東京大学教養学部 2008 年度冬学期 宇宙科学 II (海老沢) 講義ノート (2009 January 26)

http://plain.isas.jaxa.jp/~ebisawa/TEACHING/2008UnivTokyo.html に置いてあります。

Contents

---

[1] Jackson, “Classical Electrodynamics” の” 第 1 版” を参考にしています (日本語訳も出ています)。特殊相対論に関しては、第 2 版よりも第 1 版の記述のほうがシンプルでわかりやすいと感じました。

[2] この節では、”Exploring Black Holes –Introduction to General Relativity”, by Taylor and Wheeler, Addison Wesley Longman を参考にしています。日本語でも英語でも一般相対性理論の教科書は山のようにありますが、僕が見た限り、これが一番直感的でわかりやすい教科書でした (しかし数学的な導出とかは厳密ではありません)。

1. 回転による座標変換

1.1. 3次元空間、4次元時空の回転の例

ここでは、初歩的な線形代数の応用例として 3 次元空間、4 次元時空の座標系の回転を考えてみよう。

以下に 3 つの行列を示す。これらの行列に共通の特徴を読み取れるだろうか？

$$\begin{pmatrix} -0.0548755 & -0.873437 & -0.483835 \\ 0.49411 & -0.44483 & 0.746982 \\ -0.867666 & -0.198076 & 0.455984 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta\cos\psi-\sin\phi\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi-\cos\phi\cos\theta\sin\psi & \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta\cos\psi+\cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi-\sin\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{1-\beta^2} & i\beta/\sqrt{1-\beta^2} \\ 0 & 0 & -i\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 1/\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

これらの行列は、(1) 各列あるいは各行を成分とするベクトルの長さが1(自分自身との内積が 1)、(2) 各列あるいは各行を成分とするベクトルは、他の列あるいは行を成分とするベクトルと直交している (内積が 0)、という特徴がある (実際に確かめてみよう[3])。このような行列を直交行列と呼ぶ。

直交行列は二つの座標系の間の、回転による座標変換を記述する。3 次元空間に任意の座標系をとり、位置ベクトル (x,y,z) を考える。その座標系を回転させて、新たな位置ベクトルが (x',y',z') となったとする。回転によってベクトルの長さが変わらない事は直感的にわかるだろう。つまり、

$$x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2 \tag{4}$$

である。直交行列による座標変換は、ベクトルの長さを変えない、という特徴がある。

冒頭に示した 3 つの行列の物理的意味は何であろうか？(1) は、天空上の赤道座標から銀河座標への座標変換を表す[4]。(2) は、人工衛星の姿勢が (ϕ,θ,ψ) のオイラー角で表されるとき、人工衛星上の座標と天球座標の間の変換を与える[5]。(3) は、静止している座標系とそれに対し

---

[3] 複雑な数式を扱うときには、"mathematica" のようなソフトウェアを使うと便利である。(2) のように複雑な要素を持つ行列計算、ベクトル計算も簡単にできる。

[4] たとえば、宇宙研の我々のグループで作った"JUDO" を見てください (`http://darts.isas.jaxa.jp/astro/judo`)。天球上の位置を、赤道座標、銀河座標、黄道座標で切り替えてみることができます。

[5] これについても私たちのグループで管理している、「すざく」衛星の観測ログを参考にしてください (`http://darts.isas.jaxa.jp/astro/tables/SUZAKU_LOG.html`)。各観測次期における「すざく」衛星の姿勢がわかります。2008 年 10 月 19 日から 20 日にかけて、HESSJ1825-137.3 という天体が、(276.1943,103.9916,179.0000) というオイラー角で観測された、というように。

て速度 $\beta = v/c$ (c は光速; よって $\beta \leq 1$) で等速運動している座標系の間のローレンツ変換を与える。二つの等速運動している座標系の間で、モノの長さや時間は保存されないことに注意しよう。保存されるのは、四次元時空における世界距離なのである (これが特殊相対性理論の本質!)。

これら 3 つの物理的には全く異なる状況が、全く同じ数学で記述される事がポイントである[6]。これらについて、以下に順に解説していく。

1.2. 天球座標と座標変換

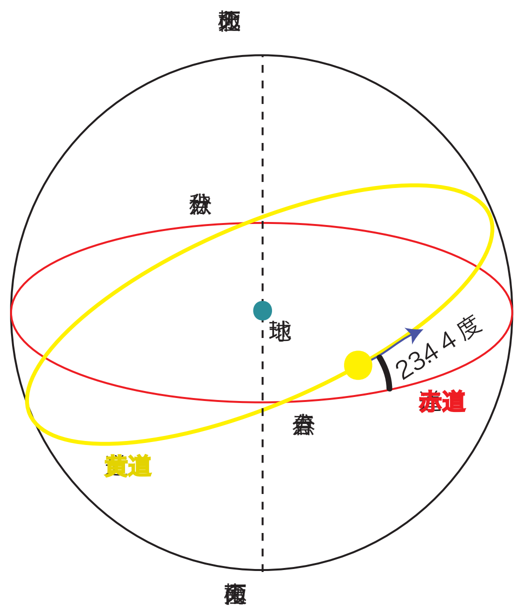


Fig. 1. 天球、赤道、黄道の関係

天文学では、天体の「見かけ」の位置を表すのに、仮想的な天球という概念を用いる。宇宙が球であり、その中心に私たちがいる (地球がある)、というイメージである。地球の自転軸を延ばしていって、天球とぶつかったところが、点の北極。地球の赤道を拡げていって、天球とぶつかったところが天の赤道。

地球の自転軸は、地球の公転面と垂直ではなく、23.°44 傾いている[7]。太陽が一年を通じて天球上で通る道を黄道と呼ぶが、黄道は天の赤道と 23.°44 傾いている。太陽が天の赤道を南から北に横切る点が春分点、北から南に横切る点が秋分点。太陽が赤道面からいちばん北向きに離れる点が夏至点、南向きに離れる点が冬至点。文字通り、地球の公転運動によって、春分、

---

[6] なんて自然界って美しいんだ!、って、ときどき感動したりしませんか?

[7] 地球自転軸の傾きは 41000 年の周期で、22.°2 から 24.°5 まで変化し、さらに 25800 年の周期で歳差運動している (コマの首振り運動と同じ)。これによって、赤道座標系は時間とともずれていくので、いつの時点の地球自転軸に準じた赤道座標系かを明示する必要がある。現在普通に使われているのは 2000 年分点であり、これを J2000 で表す。私が大学院に入った 1986 年頃は 1950 年分点のほうが広く使われていて、これを、B1950 と表す。例として、ブラックホール天体、白鳥座 X-1 の赤経赤緯は、(299.°590, 35.°201) (J2000), (299.°120, 35.°065)(B1950) である。

秋分、夏至、冬至のときに太陽はこれらの点を通過する。

地球上の経度 ($0^\circ \sim 360^\circ$)、緯度 ($-90^\circ \sim +90^\circ$) を定義し、それで地球上の位置を表すように、天球上で、赤経 ($0^\circ \sim 360^\circ$)、赤緯 ($-90^\circ \sim +90^\circ$) を定義し、それによって天体の位置を表す。グリニッジ天文台 (経度=0°) が地球上の経度の基準点であるように、赤経の基準点は春分点である。このように、天の赤道面を基準にした座標系が赤道座標である[8]。同様に天の黄道面を基準にした座標系が黄道座標である。

地球上と同様、天球上でも方角を東西南北で表わす。天の北極の方向が北、南極の方向が南、赤経が増える方向が東、減る方向が西。地球上 (地球を外から見ている) と天球上 (天球を内から見ている) で東西の向きが逆になっていることに注意。つまり地図を拡げたとき、北が上向きなら東は右 (右向きに経度が増加する)。一方、「天球図」においては、北が上向きなら、東は左 (左向きに経度が増加する)。

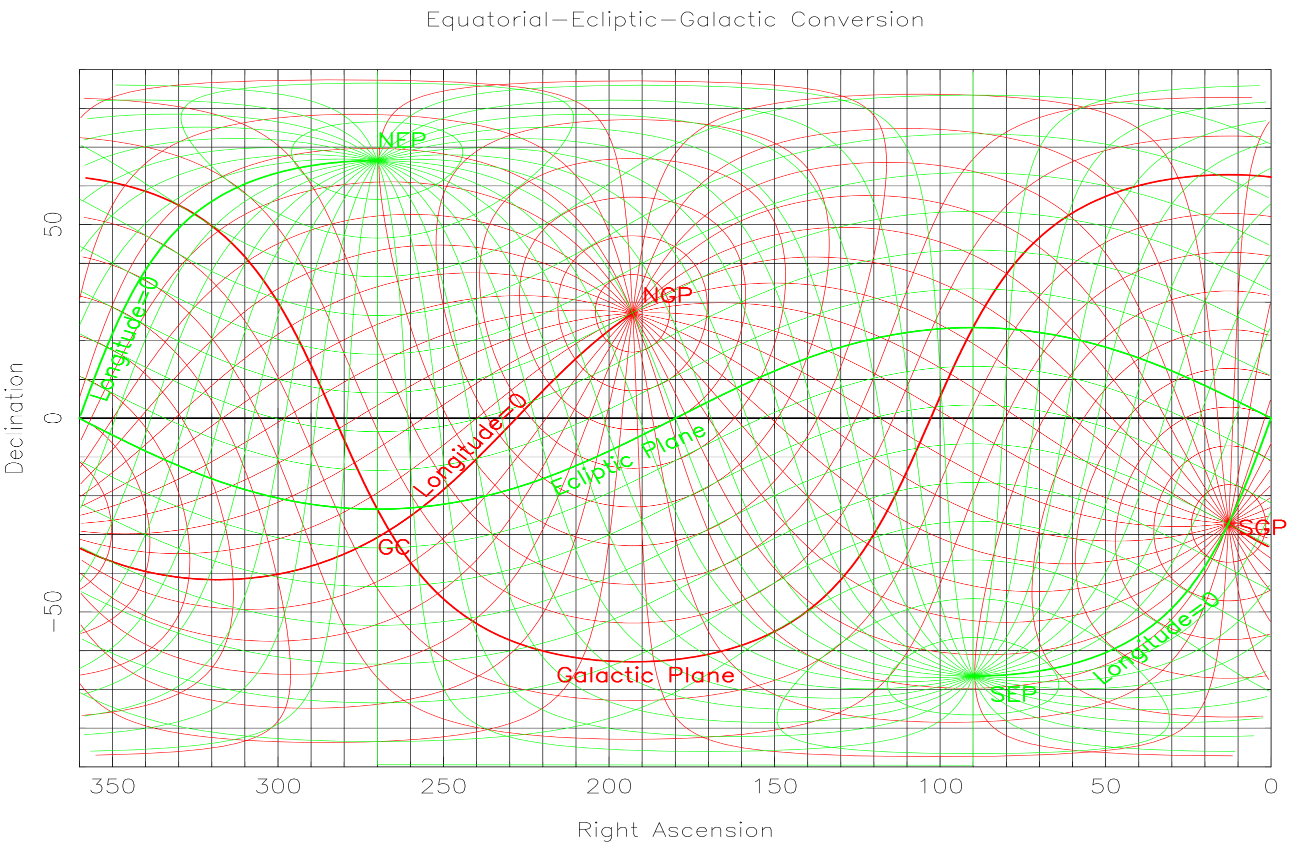


Fig. 2. 赤道座標、黄道座標、銀河座標の関係

もう一つ良く使われるのが、我々の銀河系 (天の川) を基準に取った、銀河座標である。銀河中心の方向が銀経=0 度で (左向きに銀経が増加)、銀河面が銀緯=0 度に対応している。

[8] 天球の回転がまさに我々が日常使っている時刻と結びついているために、赤経を 0° から 360° で表す代わりに、0 時から 24 時で表すことがある。1 時間が 15° に対応する。通常通り、1 時間は 60 分、1 分は 60 秒。時、分、秒に対応する部分を hh, mm, ss.s としたとき、赤経を、hh:mm:ss.s と表記する。また、一般的に 1 度は 60 分角、1 分角は 60 秒角。これを、$1^\circ = 60', 1' = 60''$ と表記する。赤緯を分角、秒角で表わすことも多い。たとえば、ある天体の赤経、赤緯を ($281^\circ\!.00, -4^\circ\!.07$) と書いても、($18:44:0.0, -4^\circ 4' 12''$) と書いてもよい。

任意の天体の位置を、赤道座標、黄道座標、銀河座標で表すことができる。図 2 は、これら 3 つの座標の間の変換を示したものである[9]。

たとえば、以下の 3 つは天球上で同じ位置を表わす[10]。

(赤経、赤緯)=(281°.000, −4°.070)
(銀経、銀緯)=(28°.463, −0°.204)
(黄経、黄緯)=(281°.608, 18°.927)

どうやってこのような座標変換を計算するのだろうか[11]?以下では、それを考えてみよう。

1.3. 方向ベクトル

赤経と赤緯を通常、(α, δ) で表す。長さが 1 で、(α,δ) の方向を表す方向ベクトル、$\mathbf{p}$ を考えよう。春分点の方向を x 軸、赤道面上、赤経 90 度を y 軸、北極を z 軸、とする右手系を考えよう。方向ベクトルの xyz 座標は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{5}$$

$x^2+y^2+z^2=1$ になることを、当たり前だけど念のために確認しておこう。ここで定義した x,y,z 軸の基底ベクトルを、それぞれ $\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z}$ とすると、

$$\mathbf{p} = x\mathbf{e_x} + y\mathbf{e_y} + z\mathbf{e_z} = (\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{6}$$

である。

黄道座標系に基づいた、x' 軸,y' 軸,z' 軸と、それぞれの基底ベクトル、$\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z}$ を考えよう。x' 軸は春分点を向いていて、$x'y'$ 軸面が黄道面に一致している。同様に、銀河座標系に基づいた、x'' 軸,y'' 軸,z'' 軸と、基底ベクトル $\mathbf{e''_x},\mathbf{e''_y},\mathbf{e''_z}$ を考える。x'' 軸は銀河中心を向いていて、$x''y''$ 平面は銀河面と一致している。

式 (6) で定義した方向ベクトル $\mathbf{p}$ を、黄道座標系でも銀河座標系でも表わすことができる。

$$\mathbf{p} = (\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\mathbf{e''_x},\mathbf{e''_y},\mathbf{e''_z}) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}. \tag{7}$$

式 (5) と同じ関係が、黄道座標と (x',y',z') の間に、銀河座標と (x'',y'',z'') の間に、成立する。たとえば、ベクトル $\mathbf{p}$ の銀河座標を (l,b) とすると、

[9] この図を作った Fortran プログラムをホームページに上げておきますので、参考にしてください。

[10] ほぼ銀河面上 (銀緯が小さいことからわかりますね？)、銀河中心から 28°.5 離れて、X 線を強く放射している領域で、「僕の好きな空」です。日本やアメリカの人工衛星で X 線観測、チリやハワイの望遠鏡で赤外線観測をしました。

[11] たとえば、`http://heasarc.gsfc.nasa.gov/cgi-bin/Tools/convcoord/convcoord.pl` などで、座標変換のサービスを提供している。

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b \, \cos l \\ \cos b \, \sin l \\ \sin b \end{pmatrix}. \tag{8}$$

これを逆に解いて、

$$\begin{pmatrix} l \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan^{-1}(y''/x'') \\ \tan^{-1}\left(z''/\sqrt{x''^2+y''^2}\right) \end{pmatrix} \tag{9}$$

によって、銀河座標 (l,b) を求めることができる。

以上まとめると、ある天体の赤経、赤緯 (α,δ) を銀経、銀緯 (l,b) に変換するには、式 (5) によって赤道座標系での方向ベクトルの 3 成分 (x,y,z) を求め、それを式 (7) によって銀河座標系の 3 成分 (x'',y'',z'') に変換し、さらに式 (9) を用いればよい。

1.4. 直交変換と変換行列

基底ベクトル $(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})$ で表される直交座標系と $(\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_3},\mathbf{e'_3})$ で表される直交座標系の間の直交変換を考える (添字 1,2,3 が上で書いた xyz に対応)。これらは、それぞれ互いに垂直な単位ベクトルの組だから、

$$\mathbf{e_1}^2 = \mathbf{e_2}^2 = \mathbf{e_3}^2 = 1, \mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_2} = \mathbf{e_2}\cdot\mathbf{e_3} = \mathbf{e_3}\cdot\mathbf{e_1} = 0 \tag{10}$$

$$\mathbf{e'_1}^2 = \mathbf{e'_2}^2 = \mathbf{e'_3}^2 = 1, \mathbf{e'_1}\cdot\mathbf{e'_2} = \mathbf{e'_2}\cdot\mathbf{e'_3} = \mathbf{e'_3}\cdot\mathbf{e'_1} = 0 \tag{11}$$

片方の系のベクトルはもう片方の系のベクトルを使って表わすことができる。

$$\mathbf{e'_1} = a_{11}\mathbf{e_1} + a_{12}\mathbf{e_2} + a_{13}\mathbf{e_3}, \tag{12}$$

$$\mathbf{e'_2} = a_{21}\mathbf{e_1} + a_{22}\mathbf{e_2} + a_{23}\mathbf{e_3}, \tag{13}$$

$$\mathbf{e'_3} = a_{31}\mathbf{e_1} + a_{32}\mathbf{e_2} + a_{33}\mathbf{e_3}. \tag{14}$$

