

**Fig. 1.** 暗い X 線天体を 1 ビン 1 秒で、100 秒観測したときの光度曲線。横軸は時間、縦軸は、1 ビンあたりの X 線光子数。平均値 0.55 に横線を引いた。

図1の光度曲線（ライトカーブ）は、実際の X 線衛星データから取ってきたものである。一秒ごとに、X 線検出器に入射する X 線の数、100 秒の間、カウントした<sup>1</sup>。その値を書き下してみると、以下の通りである。

```
00201000000001040111101100100010001001004010000
01112000211121000101120110001000011000102000100202
010
```

全部で 100 ビンのうち、0 カウントのビンが 59、1 カウントが 31 ビン、2 カウントが 8 ビン、3 カウントが 0 ビン、4 カウントが 2 ビンあることがわかるだろう。これを、1 ビンに光子が 0, 1, 2, 3, 4 カウント入る確率は、それぞれ、0.59, 0.31, 0.08, 0, 0.02 と考えても良い。そのヒストグラムは、図2の通り。また、平均値は、 $(1 \times 31 + 2 \times 8 + 4 \times 2) / 100 = 0.55$  である。

図2で赤丸で示したのは、以下の式で、 $\mu = 0.55$  のときに、 $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  に対応する点である。

$$P_P(i; \mu) = \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu} \quad (1)$$

この式が、平均  $\mu$  のポアソン分布に他ならない（ $\mu$  は実数であるが、 $i$  は整数値、0, 1, 2, 3, ... の場合のみポアソン分布が定義されている事に注意せよ）。ポアソン分布の具体的解釈の一つの例として、検出装置の 1 ビンに平均  $\mu$  個の割合で光子が入射してくる場合を考える。統計的な揺らぎにより、実際に 1 ビンあたりに検出される光子の数は、 $\mu$  のまわりでばらつく。実際に検出される光子数が  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  である確率が、(1) で与えられる。この状況が図2、図4で示されている訳である。「天体を観測したとき、1 時間ビンあたりに落ちる光子数の分布はポア

<sup>1</sup> 観測を行っている時間間隔の単位をビン (bin) と呼ぶ。つまり、ここでは幅が一秒のビンが 100 ビンある。

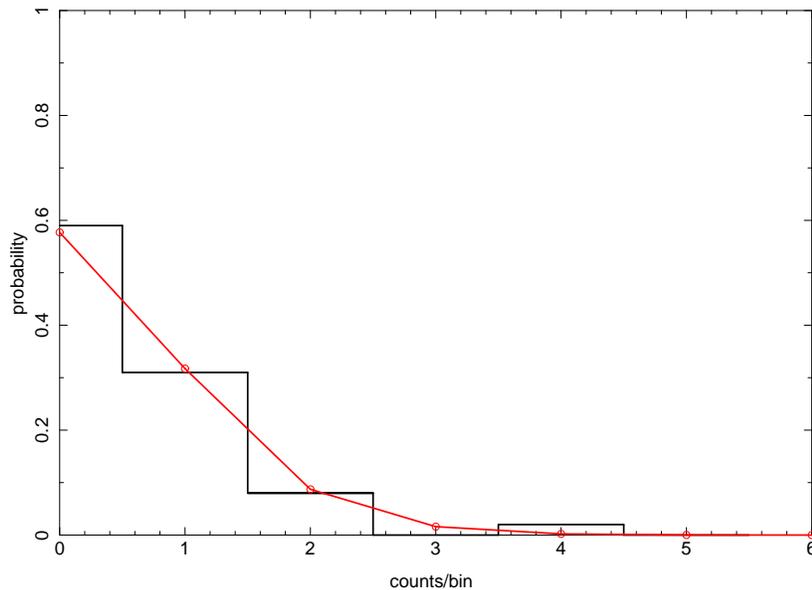


Fig. 2. 観測された X 線データのヒストグラム (黒) と平均 0.55 のポアソン分布 (赤)。

ソソ分布に従う」ことを覚えておこう<sup>2</sup>。

式 (1) は暗記してしまうと良い。思い出すために手がかりと成るのは、平均  $\mu$  のとき、1 ビンに全く光子が入らない確率は、 $e^{-\mu}$  ということである。

図 1 よりも、もう少し明るい X 線天体を、やはり 1 ビン 1 秒で、100 秒間観測した場合の光度曲線が図 3 である。

各ビンで検出された X 線光子の数は以下の通りである。

37 27 23 22 25 27 20 22 30 30 29 30 30 30 21 26 22 25 24 23 27 20 16 36 30 24 26 22 29  
21 27 19 30 27 25 24 27 25 24 17 25 28 20 28 21 29 24 22 32 25 15 16 18 25 24 20 22 24 30 32  
28 23 21 20 31 29 29 25 21 26 27 24 22 36 29 29 28 30 32 24 34 26 26 26 15 23 27 30 25 21 27  
20 23 22 20 17 17 25 31 20

