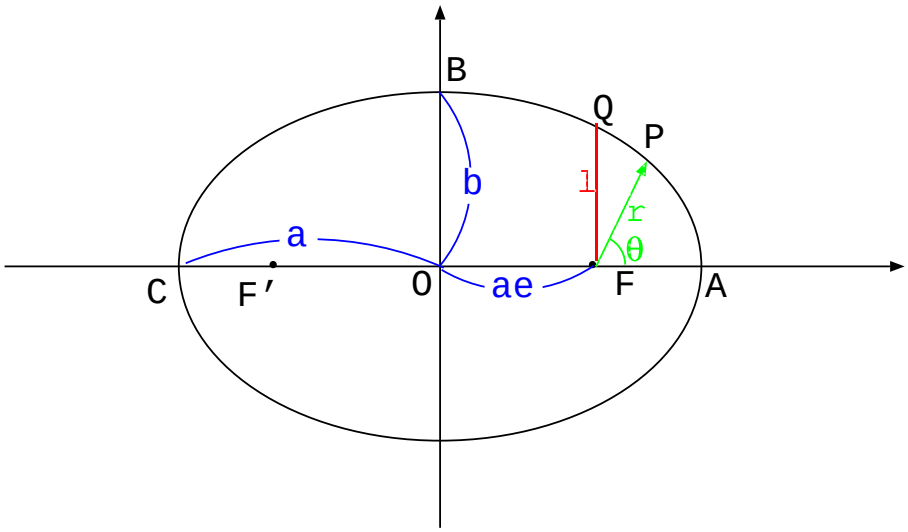
$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}. \tag{20}$$

という楕円で表される。ただし、ここで、

$$l \equiv \frac{h^2}{GMm^2}, \tag{21}$$

$$e \equiv \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2M^2m^3}} \tag{22}$$

である。e は離心率 (楕円のときは < 1)、l は半直弦と呼ばれる。これからケプラーの第三法則を求めてみよう。



楕円の面積を a,b で表すと $\boxed{\pi ab}$ であり、面積速度を h,m で表すと、$\boxed{h/2m}$ である。ケプラーの第二法則より面積速度は一定だから、楕円の面積を面積速度で割ると周期 T が得られ、それを a,b,h,m で表すと $\boxed{2\pi abm/h}$ となる。

一方、楕円上の点は二つの焦点からの距離の和が $\boxed{4}$ で一定である。B 点に注目し、$FB + F'B = \boxed{2a}$ であることから、b を a と e を用いて表すと、$\boxed{a\sqrt{1-e^2}}$ となる。さらに (20) を用いて、e を消去し、b を a と l で表すと、$\boxed{\sqrt{al}}$ となる。l として、(21) を代入すると , T を a と M で表すことができて、$T = \boxed{\sqrt{\frac{4\pi^2a^3}{GM}}}$ が得られる。これが、軌道長半径の $\boxed{3}$ 乗が周期の $\boxed{2}$ 乗に比例する、というケプラーの第三法則に他ならない。

問 5. Global Positioning System (各 3 点、計 27 点)

質量 M の天体のシュワルツシルド半径は $\boxed{2GM/c^2}$ である。地球のシュワルツシルド半径は $\boxed{9}$ [mm] であり、その半径 6400 km よりもはるかに小さいので、地球周辺の物理現象の解釈において、通常は一般相対論の効果を無視しても良い。ただし、GPS (Global Positioning System) においては、人工衛星と GPS 受信機との間の光の伝達時間からその距離を非常に精密に測定しているので、地球上と衛星上の重力の違いによる時間の進み方の違いを考慮する必要がある。

地球の中心から十分遠方の仮想的な観測者の用いる座標を r, t, ϕ とする。地球の中心から半径 r のところ (地表または GPS 衛星) で回転運動している $(dr = 0)$ 観測者の計る固有時間を $d\tau$ とする。シュワルツシルドメトリックを用いて、

$$c^2 d\tau = c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) dt^2 - r^2 d\phi^2 \tag{23}$$

と書ける。よって、

$$\begin{aligned} c^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 &= c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \\ &= c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) - v^2. \end{aligned} \tag{24}$$

ここで、v は観測者の速度である。地球表面の観測者の固有時間を $d\tau \equiv dt_{earth}$、人工衛星上の観測者の固有時間を $d\tau \equiv dt_{satellte}$ とすると、(24) を、地表と GPS 衛星について比を取って、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{satellite}}\right) - (v_{satellite}/c)^2}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{earth}}\right) - (v_{earth}/c)^2}}. \tag{25}$$