行列表示すると、

$$(\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_2},\mathbf{e'_3}) = (\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

(11) の条件より、この変換行列の各要素の間に、

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \tag{16}$$

$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0, a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0, a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13}=0 \tag{17}$$

が成立する。また、(12)、(13)、(14) と、$\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$ の内積を取ることにより、以下がわかる。

$$\mathbf{e'_1}\cdot\mathbf{e_1} = a_{11},\ \mathbf{e'_1}\cdot\mathbf{e_2} = a_{12},\ \mathbf{e'_1}\cdot\mathbf{e_3} = a_{13}, \tag{18}$$

$$\mathbf{e'_2}\cdot\mathbf{e_1} = a_{21},\ \mathbf{e'_2}\cdot\mathbf{e_2} = a_{22},\ \mathbf{e'_2}\cdot\mathbf{e_3} = a_{23}, \tag{19}$$

$$\mathbf{e'_3}\cdot\mathbf{e_1} = a_{31},\ \mathbf{e'_3}\cdot\mathbf{e_2} = a_{32},\ \mathbf{e'_3}\cdot\mathbf{e_3} = a_{33}. \tag{20}$$

つまり、式 (15) で定義される変換行列の 9 つの変換係数は旧座標系の 3 軸と新座標系の 3 軸の間のなす 9 つの角度の余弦に対応している。これを、「$\mathbf{e_1 e_2 e_3}$ で表わされる系における $\mathbf{e'_1}$,$\mathbf{e'_2}$,$\mathbf{e'_3}$ の方向余弦は、それぞれ $(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ である」、という言いかたをする。同様に、式 (18),(19),(20) を縦に眺めると、「$\mathbf{e'_1 e'_2 e'_3}$ で表わされる系における $\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,$\mathbf{e_3}$ の方向余弦は、それぞれ $(a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ である」ことがわかる。

よって、式 (12),(13),(14) の逆変換は、

$$\mathbf{e_1} = a_{11}\mathbf{e'_1} + a_{21}\mathbf{e'_2} + a_{31}\mathbf{e'_3}, \tag{21}$$

$$\mathbf{e_2} = a_{12}\mathbf{e'_1} + a_{22}\mathbf{e'_2} + a_{32}\mathbf{e'_3}, \tag{22}$$

$$\mathbf{e_3} = a_{13}\mathbf{e'_1} + a_{23}\mathbf{e'_2} + a_{33}\mathbf{e'_3} \tag{23}$$

となる。

行列表示すると、

$$(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) = (\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

(10) の条件より、(16), (17) に対応する式は、

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \tag{25}$$

、

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0. \tag{26}$$

式 (15) と式 (24) を比較すると、変換行列の行と列を入れかえた転置行列が逆行列になっていることがわかる。

1.5. 直交変換の簡単な記法

直交行列の性質を簡単に表す記法がある。まず、添字、1,2,3,4 を i, j, k, l などの文字で表す。**Kronecker** のデルタを導入する。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{27}$$

さらに、「同じ添字が対になって一つの項に現われるときには、常にその添字について 1 から 3 まで (3 次元空間の場合) あるいは 1 から 4 まで (4 次元時空の場合) の和をとる (Σ 記号を省略する)」という総和の規約を導入する。すると、基底ベクトルの直交条件、(10),(11) は以下のように書ける。

$$\mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_j} = \delta_{ij}, \mathbf{e'_i} \cdot \mathbf{e'_j} = \delta_{ij}. \tag{28}$$

二つの座標系の基底ベクトルと、変換行列との関係は以下のようになる。

$$\mathbf{e'_i} \cdot \mathbf{e_j} = a_{ij},\ \mathbf{e'_i} = a_{ij}\mathbf{e_j},\ \mathbf{e_i} = a_{ji}\mathbf{e'_j}. \tag{29}$$

座標軸の直交関係を表わす (16),(17),(25),(26) は、

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \tag{30}$$

となる。

1.6. 座標変換の計算

(7) と (24) を合わせると、

$$\mathbf{p} = (\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{e'_x}, \mathbf{e'_y}, \mathbf{e'_z}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{e'_x}, \mathbf{e'_y}, \mathbf{e'_z}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{31}$$

よって、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{32}$$

これが、二つの座標系における方向ベクトルの 3 成分、(x, y, z) と (x', y', z') との間の変換式である。

1.7. オイラーの定理

今、共通の原点を持つ二つの直交座標系の間の座標変換 (点のまわりの回転変位) を考えているのだが、この場合に以下のオイラーの定理が成立する。

定理 I 点のまわりの回転変位は、その点を通る 1 つの軸のまわりの回転によって達っせられる。

これを、すでに学んだ直交行列の性質から簡単に証明することができる。回転変位を実現する回転軸に沿った方向ベクトルはその変換によって不変だから、そのベクトルの 3 成分を (x_0, y_0, z_0) と書けば、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

ここで変換行列を単純に A と書いた。これは、直交行列 A に対して、(x_0, y_0, z_0) が固有ベクトルであり、固有値が 1 であることを示している。単位行列 I を持ちいると、上式は、

$$(A - I) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

と書ける。つまり、行列 $A - I$ には逆行列が存在しない。その条件は、行列式が 0 であること、

$$|A - I| = 0 \tag{35}$$

である。ところで、A の転置行列 ${}^tA$ は A の逆行列だから、

$$(A - I)\,{}^tA = I - {}^tA. \tag{36}$$

ここで両辺の行列式を取り、転置行列の行列式は元の行列式と等しいこと、回転行列の行列式は1であること (式56) を持ちいると、

$$|A-I| = |I-A|. \tag{37}$$

一般に、 $n\times n$ 行列 B の行列式について、

$$|-B| = (-1)^n\,|B| \tag{38}$$

が成立する。今考えている3次元行列については、$|I-A| = -|A-I|$ である。よって、(37) は (35) を示していることがわかる。

1.8. オイラー角

変換行列は9つの要素を持つわけだが、独立な要素は3つである。これは、オイラーの定理より、任意の直交変換は回転軸の方向 (2つの変数で決まる) とそのまわりの回転角（3つめの変数）を与えれば実現できることから理解できる。その3つの変数を指定すれば、二つの座標系の間の変換を一意的に定義したことになる。

座標変換を表わす3つのパラメーターとして良く使われるものにオイラー角がある。オイラー角にもいろいろな定義があるが、ここでは日本の科学衛星の姿勢に使われている「zyz」オイラー角の定義を用いて議論を進める。

赤道座標の上で、1.3節で定義した、x,y,z 軸を考える (x 軸は春分点、z 軸は北極を向いている)。たとえばこれが人工衛星の三軸だったら、今から定義するオイラー角は人工衛星の姿勢を与えることになるし、別の座標軸だったら、オイラー角は異なる天球座標系の間の変換を与える。

z 軸の周りに、$+z$ の向きを向いて時計周りに角度 ϕ 回転し、x 軸、y 軸の位置を変える。この新たな3軸を、便宜上 $x'y'z'$ としよう ($z=z'$ である)。次に、y' 軸の周りに、角度 θ 回転し、$x'z'$ 軸の位置を変え、$x''y''z''$ 軸を定義する ($y'=y''$ である)。最後に、z'' 軸の周りに ψ 回転し、最終的に、x''',y''',z''' 軸を定義することができる。xyz 軸による旧座標系と、$x'''y'''z'''$ 軸による新座標系の間の関係を与える (ϕ,θ,ψ) を、オイラー角と呼ぶ。

このように定義したオイラー角と、(15) または (24) で与えられる変換行列との関係を調べてみよう。まず、最初の z 軸のまわりの ϕ 回転で、新たな基底ベクトルと元の基底ベクトルの間の関係は以下のようになる。

$$(\mathbf{e_1'},\mathbf{e_2'},\mathbf{e_3'}) = (\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

同様にして、y' 軸周りの θ 回転によって、

$$(\mathbf{e_1''},\mathbf{e_2''},\mathbf{e_3''}) = (\mathbf{e_1'},\mathbf{e_2'},\mathbf{e_3'})\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{40}$$

z'' 軸周りの ψ 回転によって、

$$(\mathbf{e_1'''},\mathbf{e_2'''},\mathbf{e_3'''}) = (\mathbf{e_1''},\mathbf{e_2''},\mathbf{e_3''})\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

以上、3 式をまとめて、

$$(\mathbf{e_1'''},\mathbf{e_2'''},\mathbf{e_3'''}) = (\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

$$= (\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta\cos\psi + \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{43}$$

これが、このノートの冒頭で与えた式 (2) である。これは回転行列だから、条件 (30) と、後で出てくる (56) を満たしていることに注意しよう[12]。

1.9. 赤道座標から黄道座標への変換

春分点を指している x 軸の周りの回転を考えると速い。回転角 $\theta = 23.^\circ 43929$ である[13]。元の基底ベクトルを $\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z}$, 新たな基底ベクトルを $\mathbf{e_x'},\mathbf{e_y'},\mathbf{e_z'}$ とすると、

$$(\mathbf{e_x'},\mathbf{e_y'},\mathbf{e_z'}) = (\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = (\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91748 & -0.39778 \\ 0 & 0.39778 & 0.91748 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

$$(\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z}) = (\mathbf{e_x'},\mathbf{e_y'},\mathbf{e_z'})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91748 & 0.39778 \\ 0 & -0.39778 & 0.91748 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

よって、赤道座標での方向ベクトルの 3 成分を (x,y,z), 黄道座標での成分を (x',y',z') としたとき、(32) より、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91748 & 0.39778 \\ 0 & -0.39778 & 0.91748 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{46}$$

が、赤道座標から黄道座標への変換を与える。6 ページの例を考えてみよう。赤経、赤緯が $(281.^\circ 000,\quad -4.^\circ 070)$ のとき、(5) で与えられる、その方向ベクトルは、$(0.19033, -0.97915, -0.0709752)$ となる。(46) より、黄道座標における方向ベクトルは、$(0.19033, -0.92658, 0.32437)$ となる。(9) と同様にして、

$$\tan^{-1}\left(\frac{-0.92658}{0.19033}\right) = -78.^\circ 3923 = 281.^\circ 608.$$

[12] 手計算は面倒だが、mathematica を使えば一瞬で計算してくれる。しかし、ある程度は自分の手を動かすことを覚えておいたほうが良い。

[13] 正確な出典はわからなかったのだが、HEASARC の coco ではこの値を使っているので、ここではそれに倣うことにした。

$$\tan^{-1}\left(\frac{0.32437}{\sqrt{-0.92658^2+0.19033^2}}\right)=18\overset{\circ}{.}927.$$

このようにして、黄経、黄緯が得られた。

1.10. 赤道座標から銀河座標への変換

銀河中心の赤経、赤緯は $(266\overset{\circ}{.}40500, -28\overset{\circ}{.}93617)$ だから、z 軸の周りの $\phi=266\overset{\circ}{.}40500$, さらに回転後の y' 軸の周りの $\theta=28\overset{\circ}{.}93617$ の回転で、x'' 軸が銀河中心を指すことがわかるだろう。しかし、それだけでは銀河面の傾きが決まっていない。さらに x'' 軸の周りで $\psi=58\overset{\circ}{.}59866$ 回転してやれば、正しく銀河座標系が定義されることがわかっている。銀河座標系の基底ベクトルを三重ダッシュつきで表わすと、(42) を参考にして、

$$(\mathbf{e}_\mathbf{x}''',\mathbf{e}_\mathbf{y}''',\mathbf{e}_\mathbf{z}''')=(\mathbf{e}_\mathbf{x},\mathbf{e}_\mathbf{y},\mathbf{e}_\mathbf{z})\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi\\ 0 & \sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}.\tag{47}$$

逆変換は以下のようになる。

$$(\mathbf{e}_\mathbf{x},\mathbf{e}_\mathbf{y},\mathbf{e}_\mathbf{z})=(\mathbf{e}_\mathbf{x}''',\mathbf{e}_\mathbf{y}''',\mathbf{e}_\mathbf{z}''')\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi & \sin\psi\\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\tag{48}$$

$$=(\mathbf{e}_\mathbf{x}''',\mathbf{e}_\mathbf{y}''',\mathbf{e}_\mathbf{z}''')\begin{pmatrix}-0.0548755 & -0.873437 & -0.483835\\ 0.49411 & -0.44483 & 0.746982\\ -0.867666 & -0.198076 & 0.455984\end{pmatrix}.\tag{49}$$

よって、赤道座標での方向ベクトルの 3 成分を (x,y,z), 銀河座標での成分を (x''',y''',z''') としたとき、(32) より、

$$\begin{pmatrix}x'''\\ y'''\\ z'''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.0548755 & -0.873437 & -0.483835\\ 0.49411 & -0.44483 & 0.746982\\ -0.867666 & -0.198076 & 0.455984\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\tag{50}$$

が、赤道座標から銀河座標への変換行列を与える。これがノートの先頭で与えた、式 (1) である。

赤経、赤緯が $(281\overset{\circ}{.}000, -4\overset{\circ}{.}070)$ のときの方向ベクトル、$(0.19033,-0.97915,-0.0709752)$ を上式に代入し、銀河座標における方向ベクトルは、$(0.879122,0.476581,-0.00355986)$ となる。これから、

$$\tan^{-1}\left(\frac{0.476581}{0.879122}\right)=28\overset{\circ}{.}463$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{-0.00355986}{\sqrt{0.879122^2+0.476581^2}}\right)=-0\overset{\circ}{.}204$$

となり、正しい銀経、銀緯が得られた。

1.11. スカラー三重積と行列式

スカラー三重積の定義の前に、ベクトルの外積の復習をしておこう。3 次元のベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B}$ の外積を $\mathbf{O}$ とする[14]。

$$\mathbf{O} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \tag{51}$$

$\mathbf{O}$ は、$\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ の向きに右ネジを回したときに、ネジが進む方向を向くベクトルで、その大きさは、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ がなす角を θ とすると、$|A||B|\sin\theta$ で与えられる ($\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を二辺とする平行四辺形の面積)。また、各成分は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} O_x \\ O_y \\ O_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} \tag{52}$$

一般的に、ベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ のスカラー三重積は、

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{53}$$

で定義される。$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ がこの順に右手系をなすとき、スカラー三重積は、この 3 つのベクトルが作る平行六面体の体積を表わす。 スカラー三重積を $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ の直角成分を用いて書くと、

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = A_xB_yC_z + A_yB_zC_x + A_zB_xC_y - A_xB_zC_y - A_yB_xC_z - A_zB_yC_x \tag{54}$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix}. \tag{55}$$

ここで、$|\mathbf{A}|$ は行列 $\mathbf{A}$ の行列式を示す。上記で定義した直交座標系の基底ベクトル $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$ または $\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_2},\mathbf{e'_3}$ が作る平行六面体の体積は当然 1 なので、それらのスカラー三重積は 1、つまり直交変換の変換行列の行列式の値は 1 である。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1 \tag{56}$$

たとえば、具体的に式 (50) の変換行列について、その行列式の値が 1 であることを手計算で確認してみよう。

2. 人工衛星の姿勢

2.1. 人工衛星の姿勢とオイラー角

天球に対する人工衛星の姿勢を、オイラー角を使って表わすことができる。多くの科学衛星では、スピン軸が衛星の+Z 軸、衛星の太陽電池パネルは+Y 軸の方向を向いていて、観測

[14] ベクトルとベクトルの内積はスカラー。ベクトルとベクトルの外積はベクトル。よろしいですね？

方向 (望遠鏡が向いている方向) は+Z 軸方向である。Z 軸を天の北極、X 軸を春分点、Y 軸を赤経=90° が衛星の初期姿勢で、そこから ZYZ の順に回転させていった 3 つのオイラー角で、衛星の姿勢を定義する。

十分な発電量を得るため、+Y 軸は、常に太陽の方向を向いている必要がある[15]。季節によって、太陽は黄道上を移動し、+Z 軸方向を観測するので、観測ターゲットは、太陽と約 90° をなす大円上になくてはならないことがわかる。また、黄道座標の北極 (North Ecliptic Pole; NEP) と南極 (South Ecliptic Pole; SEP) は、一年中観測可能であることがわかる。

自転軸のまわりにくるくるとスピンしながら、全天をくまなくサベイ観測する科学衛星がある。ドイツの ROSAT 衛星 (X 線)、日本のあかり衛星（赤外線）などである。これらの衛星のスキャンパスをみると、NEP と SEP を通る大円になっていることがわかる。たとえば、`http://plain.isas.jaxa.jp/~ebisawa/Planetarium/RASS_AIT.jpg` を参考に。これは、ROSAT 衛星のデータを赤道座標で表し、Hammer-Aitoff 投影法で表示したものである[16]。画像処理をしていないので、スキャンのパスがよくわかる。スキャンパスが集束している右上の点が NEP、左下の点が SEP である。

他の衛星についても同様である。日本の「あすか」衛星は全天サベイ衛星ではないが、姿勢変更のときは、やはり太陽方向の Y 軸を中心として回転するので、その間の観測パスは NEP, SEP を通ることになる。姿勢制御中のデータを解析したものが、下の論文の図 1 にある。銀河座標、黄道座標で表示してある。銀河座標では NEP は左上、SEP は右下に来る事に注意。
`http://plain.isas.jaxa.jp/~ebisawa/TEACHING/2007Komaba/nikko_proceeding.pdf`