各ピンに落ちる光子数の平均は 25.1 である。各ビンに落ちる光子数のヒストグラムは図 4 である。赤で示したのが、平均の値  $\mu = 25.1$  を (1) 式に代入したポアソン分布である。一方、緑で描いたのが、平均の値  $\mu = 25.1$ 、分散  $\sigma^2 = 25.1$  で表される正規分布である。赤い線と緑の線が良く似ている事を確認しよう。

一般に、平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$  を持つ正規分布は以下の式で表される。

$$P_G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2)$$

数学的な証明もあるのだが、「ポアソン分布の平均  $\mu$  が大きくなると、それは平均  $\mu$ 、分散  $\mu$  の正規分布で良く近似されるようになる」、ということを直感的に覚えておこう。それを図示したのが、図 5 である。いろいろな  $\mu$  の値について、平均  $\mu$  のポアソン分布と、平均  $\mu$ 、分

<sup>2</sup> ただし、ここで天体に固有の時間変動は存在しない事を仮定している。たとえば、自転しているパルサー、爆発的に増光するバースターなどの時間変動はここでは考えていない。

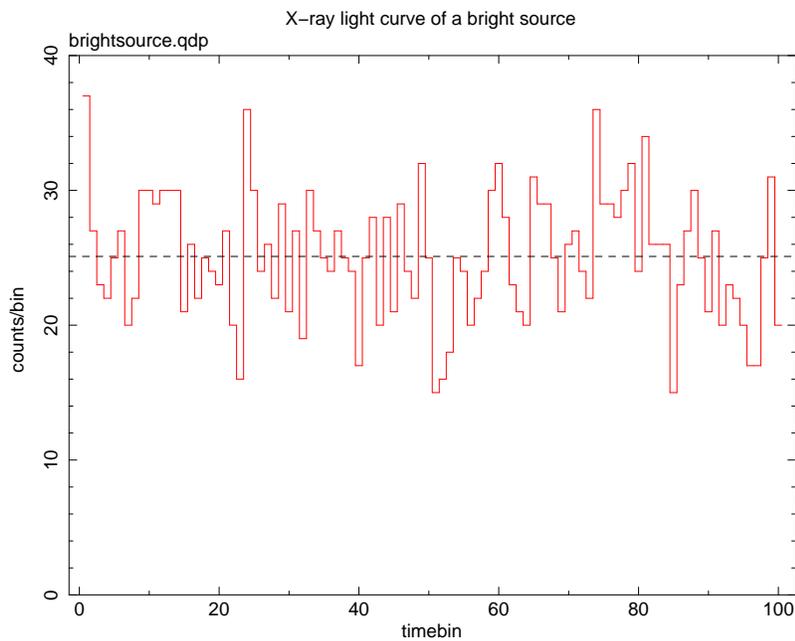


Fig. 3. 明るい X 線天体を 1 ビン 1 秒で、100 秒観測したときの光度曲線。平均値 25.1 に横線を引いてある。

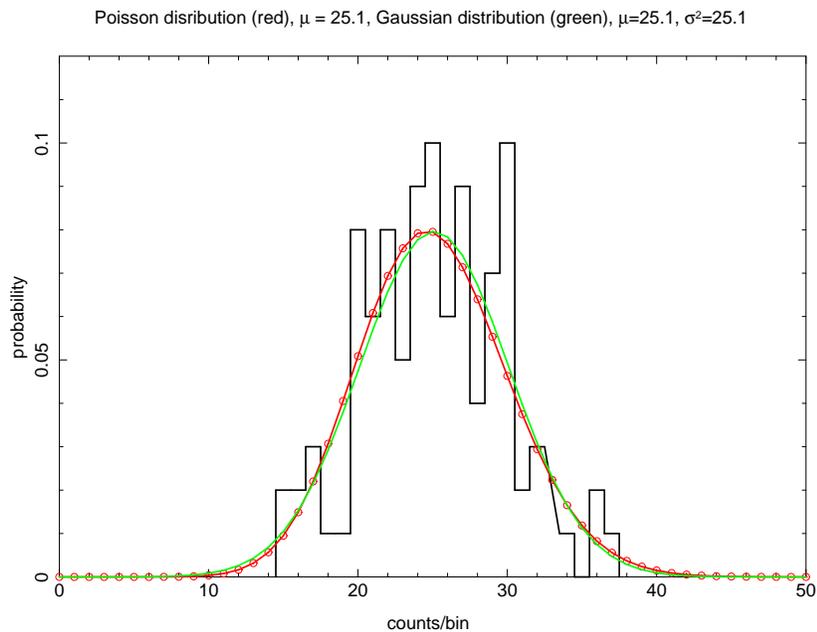


Fig. 4. 観測された X 線データのヒストグラム（黒）と平均 25.1 のポアソン分布（赤）、平均 25.1、分散 25.1 の正規分布（緑）。

散  $\mu$  の正規分布を比較した。ただし、正規分布は連続的な関数であるのに対し、ポアソン分布は離散的な値に対してのみ定義されている事を明確にするために、赤棒線グラフで示したことに注意<sup>3</sup>。