この式が、地表における時間と、GPS 衛星における時間の進み方のずれを表す。(25) の右辺の値を求めよう。ここで、地球のシュワルツシルド半径が地球の半径よりもはるかに小さいこと、人工衛星の速度が光速よりもはるかに小さいことを用いて、(25) は以下のように近似できる。

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} = 1 + \boxed{-\frac{GM/c^2}{r_{sat}} - \frac{1}{2}(v_{sat}/c)^2 + \frac{GM/c^2}{r_{earth}} + \frac{1}{2}(v_{earth}/c)^2}. \tag{26}$$

$\frac{2GM/c^2}{r_{satellite}}$ と $\frac{2GM/c^2}{r_{earth}}$、$(v_{satellite}/c)^2$ と $(v_{earth}/c)^2$ はどれも微小な量であるが、(26) は、それらの差が GPS のような精密な測定においては無視できないことを示している。

GPS 衛星の周期が 12 時間ということから、$r_{satellite}$ と $v_{satellite}$ を求めよう。それには、前問で得られたケプラーの第三法則と、地球のシュワルツシルド半径が $\boxed{9\text{mmb}}$ で与えられる事を使えば良い。これによって、

$$r_{satellite} = \boxed{2.7 \times 10^7}\ \text{m}, v_{satellite} = \boxed{3.9 \times 10^3}\ \text{m/s} \tag{27}$$

である。

まず (26) において、$v_{satellite}, v_{earth}$ の項は無視して、重力だけによる時間の進み方の違いをみてみよう。地球の半径は、$r_{earth} \approx 6.4 \times 10^6$ m だから、$r_{satellite}$ と

r_{earth} を代入して、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx 1 + \boxed{5 \times 10^{-10}} \tag{28}$$

が得られる。重力の影響により、この割合で人工衛星上の時計の方が、地表の時計よりも速く進むのである。さらに、人工衛星と地表の運動の速さの違いを考慮しよう。すでに特殊相対論で学んだように、「速く進む時計の時間はゆっくり進む」。よって、人工衛星の速さと地表の速さの違いを考慮すると、時間の進み方のずれは $\boxed{5 \times 10^{-10}}$ よりは小さくなるはずである。地表における自転の速度 v_{earth} は緯度に依存するが、南極、北極では $v_{earth} \approx 0$ だから、ここでは v_{earth} を無視し、$v_{satellite}$ だけを考慮することにしよう。(26), (28) から、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx 1 + \boxed{4 \times 10^{-10}} \tag{29}$$

となる。一日で、このずれは $\boxed{4 \times 10^{-5}}$ 秒になる。その間に、光は $\boxed{11}$ km も進むので、ここで考察したような地表と人工衛星における時間の進み方の違いを考慮しないと、GPS は全く使い物にならないことがわかるだろう。

問 **6.** ポアソン分布 (各 **2** 点、計 **12** 点)

ある天体を X 線で観測するとしよう。その天体からは、1 秒当り平均して 3 個の光子が検出装置に入射するとしよう。時間ビンの幅を 1 秒として、この天体からやってくる 1 ビンあたりの光子数を数えると、それは 3 のまわりに統計的にゆらぐ。1 ビンあたりの光子数が 0, 1, 2, 3, 4 である確率、および 5 以上である確率は、平均 3 のポアソン分布から、それぞれ、$\boxed{0.0498}$,$\boxed{0.149}$,$\boxed{0.224}$,$\boxed{0.224}$,$\boxed{0.168}$,$\boxed{0.185}$ で与えられる。これらを足すと 1 になることを確認しよう。

問 **7.** 検定 (各 **3** 点、計 **18** 点)

あるとき、ある X 線天体を観測していたら、その天体から一秒当りに検出される X 線光子の数は、平均 25 のポアソン分布でよく記述できた。数日後に、その天体を 10 秒間だけ観測する機会があり、その際の 1 秒ごとのカウント数は以下の通りであった (下図参照) :