日本の「あかり」衛星は赤外線全天サベイ衛星である。たとえば、`http://www.ir.isas.jaxa.jp/ASTRO-F/Outreach/results/IRC_AllSky_red.jpg` や、`http://www.ir.isas.jaxa.jp/ASTRO-F/Outreach/results/PR081119/IRC09AllSky01_ss.png` を見てみよ (銀河座標)。よ〜く見ると、スキャンパスが NEP、SEP を通っていることがわかるだろう。

衛星のオイラー角と、観測している視野の関係は大切である。ZYZ のオイラー角を (ϕ,θ,ψ) としよう。衛星の+Z 軸が観測装置が見ている方向だから、赤経 (R.A.)、赤緯 (Dec.) は、

$$R.A. = \phi, Dec. = 90^\circ - \theta \tag{57}$$

で与えられることがただちにわかるだろう。

第 3 オイラー角、ψ は、観測装置がターゲットの周りに回転する角、いわゆるロール角を与える。慣習として、ロール角は、天の北から観測装置の+Y 軸 (DETY) へ、反時計周りに計った角を使う[17]。第 3 オイラー角とロール角 (ROLL) の関係は、

$$Roll = 90^\circ - \psi \tag{58}$$

---

[15] 少々ずれていても良い。太陽と+Y 軸のなす角を「太陽角」と言う

[16] 球を平面に投影するのに、いろいろな投影法がある。世界地図と同じ事。メルカトール図法とか、モルワイデ図法とか、小学校の社会科で勉強しませんでした？`http://plain.isas.jaxa.jp/~ebisawa/Planetarium/` などを参考に

[17] 地球上では、通常、方位角は北から時計周りに計った角で定義する。経度が増える向きが地球と天球で反対のため、こうなる。

で与えられる。

NEP は一年中観測できるので、ポピュラーな領域である。人工衛星による実際の観測においては、観測ターゲットの天球上での位置と季節 (太陽の天球上での位置) に応じて、オイラー角を決定する必要がある[18]。季節によって、NEP を観測するためのオイラー角を考えてみよう。NEP の赤経，赤緯は、天球上の X 軸が春分点、Z 軸が天の北極を向いている状態から、X 軸の周りに 23.°4 回転したときに新たな Z 軸が向く方向だから、$(\alpha, \delta) = (270°, 66.°6)$ で与えられることはわかるだろう (5 頁の図参照)。これが観測方向（衛星の Z 軸）になることから、最初の二つのオイラー角は決まり、$\phi = 270°, \theta = 23.°4$ である。衛星の Z 軸、Y 軸の周りに連続してこの二つの回転をおこなった時点で、衛星の Y 軸は春分点を向いている事に注意しよう。Z 軸の回りの第三オイラー角 ψ の回転によって、Y 軸は太陽と同じ向きに黄道上を移動する。太陽パネル (衛星の+Y 軸方向) が太陽の方向を向くという条件は、以下のようになる事を理解しよう[19]。
春分のとき $\psi = 0°$
夏至のとき $\psi = 90°$
秋分のとき $\psi = 180°$
冬至のとき $\psi = 270°$。

具体的な例を見てみよう。「すざく」衛星は、今までこの領域を二回観測している。その時期とオイラー角は以下の通りである。

2005-09-02 (272.80, 24.00, 159.07), (シークエンス番号=100018010)
2006-02-10 (272.82, 23.98, 323.67), (シークエンス番号=5000026010)

秋分の時に太陽の黄経が 180°、春分の時に 0° であることを考えれば、9 月 2 日の太陽の黄経はほぼ 159°、2 月 10 日の太陽の黄経がほぼ 324° であることがわかるだろう。

SEP も一年中観測できるので、ポピュラーな領域である。SEP を観測するためのオイラー角を考えてみよう。SEP の赤経，赤緯は、天球上の X 軸が春分点、-Z 軸が天の南極を向いている状態から、X 軸の周りに 23.°4 回転したときに新たな-Z 軸が向く方向だから、$(\alpha, \delta) = (90°, -66.°6)$ で与えられることはわかるだろう。これが観測方向（衛星の Z 軸）になることから、最初の二つのオイラー角は決まり、$\phi = 90°, \theta = 156.°6$ である。衛星の Z 軸、Y 軸の周りに連続してこの二つの回転をおこなった時点で、衛星の Y 軸は秋分点を向いている事に注意しよう。第三オイラー角 ψ は、太陽パネル (衛星の+Y 軸方向) が太陽の方向を向くという条件から決まる。それが以下のようになる事を理解しよう。
春分のとき $\psi = 180°$
夏至のとき $\psi = 90°$
秋分のとき $\psi = 0°$
冬至のとき $\psi = 270°$。

[18] こういう衛星運用も、宇宙科学研究所の研究者の大事な仕事である

[19] これを間違えると、太陽電池パネルに陽が当たらなくて、衛星が死ぬことになる！

衛星のオイラー角を用いて、衛星座標と天球座標の変換を行うことができる。観測装置の視野は、衛星座標に固定されている。それが、与えられた姿勢のとき、天球上のどこに投影されるか、という問題である。

具体的な例を考えてみよう。「すざく」衛星搭載の X 線 CCD カメラは、$18' \times 18'$ の正方形の視野を持っている。その視野が、あるオイラー角で表される姿勢のときに、天球上のどこに来るか? それがわからなければ、いったい空のどこを見ているのかわからなくなってしまう。また、視野が軸対称ではないので、拡がった天体を観測するときには、視野の傾きを正確に知る必要がある。

2006 年 10 月 15 日から 17 日にかけておこなわれた銀河面観測のデータを見てみよう (シーケンス番号=500009020)。`http://darts.isas.jaxa.jp/cgi-bin/judo/draw_fits?seq_no=500009020` などを見てみたらわかるように、この観測のオイラー角は以下の通りである。

$$\phi = 281.004, \theta = 94.078, \psi = 184.470. \tag{59}$$

ここで、ϕ, θ, ψ は ZYZ オイラー角なので、衛星座標系と赤道座標系の基底ベクトル間変換は、(43) で与えられるので、衛星座標系に於ける成分, (x''', y''', z'''), と赤道座標系における成分, (x, y, z), の間の変換は、同じ行列を使って、以下の通りになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta\cos\psi + \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}. \tag{60}$$

さて、すざく搭載 X 線 CCD カメラは衛星の Z 軸の方向を向いており、その $18' \times 18'$ の正方形の視野の辺は X 軸、Y 軸に沿っている。つまり、衛星の XY 平面上で、視野の 4 つの角は以下の XY 座標を持つことがわかる（単位は度)。

$$(0.15, 0.15), (-0.15, 0.15), (-0.15, -0.15), (0.15, -0.15). \tag{61}$$

また、人工衛星座標における、これら 4 つの角に対応する方向ベクトルは以下の通りであることがわかるだろう ($0.15° = 2.61799 \times 10^{-3}$ rad であることに注意。)。

$$\begin{pmatrix} 2.61799 \times 10^{-3} \\ 2.61799 \times 10^{-3} \\ 0.9999931 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.61799 \times 10^{-3} \\ -2.61799 \times 10^{-3} \\ 0.9999931 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.61799 \times 10^{-3} \\ -2.61799 \times 10^{-3} \\ 0.9999931 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.61799 \times 10^{-3} \\ 2.61799 \times 10^{-3} \\ 0.9999931 \end{pmatrix}. \tag{62}$$

(59) を (60) に代入して、この観測における、衛星座標上の方向ベクトル成分から天球座標上の方向ベクトル成分への変換は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0629713 & -0.979686 & 0.190394 \\ -0.084471 & -0.184856 & -0.979129 \\ 0.994434 & -0.0777398 & -0.0711144 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}. \tag{63}$$

となる。これに (62) を代入すると、赤道座標系における X 線 CCD カメラの 4 隅の方向ベクトル成分は、

$$\begin{pmatrix} 0.187663 \\ -0.979827 \\ -0.0687141 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.192793 \\ -0.978859 \\ -0.068307 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.193123 \\ -0.978417 \\ -0.0735139 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.187993 \\ -0.979385 \\ -0.0739209 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

であることがわかる。これを赤経，赤緯に直すには、(9) を用いれば良い。結局、CCD カメラの 4 隅の赤道座標は、

$$(\alpha,\delta)=(280.842,-3.940),(281.142,-3.917),(281.166,-4.216),(280.866,-4.239). \tag{65}$$

であたえられる。JUDO (`http://darts.isas.jaxa.jp/astro/judo`) を使って、確認してみよう (Show Information チェックボックスをチェック。filter ダイアログボックスに 500009020 を入力)。実際、JUDO の中では上記のような計算をしている訳だが。

3. 特殊相対性理論

3.1. ローレンツ変換[20]

これまでに、3 次元の直交変換が、天球座標の間の変換や人工衛星の姿勢に応用されることを学んだ。さらに 1 次元を加えて 4 次元時空を考えると、同様の直交変換が、特殊相対性理論にも使えることを見てみよう。

4 次元空間における直交変換を考える。あるベクトルを元の基底で表したときの成分が (x_1,x_2,x_3,x_4)、新しい基底ベクトルで表わしたときの成分を (x'_1,x'_2,x'_3,x'_4) とする。ベクトルの長さは不変なので、

$$s^2 \equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+x_4'^2 \tag{66}$$

である。変換行列を $a_{ij}(i,j=1,2,3,4)$ と書くと、3 次元のとき (30, 32) と全く同じように、

$$a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij},\ a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij} \tag{67}$$

$$x'_i = a_{ij}\,x_j,\ \ x_i = a_{ji}\,x'_j \tag{68}$$

が成立する。ここで、1.5 節で述べたように、同じ添字については 1 から 4 までの和を取る。

(x,y,z) を空間座標成分、t を時間とする。ある事象をある座標系 K で表わした「世界点」の座標を (x,y,z,t) する。下図のように、時刻 $t=t'=0$ で原点が K と一致し、K と相対的に速度 v で移動している座標系 K' を考え、その事象を K' で表わした座標を (x',y',z',t') とする。

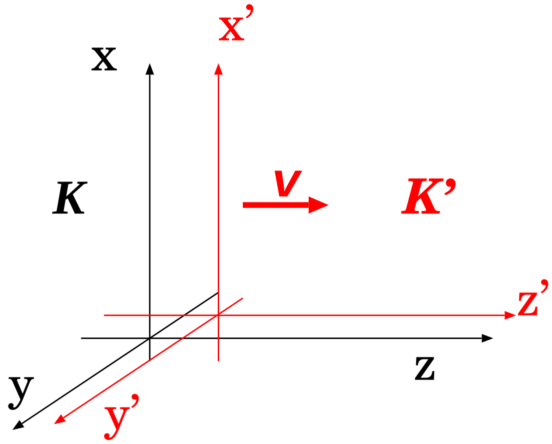
c を光速として、$x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=ict$ としよう (x_4 が形式的に「虚時間」に対応していることに注意)。

このとき、式 (66) は、

$$s^2 \equiv x^2+y^2+z^2-(ct)^2 = x'^2+y'^2+z'^2-(ct')^2 \tag{69}$$

となり、これは相対的に等速運動をしている二つの座標系において、s^2 で定義される「世界間隔」が不変量であることを示している。式 (68) で表わされる (x,y,z,t) と (x',y',z',t') の間の変

[20] Jackson, "Classical Electrodynamics" の" 第 1 版" を参考にしています (日本語訳も出ています)。特殊相対論に関しては、第 2 版よりも第 1 版の記述のほうがシンプルでわかりやすいと感じました。



換がローレンツ変換で、式 (66) で表わされるのがローレンツ不変量である。一般に、式 (66) で示されるように「長さ」が不変で、式 (68) のローレンツ変換に従うベクトルを四元ベクトルと呼ぶ。

特に、時刻 $t = t' = 0$ で両系の原点を出発した光を考える。光の波面は球面上に拡がっていくわけだが、時刻 t,t' における波面上の座標はそれぞれの系で、$(x, y, z), (x', y', z')$ で、式 (69) は、

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, \tag{70}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \tag{71}$$

を意味している。つまり、 K 系と K' 系がどのような相対速度で動いていようとも、どちらの系から見ても、光速は c である、という光速度一定の原理が得られた。

具体的な例を見てみよう。下図のように、K 系の z 軸 (x_3 軸) のプラス方向に、K' 系が速度 v で動いている場合を考える。

この場合のローレンツ変換は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \tag{72}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\gamma\beta \\ 0 & 0 & i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}. \tag{73}$$

ここで、

$$\beta = \frac{v}{c}, \;\; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{74}$$

c は光速である。この変換行列が、直交条件、(67) を満たしていること、転置行列が逆行列になっていること ($a_{ij}^{-1} = a_{ji}$) を確認しておこう。

式 (72),(73) より、

$$x_3' = \gamma(x_3 + i\beta x_4), \tag{75}$$

$$x_3 = \gamma(x_3' - i\beta x_4') \tag{76}$$

である。K' 系の原点は $x_3' = 0$、K 系の原点は $x_3 = 0$ であるが、これらを代入すると、

$$x_3 = v\,t, \tag{77}$$

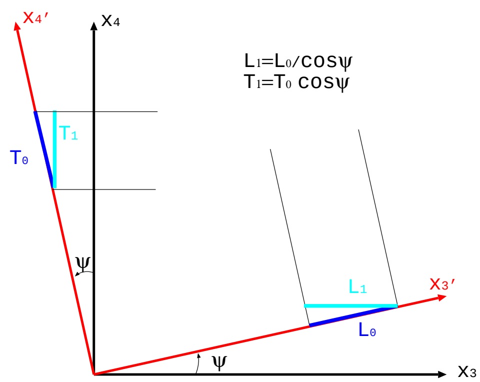
$$x_3' = -v\,t' \tag{78}$$

が得られる。(77) は、K' 系の原点を K 系で表わしたときの関係式、(78) は、K 系の原点を K' 系で表わしたときの関係式で、どちらも自明である。

3 次元の直交変換は、座標系の間の空間回転を表わすのであった。同様に、4 次元の直交変換も、仮想的な回転で表すことができる。式、(72) を以下のように書こう。

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \tag{79}$$

$\cos\psi = \gamma \geq 1$ からわかるように、ここで導入した角度 ψ は仮想的なものであるが、ローレンツ変換を仮想的な座標軸の回転と考えても、以下で示すように、正しい結果が得られる。



K' 系で、x_3' 軸に沿った、長さ L_0 の棒を考えよう。K 系から見ると、この棒は $+z$ 方向に、速度 v で走っていることになる。K でこの棒の長さを測るときには、当然同時刻で測るから、それは、x_3 軸に沿った長さ L_1 になる。図から、

$$L_1 = L_0/\cos\psi \tag{80}$$

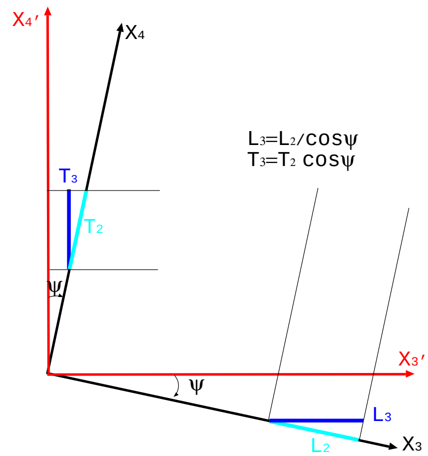
だから、

$$L_1 = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1-(v/c)^2} \leq L_0. \tag{81}$$

よって、走っている棒は短く見える (ローレンツ収縮)。次に、K' 系に固定した点における経過時間 T_0 を考える。これを K 系で測った時間 T_1 は、x_4 軸に沿って、

$$T_1 = T_0 \cos\psi = T_0\,\gamma = \frac{T_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \ge T_0 \tag{82}$$

となる。つまり、動いている時計はゆっくり進んでいるようにみえる[21]。では、K' 系から K 系を見たときはどうなるのであろうか？特殊相対性原理によって、互いに等速運動をしている系から、すべての物理法則は、全く同じに見えなくてはいけない。



上図からわかるように、K 系の x_3 軸に沿った棒の長さ L_2 を K' 系で測定したときの長さ L_3 は、

$$L_3 = L_2/\cos\psi = L_2/\gamma = L_2\sqrt{1-(v/c)^2} \le L_2 \tag{83}$$

となる。また、K 系に固定された点が T_2 の時間経過するとき、K' 系における時間 T_3 は、

$$T_3 = T_2 \cos\psi = T_2\,\gamma = T_2/\sqrt{1-(v/c)^2} \ge T_2 \tag{84}$$

である。式 (81) と (83)、(82) と (84) をそれぞれ比較することにより、K から K' を見ても K' から K を見ても、まったく同じように見えることがわかる。

3.2. 固有時間

式 (69) で示されるように、(x, y, z, ict) の長さはローレンツ不変量であるから、微少なベクトル $(dx, dy, dz, ic\,dt)$ の長さもローレンツ不変である。すなわち、

$$-c^2 d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \tag{85}$$

$$-c^2 d\tau'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 \tag{86}$$

と書いたとき、$d\tau = d\tau'$ である[22]。$d\tau$ は、K 系で静止している $(dx = dy = dz = 0)$ 観測者の測る時間、$d\tau'$ は K' 系で静止している $(dx' = dy' = dz' = 0)$ 観測者の測る時間である。つまり、物体とともに動く時計で測った時間は不変量であり[23]、この τ を固有時間と呼ぶ。