<sup>3</sup> 正規分布については、緑線の下面積が 1 になっていて、ポアソン分布については、赤線の長さを全部足すと、1 になっているわけです。

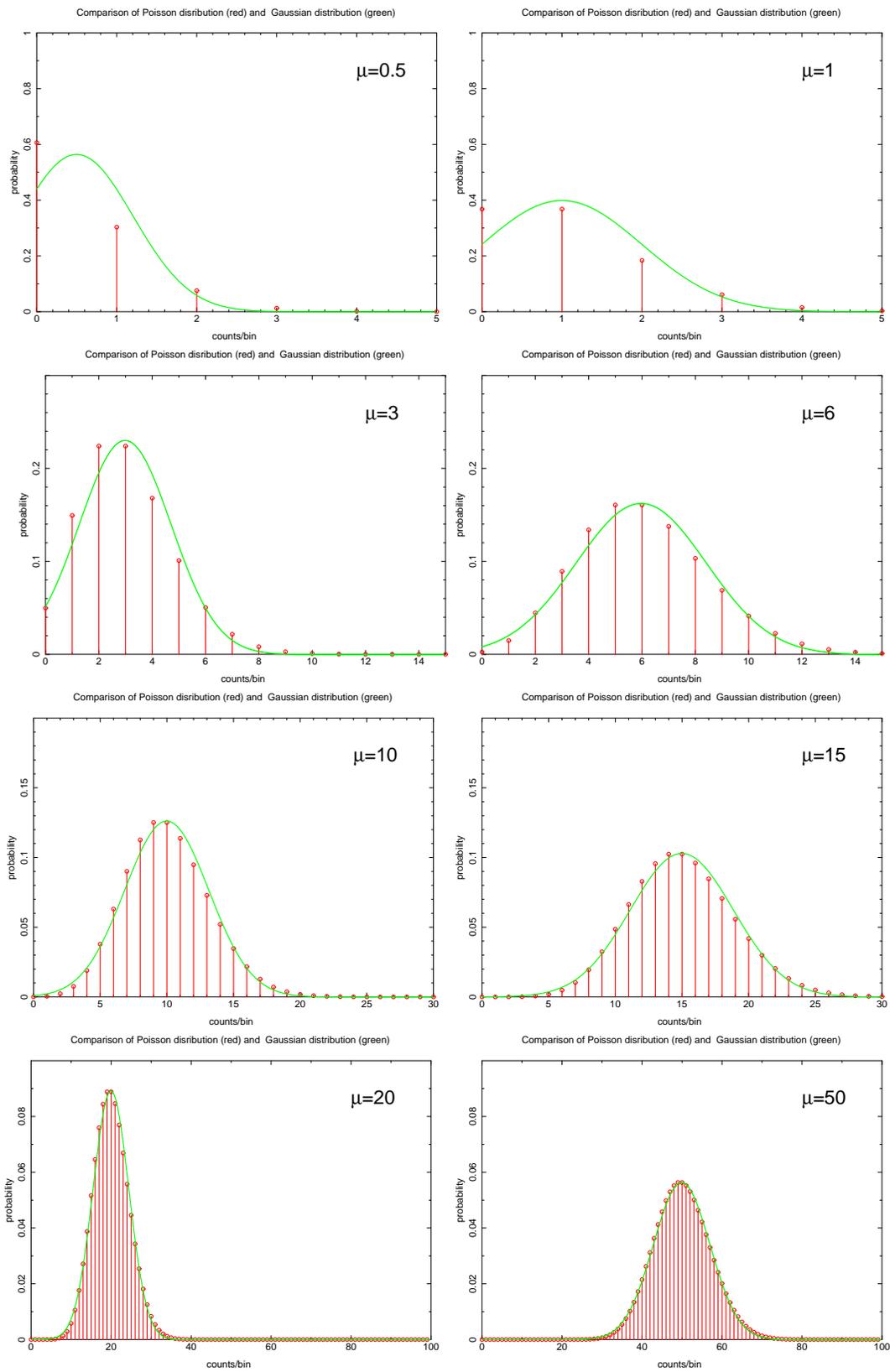


Fig. 5. いろいろな値  $\mu$  について、平均  $\mu$  のポアソン分布と (赤)、平均  $\mu$ 、分散  $\mu$  の正規分布 (緑) の比較。