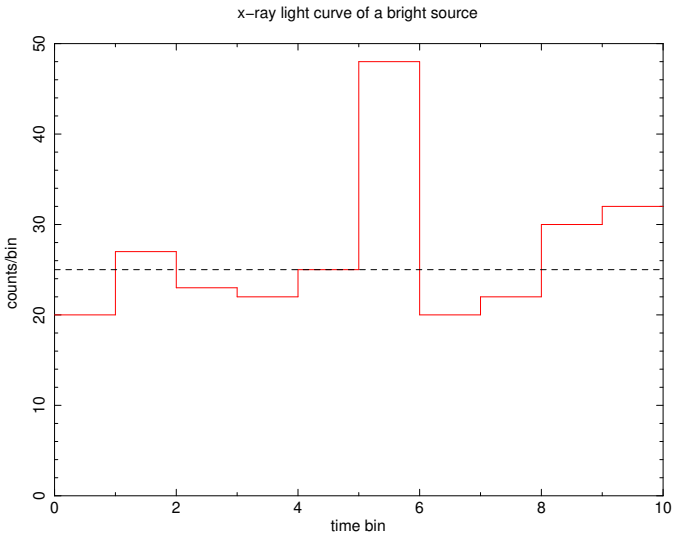
20, 27, 23, 22, 25, 48, 20, 22, 30, 32

一見、バーストのような現象もみられたのだが、今回の観測が前回観測された、平均 25 のポアソン分布と矛盾しないかどうか (偶然起きうることなのか、あるいは天体の物理状態が変化したのか) 検定してみよう。

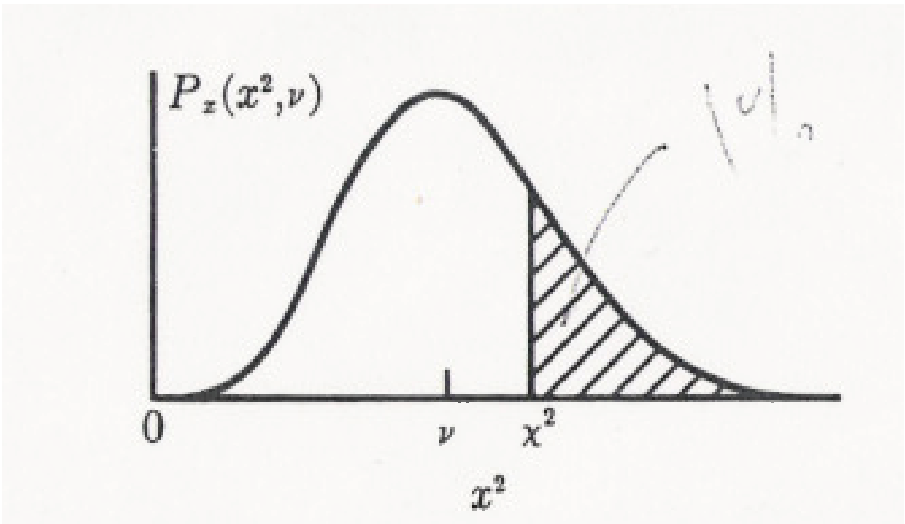
平均 25 のポアソン分布の分散 σ^2 は $\boxed{25}$、標準偏差 σ=$\boxed{5}$ である。これは、平均 $\bar{x} = 25$, 標準偏差 σ=$\boxed{5}$ の正規分布で近似することができ、各ビンのカウント数はそれに従うと考えてよい。 N ビンからなるデータを考え，各ビンのカウント数を $x_1, x_2, , , x_N$ とすると、

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \tag{30}$$

という量を考えると、χ^2 は自由度 N の χ^2 分布に従う事が知られている。その平均は$\boxed{N}$である。



さて、今の観測の場合，N=10 であり、実際の χ^2 は$\boxed{27.16}$である。これがよくあることなのか、滅多にないことなのか、自由度 10 の χ^2 分布と比較してみる。下図は χ^2 分布を模式的に示したものである。χ^2 分布の表より、自由度 10 の χ^2 分布において、斜線部の値が 1 %になる χ^2 の値は 23.21, 0.1 %になる χ^2 の値は 29.59 である。これらの値と、観測値$\boxed{27.16}$を比較して、今の状況を以下のように定量的に記述できる: この 10 ビンから観測された光子数の分布が平均25 のポアソン分布 (正規分布) に従っているという仮説は、危険率$\boxed{1}$%では棄却できる (そういう珍しい事が起きる確率は$\boxed{1}$%以下) が、$\boxed{0.1}$%では棄却できない (そういう珍しい事も$\boxed{0.1}$%以上の確率では起きる)。



以上。