[21] この現象は、例えば素粒子加速器実験では日々観測されている。素粒子固有の寿命 T_0 がごく短くても、それを光速近くまで加速すると、我々が観測する寿命 T_1 は十分長くなるので、そのビームを観測することができる。

[22] 自明ではあるが、式 (72) について、これが成立することを確認しておこう。

[23] だから、例えば 1 秒の絶対的な長さというものを定義することができる。

式 (85) を、

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{87}$$

と書くと、これはまさに式 (82) と同値で、動いている時計はゆっくり進んでいるように見えることを示している。

3.3. 四元速度

すでに見たように、時空点の座標 (x,y,z,ict) やその微少変化量 $(dx,dy,dz,ic\,dt)$ は四元ベクトルの一つである。これを不変量 $d\tau$ で割った

$$\left(\frac{dx}{d\tau},\frac{dy}{d\tau},\frac{dz}{d\tau},ic\frac{dt}{d\tau}\right) \tag{88}$$

も 四元ベクトルであり、これを四元速度と呼ぶ。これを式 (87) を使って、

$$\gamma(v_x,v_y,v_z,ic) \tag{89}$$

と書ける。

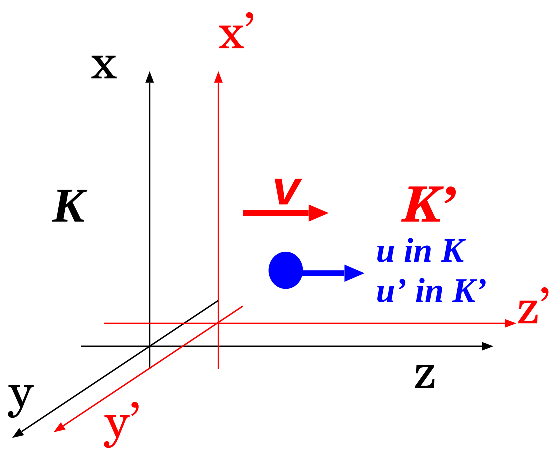
四元速度の長さがローレンツ不変量であることを確認しておこう。

$$\gamma^2(v_x^2+v_y^2+v_z^2-c^2) = \frac{v^2-c^2}{1-(v/c)^2} = -c^2. \tag{90}$$

3.4. 速度の変換則

先に考えた K 系で運動する物体を K' 系で見たときの速度を考えよう。K 系における物体の速度、K' 系における物体の速度、K 系と K' 系の相対速度を区別する必要があることに注意。

先と同じく、K' 系は K 系の $+z$ 軸方向に、K に対して速度 v で動いているとする $\left(\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}\right)$。物体の運動も、$K$ 系から見て $+z$ 軸方向とし、その速度を u とする $(u_x = u_y = 0, u_z = u)$。K' 系から見た物体の速度を u' とする。また、$1/\sqrt{1-(u/c)^2} = \gamma_u, 1/\sqrt{1-(u'/c)^2} = \gamma_{u'}$ とする。



ローレンツ変換の式 (72) と、四元速度の定義 (89) から、

$$\begin{pmatrix} \gamma_{u'}u'_x \\ \gamma_{u'}u'_y \\ \gamma_{u'}u'_z \\ \gamma_{u'}ic \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_u u \\ \gamma_u ic \end{pmatrix}. \tag{91}$$

これから、

$$u'_x = u'_y = 0 \tag{92}$$

$$\gamma_{u'}\, u'_z = \gamma\gamma_u(u-v) \tag{93}$$

$$\gamma_{u'} = \gamma\gamma_u\left(1-\frac{v}{c^2}u\right). \tag{94}$$

(93) と (94) から、

$$u'_z = \frac{u-v}{1-vu/c^2}. \tag{95}$$

x',y' 方向の速度成分がないことがわかったので、単純に、$u'_z = u'$ と書くことにする。上式を解釈してみよう。まず、$u=0$ のとき、$u'=-v$ であるが、K 系に静止しているものを K' 系から見たら、$-z'$ 方向に速さ v で遠ざかることは自明である。

日常生活においては、物体の移動速度は光速に比べてはるかに小さいので、$vu/c^2=0$ と近似してよい。すると上式は $u'=u-v$ と言う、見慣れた式になる[24]。

$u=c$ のときには、v の値には関わらず、$u'=c$ になる。これは光速度不変の原理に他ならない。$u=-0.9c$, $v=0.9c$ としてみよう。非相対論的に考えると、K' 系から見て、物体は $u-v=-1.8c$ で遠ざかっていくことになるが、そんなことは実際にはありえない。式 (95 は、$-0.9945c$ を与える。物体の運動の速度が光速を越えることはありえないのだ。

3.5. 四元運動量

四元速度に質量 m を書けたものを四元運動量と呼ぶ。すなわち、

$$m\gamma(v_x, v_y, v_z, ic) \tag{96}$$

$$\equiv (p_x, p_y, p_z, iE/c). \tag{97}$$

ここで、相対論的には運動量は

$$p = m\gamma v \tag{98}$$

で、エネルギーは、

$$E = m\gamma c^2 \tag{99}$$

で表されることを用いた。$v/c \ll 1$ のとき、$\gamma \approx 1-\frac{1}{2}(v/c)^2$ を用いて、(99) は、

---

[24] 地上でボールを時速 u = 100km で投げる。同じ方向に時速 v = 80km で進む列車から見ると、その速さは $u-v$=100-80=20km であると考えるのが自然であるが、これは本当は正しくない。ここで、厳密に式 (95) を使うと、時速 $(20+1\times10^{-13}) = 20.0000000000001$km になる。

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{100}$$

と近似できる。最初の項が静止エネルギー、二番目の項が、ニュートン力学における通常の運動エネルギーである。

(90) より、四元運動量の長さの二乗は $-m^2c^2$ だから、良く知られたエネルギーと運動量の間の関係式、

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \tag{101}$$

が得られる。

特に、光子など質量がゼロである素粒子の場合は、

$$E = p\,c. \tag{102}$$

光の波長を λ, 振動数を ν とするとき、h をプランク定数として、光子のエネルギーは $E = h\nu$, 運動量は $p = h/\lambda = h\nu/c$ で表わされることを思いだそう。あたりまえだが、光子について、(101) が成立している。

3.6. ドップラー効果と光行差 *(aberration)*

電磁波の伝播を考えるとき、電磁波の波数ベクトルを $\mathbf{k}$ ($|\mathbf{k}| = \omega/c$)、角振動数を ω として、

$$(\mathbf{k}, i\omega/c) \tag{103}$$

は四元ベクトルである。その長さは、

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} - \omega^2/c^2 = 0 \tag{104}$$

となり、ローレンツ不変量であることがわかる。また、四元ベクトル、

$$(x, y, z, ict) \tag{105}$$

との内積をとると、

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t \tag{106}$$

は、電磁波の位相を与え、これもローレンツ不変量である。

K 系と、その z 方向に速度 v で走る K' 系の間のローレンツ変換の式 (72) と、四元速度の定義 (89) から、

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \\ \omega' i/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ \omega i/c \end{pmatrix}. \tag{107}$$

波数の定義から $|\mathbf{k}| = \omega/c$、$|\mathbf{k}'| = \omega'/c$ で、ベクトル $\mathbf{k}$ が yz 平面にあり、電磁波が進む向きと z 軸、z' 軸のなす角を θ, θ' とすると、$k_y = (\omega/c)\sin\theta$、$k'_y = (\omega'/c)\sin\theta'$ $k_z = (\omega/c)\cos\theta$、$k'_z = (\omega'/c)\cos\theta'$ である。よって、(107) を書きくだすと、

$$\omega' \sin\theta' = \omega \sin\theta \tag{108}$$

$$\omega' \cos\theta' = \omega\gamma(\cos\theta - \beta) \tag{109}$$

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \beta\cos\theta) = \frac{\omega}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) \tag{110}$$

となる。式 (108) と (109) の比を取ると、

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)} = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}\sin\theta}{\cos\theta - v/c} \tag{111}$$

が得られる。

式 (110) は、光のドップラー効果に他ならない。$v \ll c$ のとき、$(v/c)^2$ の項を無視すれば、これは

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) \tag{112}$$

となり、音波の場合と同じように、非相対論的なドップラー効果を表す。$(v/c)^2$ の項を無視できないとき、式 (110) で、$\theta = 0$、光源が視線方向と垂直に運動しているときにも波長が変化することに注意。これを横ドップラー効果と呼ぶ。

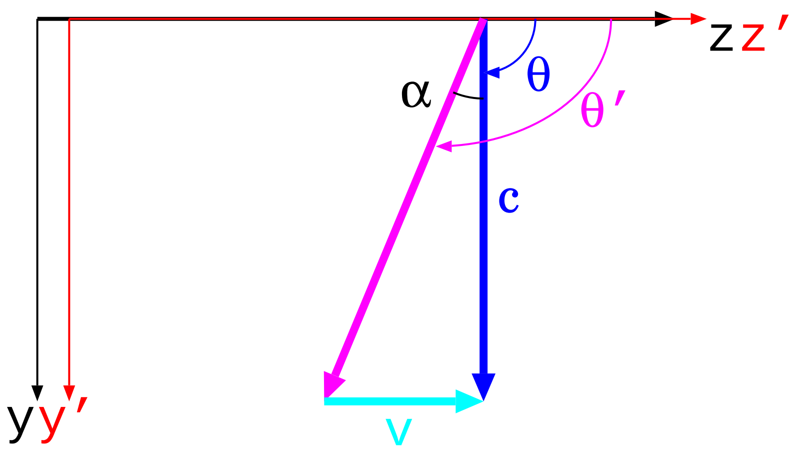
式 (111) は、地球の公転運動によって、星からの光の到来方向が変化する光行差 (aberration) を説明する。地球の公転速度は、$v \approx 30$ km/s, $v/c \approx 10^{-4}$ である。地球の公転面と垂直方向から星の光がやってくるとき、$\theta = 90°$ なので、

$$\tan\theta' = -\frac{c}{v}\sqrt{1-(v/c)^2} \tag{113}$$

である。

$\tan(\theta' - \pi/2) = -1/\tan\theta'$ を使って、$\theta' - \pi/2 = \alpha$ とすると (下図参照)

$$\tan\alpha = \frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{114}$$



非相対論的には、単純にベクトルの大きさから、

$$\tan\alpha = \frac{v}{c} \tag{115}$$

が得られるが、これは式 (114) で、$(v/c)^2$ の項を無視した場合と一致する。

$v/c \approx 10^{-4}$ は、角度では $\sim 20''$ に対応する。地球の公転のために、季節 (地球の公転運動の方向の違い) によって、星の見かけの位置は最大 $\pm 20''$ 変化する[25]。$(v/c)^2 \approx 10^{-8}$ は、角度では ~ 2 marcsec (ミリ秒角) に対応していて、それほど高分解能の観測は電波干渉計によって可能であるが、それ以外のほとんどの天文観測においては装置の位置分解能以下なので、無視しても構わない。

4. 自然界における最も重要な 3 つの定数

今まで、天球上の異なる座標系の間の座標変換 (式 1)、衛星座標と天球座標の間の変換 (式 2)、ローレンツ変換 (式 3) が、三次元空間または四次元時空における回転として、まったく同じ数学を用いて表現される事を見てきた。これらの変換は、空間が歪んでいないので (=線形空間)、ベクトルの長さは保存され、回転行列は場所にはよらなかった (=変換行列に、x,y,z,ct が含まれていない)。ここまでは歪んでいない世界を扱っていたので、このように簡単な数学で物事が済んだ訳だが、次節でみるように、現実の世界では、重力の影響で空間が歪んでくるので (=非線形空間)、変換行列が場所に依存し (=変換行列に、x,y,z,ct が含まれている)、数学的に複雑になってくる。物理的には、これは、重力が存在する場合を扱うには、特殊相対性理論ではなくて一般相対性理論が必要、ということに他ならない。

ニュートン力学を学んでいるときは、基礎的な方程式に重量定数 G は入ってきても、光速 c は入ってこなかった。これは重力によって生じるモノの速さが光速 c に比べてはるかに小さい場合のみを扱ってきたからである。特殊相対論の基礎的な方程式には、どこでも光速 c が出てくるが、重力は扱っていないので、G は出てこない。重力によって生じるモノの速さが光速 c に比べて無視できない場合を扱うのが、一般相対性理論で、その基本方程式には c と G の両方が出てくる。

もう一つ、自然界で重要な定数がプランク定数 h で、これは小さなスケールに於ける物理現象を記述する量子力学に出てくる。ただし、シュレディンガー方程式には h はでてくるが、c も G も出てこない。これは、素粒子が光速に近い速度で動いていることを考慮せず、また素粒子同士の重力を考慮していないからである。実際には、素粒子は光速に近い速さで運動しているので、ローレンツ不変量を定義し、シュレディンガー方程式に特殊相対性理論の効果を考慮したディラック方程式が必要になり、ここには必然的に h と c が出てくる。その後、素粒子論は発展し、現在では、自然界に存在する四つの力、電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用、重力相互作用のうち、重力相互作用をのぞく三つを統一する理論 (h と c を用いて記述される) は完成しつつある。そのような理論を検証するには、素粒子をほとんど光速まで加速して衝突させて、とことんばらばらにする必要があり、そのために CERN の Large Hadolon Collider[26] のような巨大加速器実験が行われている訳である[27]。

---

[25] 光行差と年周視差を混同しないこと。後者は、地球の公転半径が、星の距離に比べ無視できないときに効いてきて、その大きさは星までの距離に依存する。

[26] `http://lhc.web.cern.ch/lhc/`

[27] 素粒子物理学の解説として、おこちゃま向けですが、`http://www.kek.jp/kids` は良く書かれています。

さらに、素粒子間の重力まで考慮に入れて、4つの相互作用を統一的に説明する理論、h、c、G が同時に出てくる理論はあるのだろうか？そのような量子重力理論はまだ存在しない。少なくとも、正しい、と広く受け入れられているものは。また、そのような理論の検証には、言ってみれば素粒子間に働く重力の測定が必要であり、それは地上ではほぼ不可能である。それが実現しているのは、この宇宙ではビッグバンの瞬間にしかないわけで、必然的に素粒子論の研究は、ビッグバンの起源を探る研究になる。

4.1. プランク時間、プランク長、プランク密度

量子重力理論は未だ存在しない訳だが、どのくらいの時間、長さ、質量（密度）のスケールで量子重力理論が必要になってくるかを見積もることはできる。

$$G = 6.6726 \times 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2}\ (\mathrm{m^3/kg/s^2})$$
$$c = 2.9979 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$$
$$h = 6.62607 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s} \quad (\mathrm{kg{\cdot}m^2/s})$$

ただし、h を 2π で割った、$\hbar$ が良く使われる。

$$\hbar = 1.05457 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s} \quad (\mathrm{kg{\cdot}m^2/s})$$

この $G, c, \hbar$ の単位（次元）をグッとにらんで、時間、長さ、質量、さらに密度の単位を作ってみる。これらが、プランク時間、プランク長、プランク質量、プランク密度である。

$$Planck\ Time = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.39 \times 10^{-44}\ [\mathrm{sec}] \tag{116}$$

$$Planck\ Lengh = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.61 \times 10^{-35}\ [\mathrm{m}] \tag{117}$$

$$Planck\ Mass = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.176 \times 10^{-8}\ [\mathrm{kg}] \tag{118}$$

$$Planck\ Density = \frac{c^5}{\hbar G^2} = 5.16 \times 10^{93}\ [\mathrm{g/cm^3}] \tag{119}$$

プランク時間、プランク長が、現在の物理学で考えられる時間と空間の最小単位である（現在知られている物理常数をどう捻っても、これ以上短い時間や空間は作れない、という事）。非常に大雑把に言って、ビッグバンからプランク時間後の宇宙の大きさがプランク長、そのときの宇宙の密度がプランク密度である。そのような物理状態を記述するのが量子重力理論である。

5. 一般相対性理論[28]

5.1. 局所慣性系

互いに等速運動している座標系の間では、式 (69) で与えられる四次元時空中の二点間の「世界間隔」は不変量であった。二つの系の間の座標変換 (ローレンツ変換) は、ベクトルの長さを変えない、四次元時空における回転を表す「直交変換」と考えても良いことを見てきた。

実は、これは重力を及ぼすモノが存在せず、系が加速度運動をしていない場合にのみ成立する。この条件が成立している座標系を慣性系と呼ぶ。慣性系では「時空が平坦」なので、世界間隔は不変である。慣性系においては、ニュートンの第一法則が成立し、「静止しているモノは静止しつづけ、等速運動しているモノは等速運動しつづける」。例えば、慣性系で両手にボールを持って、そっとそれを離してみよう。二つのボールの距離は不変で、それは静止しつづける。

いったいそんな系は現実に存在するのだろうか？現実の世界には完全な慣性系は存在しないが、加速度運動による慣性力と重力は区別できないという等価原理によって、重力と慣性力を打ち消しあった、局所慣性系を定義することができる。局所慣性系を作るもっとも手っ取り早い方法は、重力に身を任せてしまうことである。たとえば、宇宙空間に浮かんで、加速、減速はせず、いろいろな天体からの重力に身を任せている宇宙船の中や、綱の切れたエレベーターの中は局所慣性系である (いわゆる「無重力状態」)。宇宙に行くと重力がなくなる、と言うことはないことに注意。重力は宇宙のどこにでも存在する（万有引力の法則!)。重力に身を任せて自由落下することにより、重力の効果を打ち消すことはできる、というのがポイント[29]。

たとえば、宇宙空間に漂っている (=加速も減速もしていない) 巨大な宇宙船を考えて、その中に互いに等速運動している局所慣性系を考えると、そのあいだの座標変換はローレンツ変換で与えられる。慣性系は局所的にしか存在できないことは、以下の思考実験でわかる。遠方から地球に向かって自由落下する宇宙船を考えよう。あるいは、綱の切れたエレベーターの中でも良い。ボールを 4 つ等間隔に配置する。もしこれが完全な慣性系で空間が歪んでいないならば、ボールの間隔は変化しないはずだが、それぞれのボールは地球の中心に向かって落ちていき、地球の中心に近いほうが重力加速度は大きいので、やがてボール間の横方向の間隔は縮み、縦方向の間隔は伸びる。

このように、一つの系の中で場所によって重力が異なることによって見かけ上生じる力を潮汐力と言う。潮汐力によって 4 つのボールの配置が変化した、と考えても良いし、重力の

---

[28] この節では、”Exploring Black Holes –Introduction to General Relativity”, by Taylor and Wheeler, Addison Wesley Longman を参考にしています。日本語でも英語でも一般相対性理論の教科書は山のようにありますが、僕が見た限り、これが一番直感的でわかりやすい教科書でした (しかし数学的な導出とかは厳密ではありません)。

[29] 地上で「無 (微小) 重力実験」を行っている研究者は、実験カプセルを自由落下させる際に無重力を実現する「微小重力実験塔」や、飛行機を短時間自由落下させて実現する微小重力状態を使っています。日本無重量総合研究所というのがあるそうです (`http://www.mglab.co.jp`)。無重力実験の動画がいろいろあって面白いです。また、「無重力の町」北海道上砂川町には、世界で最大規模の無重力実験施設があったのですが、2003 年に惜しまれながら閉鎖されたそうです (`http://www.noobowsystems.com/scenes/0108-zerogravity/zerogravity.html`)。

影響で、時空が平坦でなくなったと考えても、全く同じ事である (等価原理により、両者は区別できない)。潮汐力の影響が無視できるほど小さな領域で局所慣性系 K を定義することができ、それに相対運動する局所慣性系 K' との間の座標変換はローレンツ変換で与えられる。一方、潮汐力の影響が無視できないほど大きな空間を含んだ系 L を定義すると、そこではニュートンの第一法則がなりたっていないので、これは慣性系ではない。

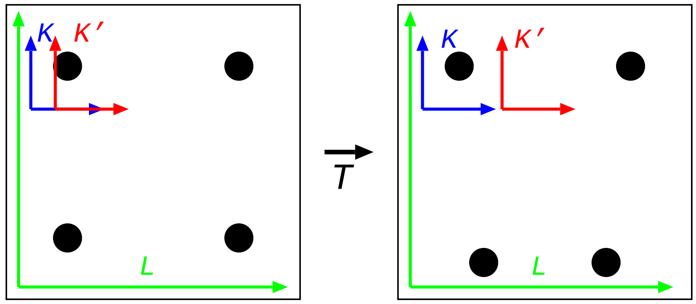


Fig. 3. ある系において、左側のようにボールが配置されていたのが、しばらく時間がたつと、右側のようになった。これは、地球の中心に向かって落下していくエレベーターの中を模式的に示したもの。

一般に、グローバルな慣性系は定義できない (時空は一様でない) ので、(69) は成立せず、代わりに、二つの局所慣性系座標の間に、

$$ds^2 \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 - (c\,dt)^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - (c\,dt')^2 \tag{120}$$

が成立する。ds^2 をメトリック (計量) と呼ぶ。一般相対性理論によれば、任意の座標変換に対して、局所的な世界間隔は不変である。

5.2. シュワルツシルド時空

質量 M を持ち、回転していない球対称な天体を考えよう。重力の影響により、その周りの時空は平坦ではない。それを、シュワルツシルド時空と呼ぶ[30]。その名前は、そのような状況を一般相対論で記述するアインシュタイン方程式の解を、シュワルツシルドが発見した事による。

球対称だから、世界間隔を表わすのに、極座標を用いると便利である。天体の近く、動径座標 r の球殻上の観測者が計る時間を dt_{shell}、r に沿って直接測る距離を dr_{shell} とすると、

$$ds^2 = dr_{shell}^2 + r^2\,d\phi^2 - c^2 dt_{shell}^2 \tag{121}$$

である。ここで、動径座標 r は円周を 2π で割った量として定義される[31]。

十分遠方の観測者が乗っている座標を r, ϕ, t とすると、メトリックは

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} + r^2\,d\phi^2 - c^2\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right)dt^2 \tag{122}$$

と書けることがわかっている。これをシュワルツシルドメトリックと呼ぶ。c は光速、G は万有引力定数である。$2GM/c^2$ が、質量 M の天体のシュワルツシルド半径である。

[30] 回転している天体の周りの時空がカー時空である。

[31] たとえばブラックホールの場合は、シュワルツシルド半径より内側が見えないので、半径を直接測れない。

太陽と地球のシュワルツシルド半径は覚えておこう。$G=6.6726\times10^{-11}$ m^3/kg/s^2、$c=2.9979\times10^8$ m/s、太陽質量=1.989×10^{30} kg、地球質量$=5.9742\times10^{24}$ kg だから、太陽のシュワルツシルド半径は、2.95 km、地球のシュワルツシルド半径は 8.87 mm[32]。

(121) と (122) を比較して、

$$dr_{shell}=\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{2GM/c^2}{r}}}\geq dr \tag{123}$$

(123) は、直接測った動径方向の長さは、円周を 2π で割った長さよりも長いことを示している。具体的な例を考えてみよう。仮に太陽質量のブラックホールがあり (シュワルツシルド半径は 2.95 km)、$r=4$ km から $r=5$ km までの距離を直接、巻き尺を使って計ってみよう。その長さは、

$$\Delta r_{shell}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{2GM/c^2}{r}}}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\sqrt{r}\,dr}{\sqrt{r-2GM/c^2}}. \tag{124}$$

ここで、$r=z^2$ とすると、ちょっと面倒だが積分は計算できて、

$$\Delta r_{shell}=\left|z\sqrt{z^2-2GM/c^2}+2GM/c^2\ \ln\left[z+\sqrt{z^2-2GM/c^2}\right]\right|_{z_1}^{z_2}. \tag{125}$$

$z_1=2,\ z_2=\sqrt{5},\ 2GM/c^2=2.954$ を代入すると、

$$\Delta r_{shell}=7.036-5.313=1.723\ \text{km} \tag{126}$$

が得られる。歪んでいない (=重力が存在していない) 空間では、当然、この距離は 1 km になるはずだが。

また、(121) と (122) から

$$dt_{shell}=\sqrt{1-\frac{2GM/c^2}{r}}\,dt\leq dt \tag{127}$$

である。(127) は、重力が強いところでは、時間の進み方が遅いことを示している。特にシュワルツシルド半径、$r\approx 2GM/c^2$ においては、dt_{shell} に対しても dt は無限大になる。よって、たとえばブラックホールに一定間隔で光を出しながらモノが落ちていくようすを無限遠方から眺めると、シュワルツシルド半径に近づくにつれてその間隔は伸びていき、やがて無限になる (モノがブラックホールに落ちるところは決して観測できない！)。

また、天体の近く r で時間間隔 dt_{shell} の間に N 個の光波が発射されたとき、その場所における光の振動数は $\nu_{shell}=N/dt_{shell}$、無限遠方で観測した同じ光の振動数は $\nu=N/dt$ であるが、(127) より、

$$\nu=\sqrt{1-\frac{2GM/c^2}{r}}\nu_{shell}\leq\nu_{shell} \tag{128}$$

である。これは、強い重力場中から放出された光が、無限遠方で観測すると振動数が小さいほうにずれる (光の波長が長いほうにずれる) ことを示している。これが重力赤方偏移である。

---

[32] 3 km, 9mm と覚えておけば大体事足りる。

ニュートン力学で考えると、質量 M、半径 r の天体の脱出速度 v_{escape} は以下の式から決まる。

$$\frac{1}{2}v_{escape}^2 = \frac{GM}{r} \tag{129}$$

脱出速度は、星の質量が大きいほど，半径が小さいほど大きくなる。上式より、r が無限に小さくなると v_{escape} は無限に大きくなるが、それが光速を超える事はあり得ない。だから、ブラックホールは、その脱出速度が光速であるほど重くて小さい天体、あるいは、同じ事であるが、無限遠方からモノを落としたとき、落下速度が光速になるほど重くて小さい天体、と考えてもよい。実際、(129) より脱出速度が光速 c となる半径は、

$$r = \frac{2GM}{c^2} \tag{130}$$

となり、これは質量 M の天体のシュワルツシルド半径に一致する[33]。

通常の星 (主系列星) は、核融合反応による圧力で形を保っていて、その半径はシュワルツシルド半径よりもはるかに大きい。巨大な星が進化するにつれて核融合反応が進み、星の芯には鉄のコアができる。星が超新星爆発を起こした後に、圧縮されたコアが残される。そのコアが太陽質量の約 3 倍以下であれば、それは中性子星になる。中性子星は中性子間の核力により形を保っている。もしそのコアが太陽質量の約 3 倍以上であるばあいは、中性子間の核力でもその重さを支えられなくなり、重力崩壊を起こしてブラックホールになる。回転していないブラックホールの半径 (のようなもの) が、シュワルツシルド半径と考えてよい。

実際、そのようなブラックホール天体が、数多く観測されている。ブラックホールまたは中性子星が通常の星と連星系を成しているとき、通常の星からブラックホールまたは中性性にモノが回転しながら落ちていくときに円盤を作る。これを降着円盤と呼ぶ。降着円盤のなかの摩擦により、その温度は数千万度になり、それが黒体輻射によって X 線を放出する。このようにして、中性子星はブラックホールは、明るい X 線源として観測される。

では、中性子星とブラックホールはどのようにして見分けるのだろうか？X 線の性質から、中心天体が中性子星かブラックホールか推測はできるのだが[34]、天体の質量を求めるのが最も確実な方法である。連星系において、中性子星またはブラックホールと対をなしている伴星のスペクトル線のドップラー効果からその運動がわかり、中性子星またはブラックホールの及ぼす重力を測定できる。それからその天体の質量に制限がつけられるのである。それが太陽質量の約 3 倍以上であれば、ブラックホールである。

もう一種類、太陽の数百万倍以上の質量を持つブラックホールも存在する。それらは多くの銀河の中心に存在する。やはり、そのまわりの星や円盤の運動を観測することによって、中心天体の重力がわかり、そこから質量が計算できる。我々の銀河の中心にあるブラックホールの質量は、370 万太陽質量である[35]。

---

[33] この導出は一般相対論を使っていないので、厳密ではないことに注意。

[34] これは私の大学院時代からの研究テーマの一つです。

[35] `http://www.mpe.mpg.de/ir/GC/res_dance.php` などを参考に。

地球の半径はそのシュワルツシルド半径に比べてはるかに大きいから、一般相対性理論の効果は、日常生活では、ほとんど効いてこない。しかし、非常に精密な測定によって、一般相対性理論の効果が観測されることがある。その例が GPS (Global Positioning System) である。GPS は、地球の周りをそれぞれ 12 時間で周回する 24 個の衛星を用いている。3 個の衛星からの正確な距離がわかれば、地球上あらゆる場所の位置が正確にわかる。衛星からの距離は、光の発射時刻と受信時刻の差に光速を掛けて求める。時刻の補正には 4 つめの衛星を使う。地球上のどこからでも、(視界が開けていれば) 常に 4 つの衛星が受信できるように、衛星軌道が配置されている。

地球表面で自転運動している観測者と GPS 衛星上で公転運動している観測者を考える[36]。式 (85) と同様に一般相対論でも固有時を考えることができる。式 (121) から、天体から動径座標一定 ($dr_{shell} = 0$) の距離で公転運動している座標系に乗った人 ($d\phi = 0$) の計る固有時間を $d\tau$ とすると、

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 \tag{131}$$

だから、(122) と合わせて、

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} - r^2\, d\phi^2 \tag{132}$$

となる。十分遠方の観測者がこの運動を見ているとき $dr = 0$ だから、

$$c^2 d\tau = c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) dt^2 - r^2 d\phi^2 \tag{133}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} c^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 &= c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \\ &= c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) - v^2. \end{aligned} \tag{134}$$

ここで、v は、地表の自転速度、または GPS 衛星の速度である。(134) を、地表と GPS 衛星について比を取って、

$$\left(\frac{d\tau_{satellite}}{d\tau_{earth}}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{satellite}}\right) - (v_{satellite}/c)^2}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{earth}}\right) - (v_{earth}/c)^2}. \tag{135}$$

この式が、地表における時間と、GPS 衛星における時間の進み方のずれを表す。$r_{satellite}, r_{earth}$ は地球のシュワルツシルド半径に比べてはるかに大きいから、いくつかの近似が可能である。

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx \frac{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{satellite}} - (v_{satellite}/c)^2\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{earth}} - (v_{earth}/c)^2\right)^{1/2}} \tag{136}$$

[36] 地球は回転しているので、厳密にはシュワルツシルドメトリックではなくカーメトリックを使う必要があるが、地球の回転速度は光速に比べて十分小さいので、シュワルツシルドメトリックで十分良い近似になっている。

$$\approx \left(1-\frac{GM/c^2}{r_{satellite}}-(v_{satellite}/c)^2/2\right)\left(1+\frac{GM/c^2}{r_{earth}}+(v_{earth}/c)^2/2\right)$$
$$\approx 1-\frac{GM/c^2}{r_{satellite}}-(v_{satellite}/c)^2/2+\frac{GM/c^2}{r_{earth}}+(v_{earth}/c)^2/2. \tag{137}$$

ここで、$v_{satellite}^2, v_{earth}^2$ の項は、特殊相対論だけからも出てくる事に注意しよう。G が入っている項が、一般相対論の効果、重力による時間の進み方の違いを表す。この式からただちにわかるように、$(GM/c^2)/r_{earth}$ と $(GM/c^2)/r_{satellite}$ はどちらも非常に小さな数であるが、その違いが無視できない、ということが本質的である。

GPS 衛星の周期が 12 時間ということから、$r_{satellite}$ と $v_{satellite}$ を求めよう。円運動の公式から[37]、

$$\frac{v_{satellite}^2}{r_{sattelite}}=\frac{GM}{r_{satellite}^2}, \tag{138}$$
$$P_{satellite}=\frac{2\,\pi\, r_{satellite}}{v_{satellite}}. \tag{139}$$

これを変形して、

$$r_{satellite}=\left(\frac{GMP_{satellite}^2}{4\pi^2c^2}\right)^{1/3}\ c^{2/3}, \tag{140}$$
$$v_{satellite}=\left(\frac{2\pi GM}{P_{satellite}\,c^2}\right)^{1/3}\ c^{2/3}. \tag{141}$$

$GM/c^2=4.4\times 10^{-3}$m、P=12 時間=43200 sec を代入して、$r_{satellite}=2.66\times 10^7$m (2 万 6600km)、$v_{satellite}=3.87\times 10^3$ m/s となる。

$r_{earth}=6.37\times 10^6$m だから、(137) に代入して、運動による $v_{satellite}^2$、v_{earth}^2 の項を無視すると、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}}\approx 1-1.65\times 10^{-10}+6.91\times 10^{-10}\approx 1+5.26\times 10^{-10}. \tag{142}$$

重力の効果だけを考慮した場合、この割合で、地表の時間よりも人工衛星上の時間のほうが、速く進むことになる。ただし、すでに特殊相対論で学んだように、「速く進む時計の時間はゆっくり進む」。よって、さらに人工衛星の速さと地表の速さの違いを考慮すると、このずれは小さくなるはずである。

v_{earth} として赤道上の値を使うと、$v_{earth}=4\times 10^7$ m/86400=463 m/s。(137) に $v_{satellite}$、v_{earth} の項も入れて、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}}\approx 1+5.26\times 10^{-10}-8.32\times 10^{-11}+0.12\times 10^{-11}\approx 1+4.44\times 10^{-10}. \tag{143}$$

一日 (86400 秒) で、このずれは、38 マイクロ秒になる。その間に、光は 11km も進む! これを補正しないと、GPS は全く使いものにならないだろう。

---

[37] この計算には一般相対論を使っていないが、それで精度は十分である。

6. 二体問題

ここまでの講義で、人工衛星 (2 節,5.4 節)、地球の公転運動 (3.6 節)、ブラックホール連星系 (5.3 節) の話題が出てきた。これらは共通して、二つの天体（物体）が重力相互作用を及ぼし合う、二体問題として扱うことができる。これはとても重要かつ美しい古典力学の応用問題なので、ぜひ理解しておきたい。

二体問題は、二つの質点からなる系の運動を解く問題であり、これは解析的に解ける (= 解を式で表すことができる)。二体問題を解いて得られる天体の軌道は、もう片方の天体をひとつの焦点とする楕円、放物線、または双曲線である。これから、ケプラーが惑星の精密観測から発見した経験則、「惑星の軌道は太陽をひとつの焦点とする楕円を描く」というケプラーの第一法則が直ちに導かれる。

宇宙にはたくさんの天体があるわけで、厳密な解を得るにはコンピューターを走らせて、たくさんの連立運動方程式を数値的に解くことが必要なわけだが、多くの場合、二体問題に、他の天体による微細な影響 (摂動) を考えれば十分である。たとえば、人工衛星の運動を解くときは地球の重力のみ、(太陽や月の影響は微少)、惑星の運動を解くときは太陽の重力のみ (他の惑星や恒星の重力は微少) を考えれば、大体、事足りる。

6.1. 二体問題の例

地球の公転:精密な天体観測を行う際、地球の公転運動を考慮に入れることが重要である。たとえば、パルサー (高速回転している中性子星) のタイミング観測を行うとき、地球がパルサーに近づいているか、遠ざかっているかで、見かけ上のパルス周期がドップラー効果に依って変化する。これを補正するために、地球の公転運動を精密に解き、天体からのパルスを解析するときには、そのパルス到達時刻 (pulse-arrival time) を、太陽系重心 (barycenter) で測定した値に直す[38]。これを barycentric correction と呼ぶ。

惑星の運動、人工衛星の運動:惑星と太陽の二体問題を解いて、惑星の軌道は、第 6.8 節で説明する軌道六要素 を用いて記述される。たとえば、「理科年表」を見ると、それらの軌道六要素が記述されている。地球と人工衛星の二体問題を問いて、人工衛星の軌道も、軌道六要素で記述される。地球大気による擾乱や、地球が扁平している効果によって、人工衛星の軌道はゆっくりと変化している。よって、軌道六要素を出す場合は、いつ測定した値であるかを明示する必要である。

惑星や人工衛星の位置を測定した時刻を元期 (エポック、Epoch) と呼ぶ。エポックと軌道六要素が与えられらば、その前後の時刻における惑星や人工衛星の位置は、解析的に求めることができる。人工衛星の「軌道ファイル」には、六要素がエポックの関数として与えられている[39]。

探査機: 地球の重力圏を脱出した探査機は、主に太陽の重力の影響を受け、太陽を焦点とする

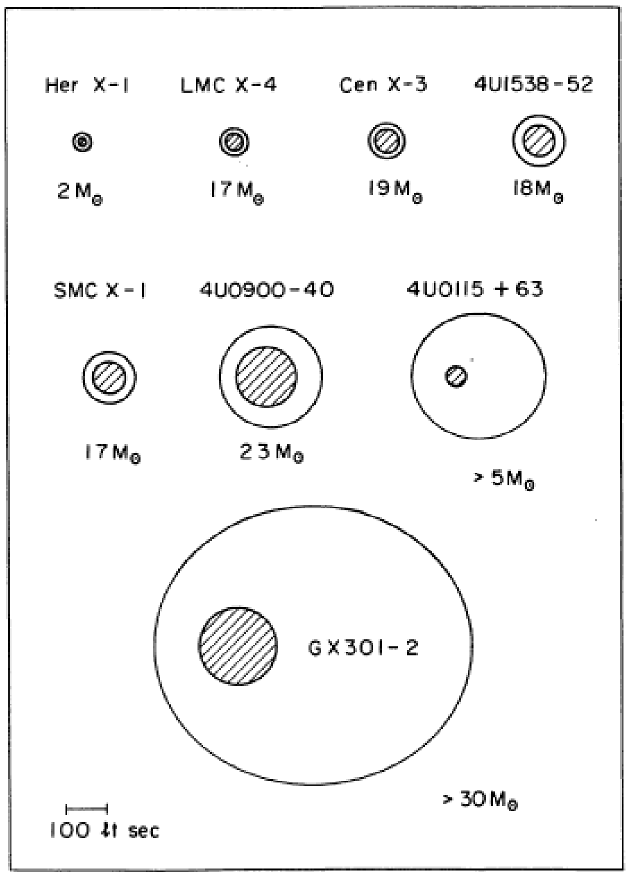
[38] 太陽系重心を求めるにはすべての惑星を考慮にいれるが、木星の影響が一番大きい。それでも、太陽系重心は太陽の中心とはそれほどずれておらず、太陽の中にある。

[39] あるいは、すでに六要素から計算された人工衛星の位置が、より細かい時間ビンで入っていることもある。

ほぼ楕円軌道を描き、太陽系内を運動する。軌道を変えるために、地球や月によるスイングバイを利用する。その時の軌道は、地球や月を焦点とする双曲線、放物線になっている。

X 線連星系: 太陽は連星系ではないが、多くの恒星は、連星系を成している。特に、通常の星とコンパクト星 (白色矮星、中性子星、ブラックホール) から成る連星系は、通常の星からコンパクト星に物質が落ちるときの大きな重力エネルギーが開放されて、**X** 線連星系となる。特にコンパクト星が回転している中性子星の場合、これは **X** 線パルサーとして観測され、公転運動によるドップラー効果の測定から、視線方向の速度がわかり、二体問題を解くことによって、その軌道を正確に決めることができる。

下図が X 線連星パルサーの軌道の例である (Joss and Rappaport, 1984, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 22, 537 より)。それぞれの天体名と、伴星の質量が書いてある。相対的なスケールは正しく示されている (左下の線が 100 光秒)。中性子星の質量はどれも大体 $1.4M_\odot$。4U0115+63($e = 0.34$) や GX301-2($e = 0.47$) は離心率の大きい楕円軌道であるが、離心率もドップラー効果の観測から測定できることに注意。



重力波の間接的検証:

電荷を持った物体が加速度運動すると電磁波を放出するように、質量を持った物体が運動すると重力波が放出される、と一般相対論は予言している。重力波はあまりにも弱いので、

今だ直接検出されていないが、連星パルサーの観測から、間接的に重力波の存在が検証されている。ハルスとテイラーは、PSR 1913+16 という連星パルサーを、プエルトリコにある電波望遠鏡を用い、1974 年の発見以来、長期間モニター観測を行った。その結果、その軌道がほんの少しずつ変化していることがわかった。これはニュートン力学では説明できない。一方、一般相対論によると、重力波の放射によって、連星パルサーはエネルギーを失ない、それによって、徐々に軌道が変化していく。その計算結果と観測された軌道変化がピタリと一致した。これが、今日では (唯一) の重力波の観測的証拠だと考えられている。ハルスとテイラーは、この業績により、1993 年のノーベル物理学賞を受賞した[40]。

6.2. 角運動量、中心力、角運動量保存則

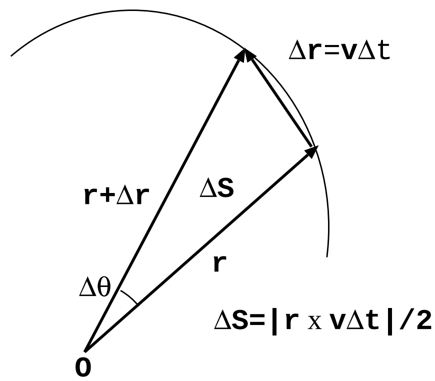
時刻 t における質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と、運動量 $\boldsymbol{p}(t)$ との外積 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ を、原点 O に関する質点の、時刻 t における角運動量と言う (以下、$\boldsymbol{l}$ で表す。)。

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}. \tag{144}$$

角運動量ベクトルは、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ を含む平面に垂直で、その向きは、$\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{l}$ が右手系をなす向きである。質点が原点の周りに描く扇型の面積速度は

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) \tag{145}$$

であるから、角運動量は面積速度の $2m$ 倍である。



(144) 式を微分し、運動方程式 $d\boldsymbol{p}/dt=\boldsymbol{F}$ を用いると、

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}. \tag{146}$$

右辺を力のモーメントまたはトルクと呼ぶ。ある時刻における質点の角運動量の時間変化の割合は、その時刻に質点に作用する力のモーメントに等しい。

特に、力のモーメントがゼロの時、角運動量は一定に保たれる。これを角運動量保存則、あるいは面積速度保存則と言う。力がゼロでなくても、それが働く方向が原点 O を通る場合 (中心力)、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ は平行なので、$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=0$。よって、質点が重力によって原点 **O** に引かれながら運動するとき、**O** の周りの角運動量と面積速度は運動中一定に保たれる。これから、「惑星と

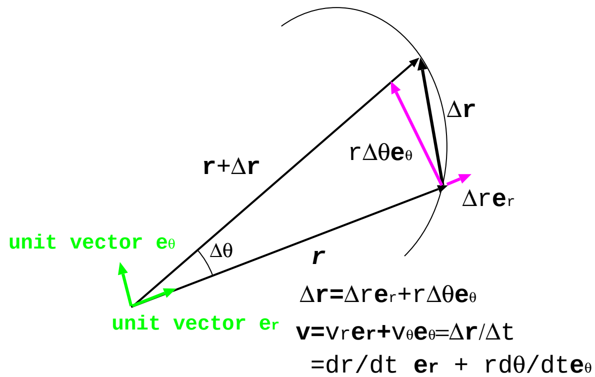
[40] http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1993/press.html 参照。

太陽を結ぶ動径は、単位時間に一定の面積を掃く」というケプラーの第二法則が導かれる。

角運動量の大きさ $|\boldsymbol{l}|$ を h とする。速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{r}$ に平行な成分 v_r と垂直な成分 v_θ に分解すると、下図からわかるように、

$$v_r = dr/dt, v_\theta = r d\theta/dt \tag{147}$$

である。



$h = mrv_\theta$ だから、

$$h = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \tag{148}$$

である。

6.3. 換算質量

天体が原点 O の重力に引かれて運動するときは、O の周りの角運動量が保存するので、その問題は簡単になる。しかし、一般に二つの天体が重力で引きあっているときには、両方の運動を考えなくてはいけないので、問題は複雑になるのではないだろうか？その心配がないことを以下で述べる。

例として、惑星 (質量 m) が太陽 (質量 M) のまわりを公転運動する場合を考えよう。それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ とすれば、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F},\ M\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -\boldsymbol{F}. \tag{149}$$

これを足しあわせると、

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\boldsymbol{r}_1 + M\boldsymbol{r}_2) = 0. \tag{150}$$

ところで、$\boldsymbol{R} \equiv (m\boldsymbol{r}_1 + M\boldsymbol{r}_2)/(m+M)$ は、惑星と太陽の重心の位置ベクトルを表わすから、上式は、$d^2\boldsymbol{R}/dt^2 = 0$, すなわち重心は等速運動をする (初速度がゼロならば静止している) ことを示している。

一方、(149) から次式も導ける。

$$\frac{mM}{m+M}\frac{d^2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{dt^2} = \boldsymbol{F}. \tag{151}$$

これは、太陽に対する惑星の位置 $(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$ に、換算質量 $\frac{mM}{m+M}$ の天体がある場合の運動を表わす運動方程式である。

一般に二つの質点が互いに力を及ぼしあって運動するとき、個々の質点の運動方程式を、質量中心の運動方程式と、一方の質点が静止しているかのようにみなしたときの他方の質点の運動方程式 (ただし、質量が換算質量にかわっている) に書き換えることができる。二体問題 (149) を解くかわりに、それと等価な一体問題 (151) を解けば良いことになる。

6.4. 人工衛星の軌道、惑星の軌道

地球の周りの人工衛星の軌道や、太陽のまわりの惑星の軌道を考えてみよう。以下で、m は人工衛星または惑星の換算質量、$\boldsymbol{r}$ は、地球中心に相対的な人工衛星の位置、あるいは太陽に相対的な惑星の位置を示す。

まず、運動方程式をたてる。

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F} \tag{152}$$

であるが、動径方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ とそれと直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ を基底する極座標で考える。惑星の速度ベクトルは $d\boldsymbol{r}/dt=d(r\boldsymbol{e}_r)/dt=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\boldsymbol{e}}_r=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$ で表される。さらにそれを微分して、

$$d^2\boldsymbol{r}/dt^2=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \tag{153}$$

よって、運動方程式を動径方向、角度方向に分解して書きくだすと、それぞれ、

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-\frac{GMm}{r^2} \tag{154}$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=0 \tag{155}$$

となる。(148) を用いて、(155) は

$$\frac{1}{r}\frac{dh}{dt}=0 \tag{156}$$

と書ける。これはまさに角運動量保存則に他ならない。

また、(154) は、やはり (148) を用いて、

$$m\ddot{r}-\frac{h^2}{mr^3}=-\frac{GMm}{r^2} \tag{157}$$

とかける。$\dot{r}=dr/dt=v_r$ であることに注意して、上式を積分する。

$$m\frac{dv_r}{dt}-\frac{h^2}{mr^3}=-\frac{GMm}{r^2} \tag{158}$$

$$m\frac{dv_r}{dt}dr-\frac{h^2}{mr^3}dr=-\frac{GMm}{r^2}dr \tag{159}$$

$$m\int v_r dv_r-\int\frac{h^2}{mr^3}dr=-\int\frac{GMm}{r^2}dr \tag{160}$$

$$\frac{m}{2}v_r^2+\frac{h^2}{2mr^2}=\frac{GMm}{r}+E \tag{161}$$

$$\frac{m}{2}(v_r^2+v_\theta^2)-\frac{GMm}{r}=E. \tag{162}$$

ここで、積分定数を E とした。これは、エネルギー保存則に他ならない。

ここで (148) から、

$$\frac{d}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}=\frac{h}{mr^2}\frac{d}{d\theta}. \tag{163}$$

よって、独立変数を時刻 t から θ に変換して (161) は、

$$\frac{m}{2}\left(\frac{h}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{h^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}=E \tag{164}$$

と書ける。この微分方程式が r と θ の関係を与えるので、r を θ の関数として求めれば、惑星の軌道が求められたことになる。ここで、$1/r=u$ と変数を変換すると、以下のように変形できる。

$$\frac{h^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{h^2u^2}{2m}-GMmu=E, \tag{165}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\left(u-\frac{GMm^2}{h^2}\right)^2-\frac{G^2M^2m^4}{h^4}=\frac{2mE}{h^2}, \tag{166}$$

$$\pm\frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{h^2}+\frac{G^2M^2m^4}{h^4}-\left(u-\frac{GMm^2}{h^2}\right)^2}}=d\theta. \tag{167}$$

ここで積分公式、$\int dx/\sqrt{a^2-x^2}=\cos^{-1}(x/a)$ を用いて、

$$\pm\cos^{-1}\frac{u-\frac{GMm^2}{h^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{h^2}+\frac{G^2M^2m^4}{h^4}}}=\theta. \tag{168}$$

よって、

$$r=\frac{\frac{h^2}{GMm^2}}{1+\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{G^2M^2m^3}}\cos\theta}. \tag{169}$$

ここで、

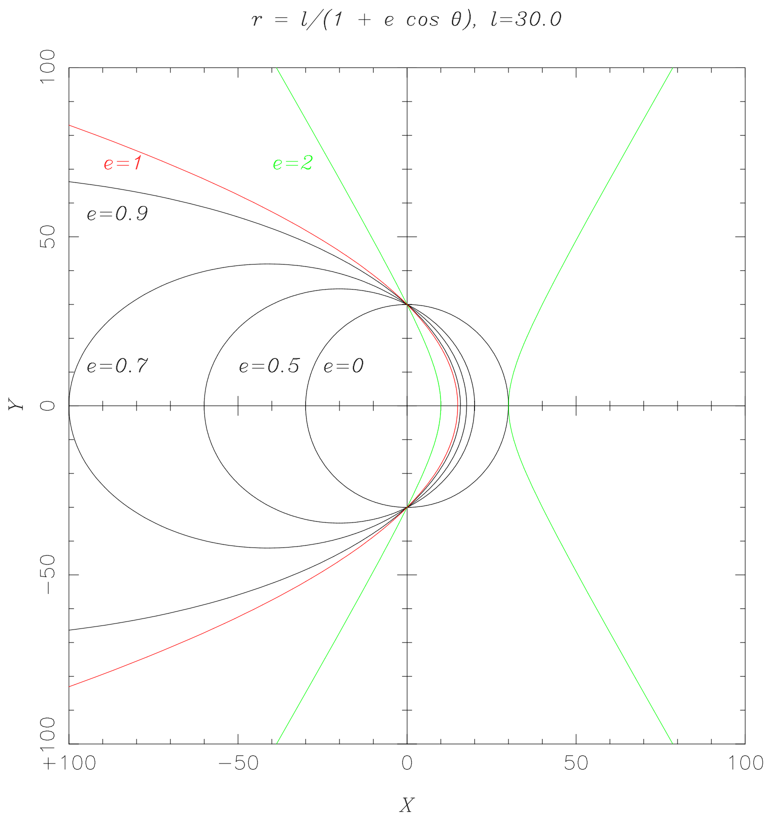
$$l\equiv\frac{h^2}{GMm^2}, \tag{170}$$

$$e\equiv\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{G^2M^2m^3}} \tag{171}$$

と定義すれば、(169) は、

$$r=\frac{l}{1+e\cos\theta}. \tag{172}$$

と書ける。これは原点 (太陽または地球) を焦点の一つとする円錐曲線の式で、e は離心率、l は半直弦と呼ばれる。円錐曲線は、円錐を任意の断面で切ったときの断面の形で、楕円 ($e<1$)、放物線 ($e=1$)、双曲線 ($e>1$)、のいずれかである。下図に、異なる離心率の円錐曲線の例を示す。



実際に太陽の周りの惑星 (彗星) や地球の周りの人工衛星 (探査機) の軌道も、楕円、放物線、双曲線のどれかである。(171) より、離心率 $e<1, e=1, e>1$ はそれぞれエネルギー $E<0, E=0, E>0$ に対応している。すなわち、全エネルギー E が負のときは、人工衛星は地球の重力に束縛されて、地球の周りを楕円軌道を描いて周回する。運動エネルギーが増加するにつれ、離心率が大きくなり、やがて軌道は放物線となり、人工衛星は地球の重力圏を脱出する。無限遠でエネルギーはゼロになる。さらに運動エネルギーが大きい場合は、双極線軌道になり、無限遠でも正のエネルギーを持つ。

6.5. 楕円軌道

楕円は、二つの焦点からの距離の和が等しい点をつなげたものである。下図のように長半径を a、短半径を b とする。楕円の面積は πab で与えられる。

$\theta=0$ の点が A,$\theta=\pi/2$ の点が Q,$\theta=\pi$ の点が C である。右側の焦点、F からの距離を考える。A が近日点、C が遠日点である。

下図と (172) より、$r_A = l/(1+e), r_Q = l, r_C = l/(1-e)$。よって、

$$r_A + r_C = 2a = l/(1+e) + l/(1-e) = 2l/(1-e^2). \tag{173}$$

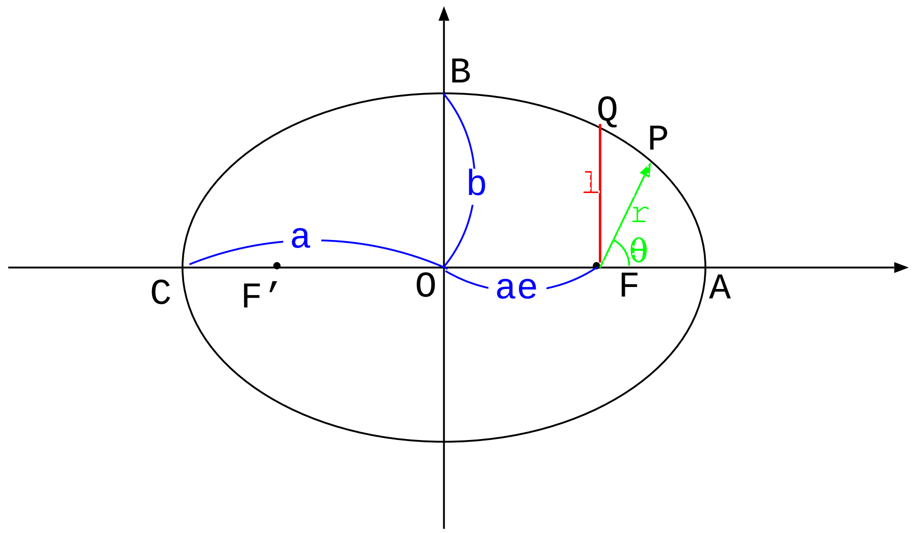
これから、長半径は

$$a = l/(1-e^2) \tag{174}$$

と書けることがわかる。よって、

$$r_A = \frac{l}{1+e} = a\frac{1-e^2}{1+e} = a(1-e) \tag{175}$$

だから、下図に書いてあるとおり $OF = a - a(1-e) = ae$ である。



次に短半径を a と e で表わす。楕円の定義より、$BF + BF' = FA + F'A$ である。

$$BF + BF' = 2\sqrt{a^2e^2 + b^2}, FA + F'A = a(1-e) + 2ae + a(1-e) = 2a. \tag{176}$$

よって、

$$b^2 = a^2(1-e^2) = al. \tag{177}$$

ここで、(174) を使った。

(170),(171) と (174) より、

$$a = -GMm/2E. \tag{178}$$

つまり、軌道長半径は、エネルギー E だけで決まる。同様に、(177) と (170) を使って、

$$b^2 = -h^2/2Em. \tag{179}$$

これら二つの式は、M,m,E,h が与えられらば、一意的に a,b、つまり楕円軌道が決まることを表わしている。

6.6. ケプラーの第三法則

楕円の長半径を a、短半径を b としたとき、その面積は πab で与えられる。角運動量を h、天体の質量を m とするとすると、面積速度は $h/2m$ である。よって、天体の公転周期 T は、

$$T = \frac{\pi ab}{h/2m}. \tag{180}$$

である。ここで、(177) と (170) を使って、$b = \sqrt{al} = \frac{h}{m}\sqrt{\frac{a}{GM}}$ だから、

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}. \tag{181}$$

これが、「惑星の公転周期の二乗が軌道長半径の三乗に比例する」、というケプラーの第三法則である。

6.7. 円軌道の場合

円運動の場合 (離心率 $e=0$) の運動方程式は、半径 r、公転速度を v として、

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{GMm}{r^2} \tag{182}$$

である。周期 T は、$T=2\pi r/v$ だから、

$$T=\frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \tag{183}$$

となり、ケプラーの第三法則が得られた。

6.8. 軌道六要素

ある時刻 (エポック) における人工衛星の軌道 (一般に楕円軌道) と位置は、以下で示す軌道六要素を用いて記述できる。図 4 は「人工衛星の力学と制御ハンドブック」より[41]。

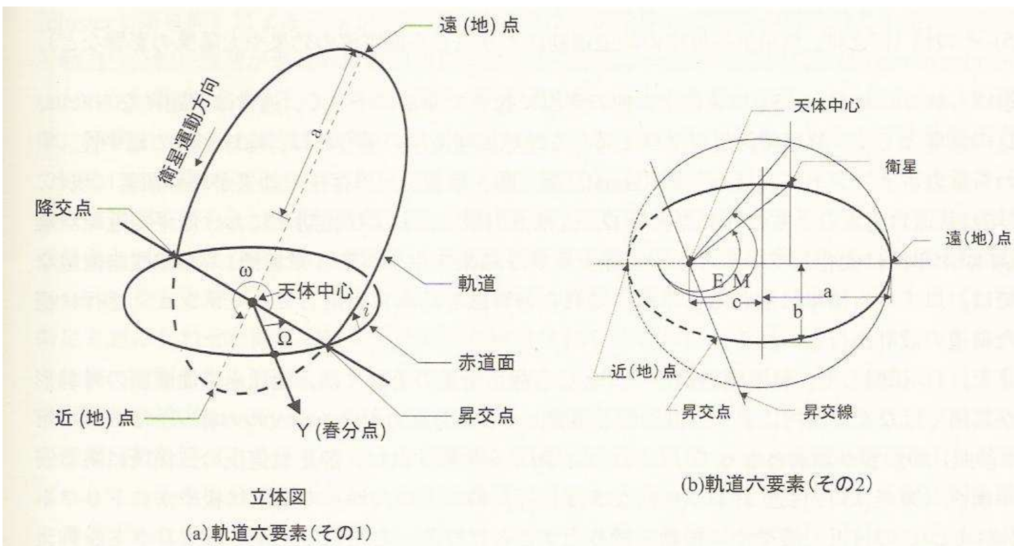


Fig. 4. 人工衛星の軌道を記述する軌道六要素。「人工衛星の力学と制御ハンドブック」

- a:軌道長半径 (semi-major axis)。円軌道のときは、円の半径。
- e:離心率 (eccentricity) $e=0$ は円軌道。
- i:軌道傾斜角 (inclination)。地球の赤道面と人工衛星の軌道面がなす角度。
- Ω:昇交点赤経 (right ascension of the ascending node)。$i\neq 0$ のとき、地球の赤道面と人工衛星の軌道面が交差する点の赤経。
- ω:近地点引数 (argument of perigee)。楕円軌道の場合、昇交点から測って近地点が軌道面上のどこに来るかを表わす。

以上 5 つのパラメーターで軌道は決まる。

[41] http://spaceflight.nasa.gov/realdata/elements/graphs.html も参考に

- M:平均近点離角 (mean anomaly)。与えられたエポックにおける人工衛星の軌道上での位置を表す。

図 5 に、1987 年 2 月 5 日に打ちあげられ、1991 年 11 月 1 日に大気圏に再突入した「ぎんが」衛星の軌道六要素の時間変化を示す。$e \approx 0$ から、ほぼ円軌道であることがわかる。地球

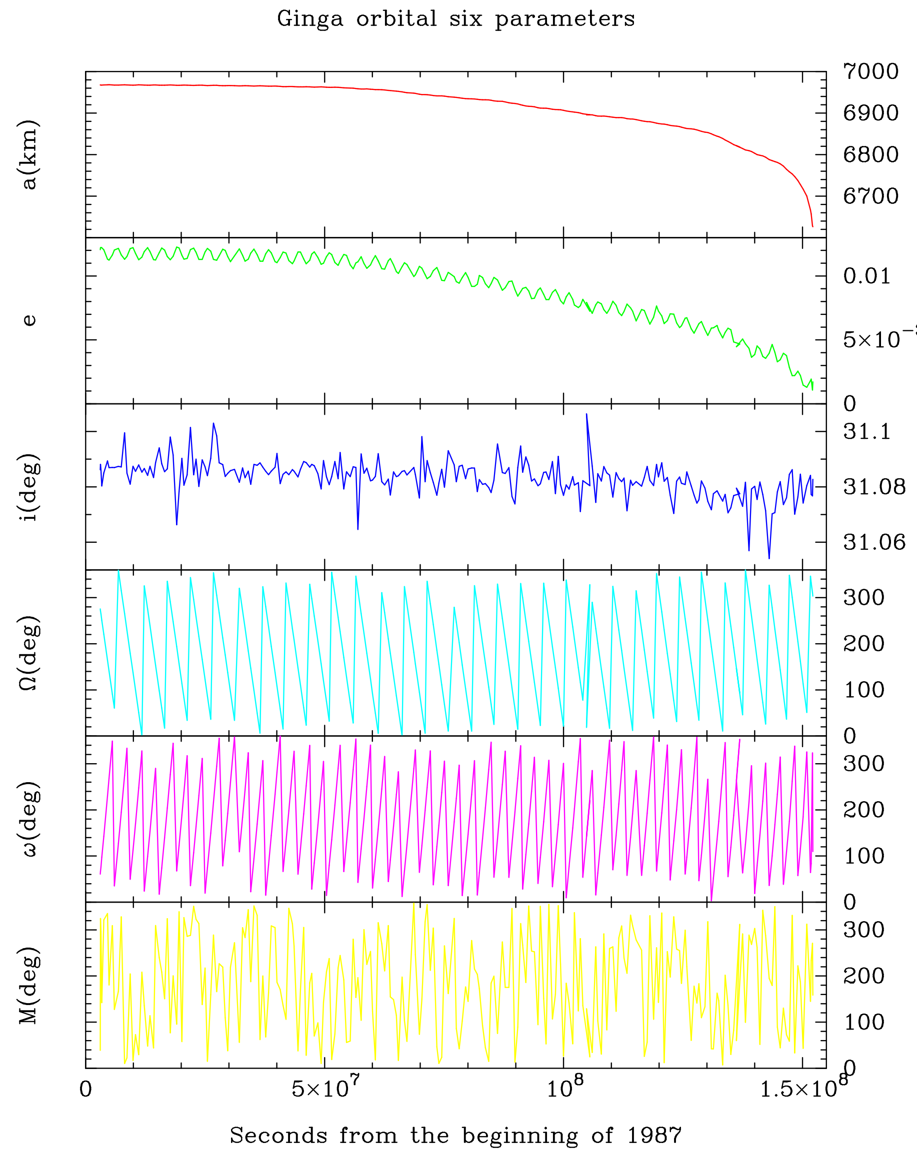


Fig. 5. ぎんが衛星の軌道六要素の打ち上げから大気圏再突入までの時間変化。

の半径は、約 6378km だから、ぎんが衛星の打ち上げ時の高度は、約 550 km。軌道傾斜角 i が、「ぎんが」衛星が打ち上げられた内之浦宇宙空間観測所の緯度に対応していることに注意しよう。地球の自転速度を稼ぐために、人工衛星は真東に打たれる。その結果、軌道傾斜角が打ち上げ地の緯度に一致することになる。

もし衛星の軌道の地球に対する相対的な位置が不変ならば、Ω も a, e, i と同じくほぼ一定のはずであるが、Ω は周期的に変化している。これは、地球が扁平である影響で人工衛星の

軌道面が歳差運動をしているためである。ほぼ円軌道なので、近地点の位置を表わすωはあまり意味を持たない。

ミッションの終了近くになって、大気の摩擦のために、急激にaが減少 (衛星が降下) していることがわかる。また、もともと離心率は小さくほぼ円軌道であったが、衛星が降下するにつれて、さらに円軌道からのずれが「なまされて」、離心率も減少していることがわかる。

式 (181) より、aから衛星の公転周期が求められる。地球のシュワルツシルド半径、$2GM/c^2 = 8.87$ mm を使うと、以下のように簡単に計算できる。

$$T = \frac{2\sqrt{2}\pi a^{3/2}/c}{\sqrt{2GM/c^2}} = \frac{2\sqrt{2}\pi (a/6900\,\mathrm{km})^{3/2}(6900\,\mathrm{km})^{3/2}/(300000\,\mathrm{km/s})}{\sqrt{8.87\,\mathrm{mm}}}$$
$$= 95\,\mathrm{min}(a/6900\,\mathrm{km})^{3/2}. \qquad (184)$$

このようにして求められた公転周期とaの関係を図6に示す。

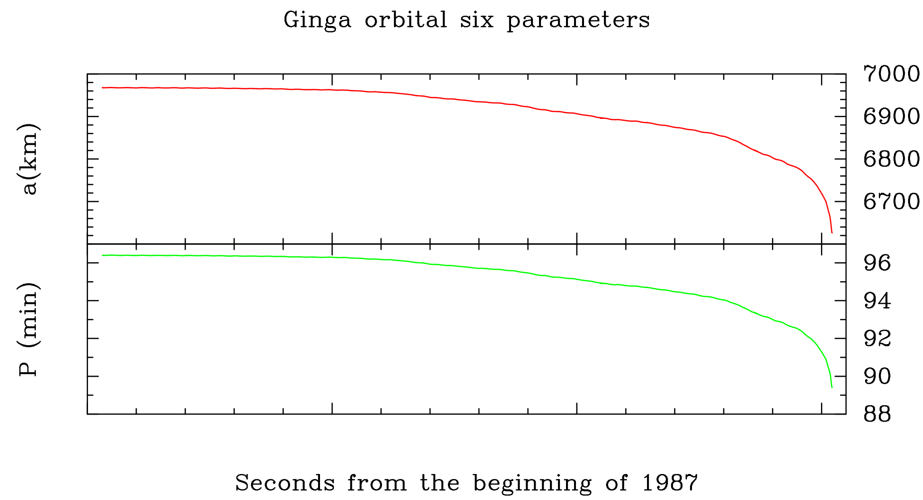


Fig. 6. ぎんが衛星の打ち上げから大気圏再突入までの軌道長半径と周期の変化。

ぎんが衛星のように低高度の衛星は、一日に地球の周りを約15周することがわかる。

6.9. 静止衛星

地球の自転周期は23時間56分4.09秒である[42]。(184) から、人工衛星の公転周期が自転周期と等しくなるのは、$a = 42200$ km のとき (高度は約35800 km)。赤道上、この高さにある衛星は地表から見て静止しているように見えるので、静止衛星と呼ばれる。常に地表から見えている必要がある通信衛星、放送衛星、気象衛星などは、静止軌道に打ち上げられる。

6.10. *Two Line Elements*

軌道六要素で衛星の軌道とある時刻における位置を表わすことができるわけだが、それと等価な情報とさらに衛星名、国際識別番号などを付加した情報を記述する、**Two Line Elements** (TLE) と言う標準的なフォーマットがある。

[42] 24時間ではないことに注意。太陽に対して同じ向きになる周期が1日=24時間。

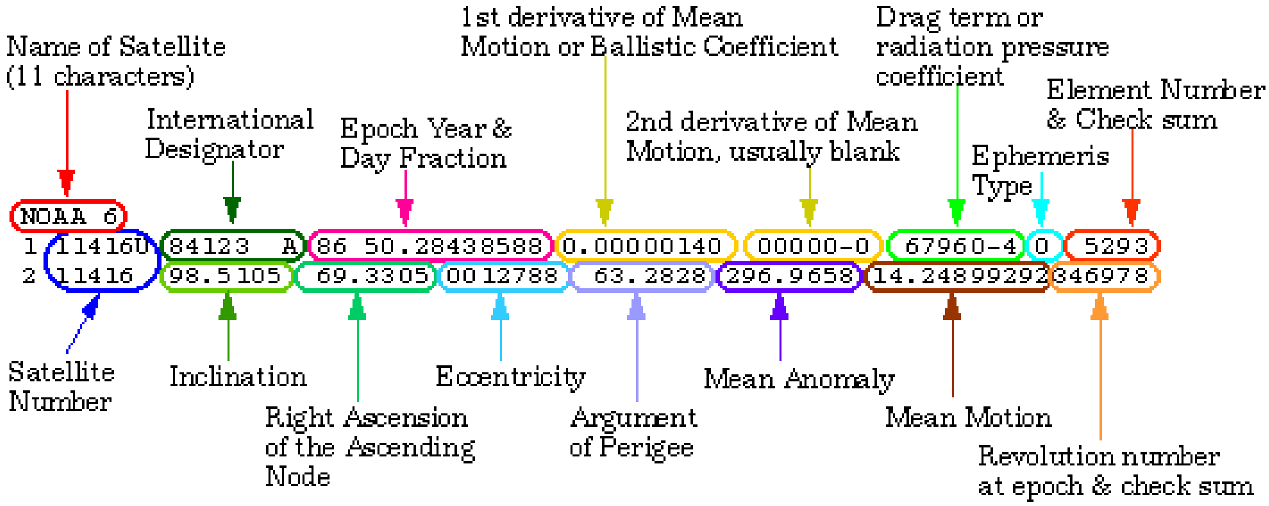


Fig. 7. 人工衛星の軌道と位置を記述する Two Line Elements (TLE) の説明。`http://science.nasa.gov/Realtime/rocket_sci/orbmech/state/2line.html` より。

NORAD (NORth American aerospace Defence Command; 北アメリカ航空宇宙防衛司令部;`http://www.norad.mil`) は、地球の周りを周回している (ほぼ) すべての人工衛星をモニターし、その軌道要素を TLE で公開している。TLE の説明については、`http://science.nasa.gov/Realtime/rocket_sci/orbmech/state/2line.html` を参照。そこから TLE の定義を図7に再掲する。

軌道長半径 a の代わりに、一日あたりの周回数である、”Mean Motion” が使われていることに注意。いくつかの衛星について、具体的な TLE の値を見てみよう。現在地球を周回している衛星の最新の TLE は、たとえば `http://celestrak.com` から入手できる。

```
SUZAKU
1 28773U 05025A   08013.93865221  .00000558  00000-0  37528-4 0  6575
2 28773  31.4061 323.8498 0007001 164.9250 195.1602 15.00529329137995
ASTRO-F (AKARI)
1 28939U 06005A   08014.23580039  .00000005  00000-0  11192-4 0  6030
2 28939  98.2316  16.5778 0008622   0.3484 359.7729 14.57435459100351
HINODE (SOLAR-B)
1 29479U 06041A   08013.94377495  .00000087  00000-0  26130-4 0  4426
2 29479  98.0789  23.2007 0014564 229.4553 130.5382 14.62802560 69920
INTEGRAL
1 27540U 02048A   08012.45833333  .00000061  00000-0  10000-3 0  6500
2 27540  86.3672  23.5282 7969010 276.7243 358.3858  0.33418208  2558
HIMAWARI 6
1 28622U 05006A   08014.77456198 -.00000264  00000-0  10000-3 0  4588
2 28622   0.0211  76.8046 0002163  49.6656  46.0362  1.00271868 10549
```

これから、以下のことが読みとれる。(1) すざく (X 線天文衛星)、あかり (赤外線天文衛星)、ひので (太陽天文衛星) は、一日に約 15 周回する、低軌道衛星である。ひまわりは一日に一周回する、静止衛星である。INTEGRAL 衛星は三日で一周する、大きな軌道である。(2) INTEGRAL は離心率が大きな楕円軌道を持つが、他の衛星はほぼ円軌道である。(3) すざくの軌道傾斜角は、ぎんがと同じく、内之浦から真東に打ちだしているので、内之浦の緯度に対応して 31.4 度である。ひまわりは赤道上の静止衛星なので、軌道傾斜角は 0 度。あかり、ひのでの軌道は、赤道とほぼ直交している。この二つの衛星は太陽同期軌道を持ち、軌道面が常に太陽を向いていて、ちょうど昼と夜の境目を周回している。それによって、ひのでは常に太陽を観測することが可能である。一方、あかりは、つねに地球と反対向きの空を観測することが可能になっている[43]。

巷に、TLE から衛星軌道を計算したり表示させたりするプログラムが溢れている。たとえば、`http://science.nasa.gov/Realtime/jtrack/3d/JTrack3D.html`、`http://www.lizard-tail.com/isana/tracking` などを参照。前者は、衛星の軌道を 3 次元的に表示し、そのスケールや向きをインターアクティブに変更できる。後者は、Google map 上に衛星の位置をリアルタイムで表示できる。

7. 統計入門

理科系の大学生だったら、1, 2 年生で、確率・統計の講義はおそらく必修だろう。私もそうだったが、大学院になって真剣に X 線衛星データ解析をおこなう段になって、「これほど統計が重要だったら、もっと早く言ってくれよ！」、という気持ちになった。どんな研究、仕事でもそうだが、実際に、現場でそれに携わって手を下すまでは、そこで必要とされているツールの重要性はなかなかわからないものである[44]。

ここでは、普段、私たちが研究の現場で使っている統計の知識を、えいやっと、できるだけ短く詰め込んでみる (“Statistics in a Nutshell”)。

7.1. ポアソン分布

図 8 の光度曲線（ライトカーブ）は、実際の X 線衛星データから取ってきたものである。

暗い天体を観測し、一秒ごとに、X 線検出器に入射する X 線の数を、100 秒の間、カウントした[45]。その値を書き下してみると、以下の通りである。

0 0 2 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 4 0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 4 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 2 0 0 0 2 1 1 1 2 1 0 0 0 1 0 1 1 2 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 2 0 0 0 1 0 0 2 0 2 0 1 0

全部で 100 ビンのうち、0 カウントのビンが 59、1 カウントが 31 ビン、2 カウントが 8 ビン、3 カウントが 0 ビン、4 カウントが 2 ビンあることがわかるだろう。これを、1 ビンに光

---

[43] 地球は赤外線を出すので、赤外線衛星にとってはノイズ源になる。

[44] だからこそ、この講義は一般教養で学ぶ基礎的な勉強と研究の最先端の現場をつなぐような意識でやっているのだが…。

[45] 観測を行っている時間間隔の単位をビン (bin) と呼ぶ。つまり、ここでは幅が一秒のビンが 100 ビンある。

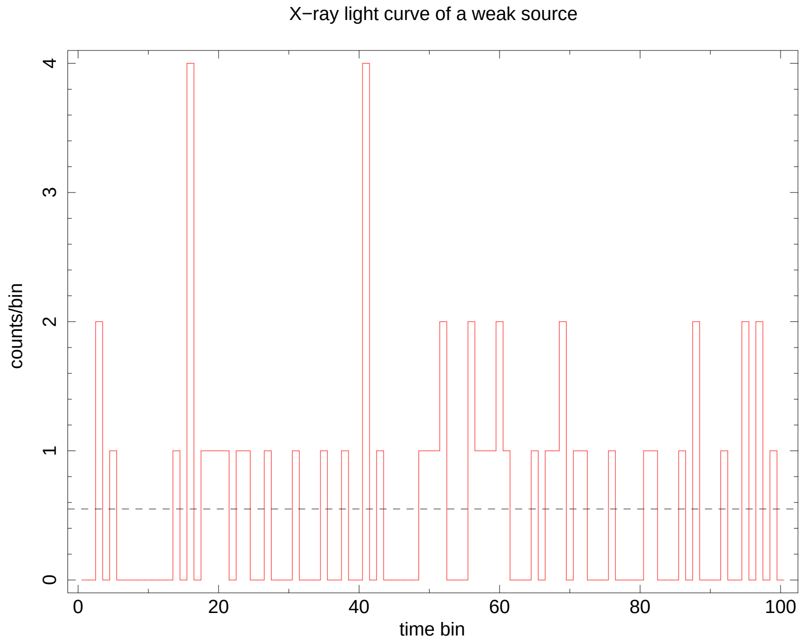


Fig. 8. 暗い X 線天体を 1 ビン 1 秒で、100 秒観測したときの光度曲線。横軸は時間、縦軸は、1 ビンあたりの X 線光子数。平均値 0.55 に横線を引いた。

子が 0, 1, 2, 3, 4 カウント入る確率は、それぞれ、0.59, 0.31, 0.08, 0, 0.02 と考えても良い。そのヒストグラムは、図 9 の通り。また、平均値は、$(1 \times 31 + 2 \times 8 + 4 \times 2)/100 = 0.55$ である。

図 9 で赤丸で示したのは、以下の式で、$\mu = 0.55$ のときに、 $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ,$ に対応する点である。

$$P_P(i;\mu) = \frac{\mu^i}{i!}e^{-\mu} \tag{185}$$

この式が、平均 μ のポアソン分布に他ならない（μ は実数であるが、i は整数値、$0, 1, 2, 3, ,$ の場合にのみポアソン分布が定義されている事に注意せよ）。ポアソン分布の具体的解釈の一つの例として、検出装置の 1 ビンに平均 μ 個の割合で光子が入射してくる場合を考える。統計的な揺らぎにより、実際に 1 ビンあたりに検出される光子の数は、μ のまわりでばらつく。実際に検出される光子数が $i = 0, 1, 2, 3, , ,$ である確率が、(185) で与えられる。この状況が図 9、図 11 で示されている訳である。「天体を観測したとき、**1** 時間ビンあたりに落ちる光子数の分布はポアソン分布に従う」ことを覚えておこう[46]。

式 (185) は暗記してしまうと良い。思い出すために手がかりと成るのは、平均 μ のとき、1 ビンに全く光子が入らない確率は、$e^{-\mu}$ ということである。

当然であるが、平均 μ の値によらず、1 ビンに入る光子数 i が 0,1,2,3,,, である確率をすべて足すと 1 になることに注意しよう。

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_P(i;\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!}e^{-\mu} = e^{-\mu}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mu^i}{i!} = e^{-\mu}e^{\mu} = 1. \tag{186}$$

[46] ただし、ここで天体に固有の時間変動は存在しない事を仮定している。たとえば、自転しているパルサー、爆発的に増光するバースターなどの時間変動はここでは考えていない。

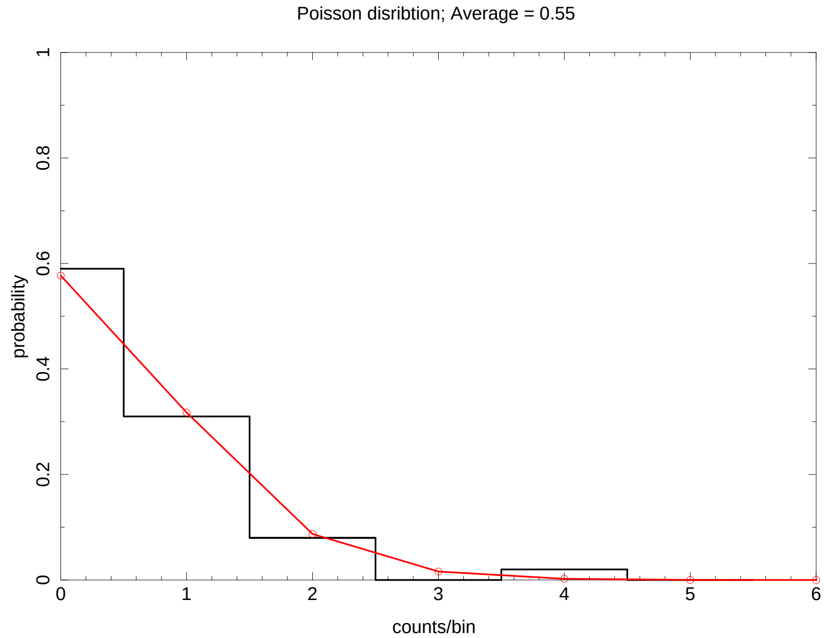


Fig. 9. 観測された X 線データのヒストグラム（黒）と平均 0.55 のポアソン分布（赤）。

また、すでに「式 (185) の分布の平均は μ」、と言ってしまっている訳だが、平均 (mean) の定義からその値が μ になることを確認しておこう。

$$Mean \equiv \sum_{i=0}^{\infty} i\, P_P(i;\mu) = \sum_{i=i}^{\infty} i\, P_P(i;\mu) = e^{-\mu} \sum_{i=1}^{\infty} i\, \frac{\mu^i}{i!} = e^{-\mu}\, \mu \sum_{i-1=0}^{\infty} \frac{\mu^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$= e^{-\mu}\, \mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu}\, \mu\, e^{\mu} = \mu. \tag{187}$$

さて、一般の確率分布関数で、平均の回りにその分布がどれだけばらついているか、を分散 (Variance) で表す[47]。分散が大きいほど、ばらつきが大きい。各ビンに入る光子数 i と平均の光子数 μ について、$(i-\mu)^2$ をすべての i について平均したものが分散になる。

$$Variance \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (i-\mu)^2\, P_P(i;\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} (i^2 - 2i\mu + \mu^2)\, P_P(i;\mu)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 P_P(i;\mu) - 2\mu \sum_{i=0}^{\infty} i P_P(i;\mu) + \mu^2 \sum_{i=0}^{\infty} P_P(i;\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 P_P(i;\mu) - \mu^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i^2\, \frac{\mu^i}{i!}\, e^{-\mu} - \mu^2 = \sum_{i=1}^{\infty} i^2\, \frac{\mu^i}{i!}\, e^{-\mu} - \mu^2 = \mu \sum_{i-1=0}^{\infty} i\, \frac{\mu^{i-1}}{(i-1)!}\, e^{-\mu} - \mu^2$$

$$= \mu \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu} - \mu^2 = \mu(\mu+1) - \mu^2 = \mu. \tag{188}$$

導出はちょっとやっかいだったが、ここで得られたとても大切な事実、「ポアソン分布の分散は平均に等しい」ということは暗記しておこう。

[47] 分散を σ^2 で表すことが多い。分散の正の平方根 σ が標準偏差である。

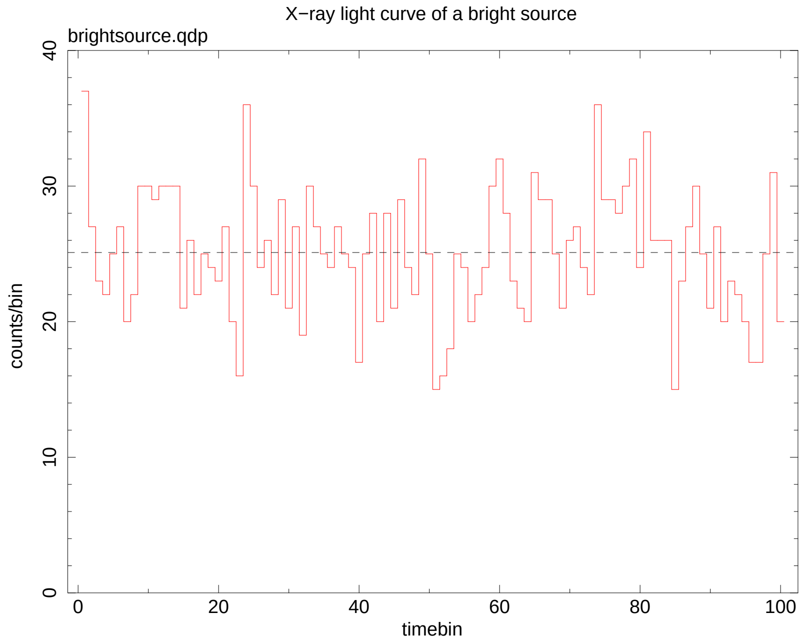


Fig. 10. 明るい X 線天体を 1 ビン 1 秒で、100 秒観測したときの光度曲線。平均値 25.1 に横線を引いてある。

7.2. 正規分布

図 8 よりも、もう少し明るい X 線天体を、やはり 1 ビン 1 秒で、100 秒間観測した場合の光度曲線が図 10 である。

各ビンで検出された X 線光子の数は以下の通りである。

37 27 23 22 25 27 20 22 30 30 29 30 30 30 21 26 22 25 24 23 27 20 16 36 30 24 26 22 29 21 27 19 30 27 25 24 27 25 24 17 25 28 20 28 21 29 24 22 32 25 15 16 18 25 24 20 22 24 30 32 28 23 21 20 31 29 29 25 21 26 27 24 22 36 29 29 28 30 32 24 34 26 26 26 15 23 27 30 25 21 27 20 23 22 20 17 17 25 31 20

各ピンに落ちる光子数の平均は 25.1 である。各ビンに落ちる光子数のヒストグラムは図 11 である。赤で示したのが、平均の値 $\mu = 25.1$ を (185) 式に代入したポアソン分布である。一方、緑で描いたのが、平均の値 $\mu = 25.1$、分散 $\sigma^2 = 25.1$ で表される正規分布である。赤い線と緑の線が良く似ている事を確認しよう。

一般に、平均 μ、分散 σ^2 を持つ正規分布は以下の式で表される。

$$P_G(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \tag{189}$$

数学的な証明もあるのだが,「ポアソン分布の平均 μ が大きくなると、それは平均 μ、分散 μ の正規分布で良く近似されるようになる」、ということを直感的に覚えておこう。それを図示したのが、図 12 である。いろいろな μ の値について、平均 μ のポアソン分布と、平均 μ、分散 μ の正規分布を比較した。ただし、正規分布は連続的な関数であるのに対し、ポアソン分布は離散的な値に対してのみ定義されている事を明確にするために、赤棒線グラフで示したこ

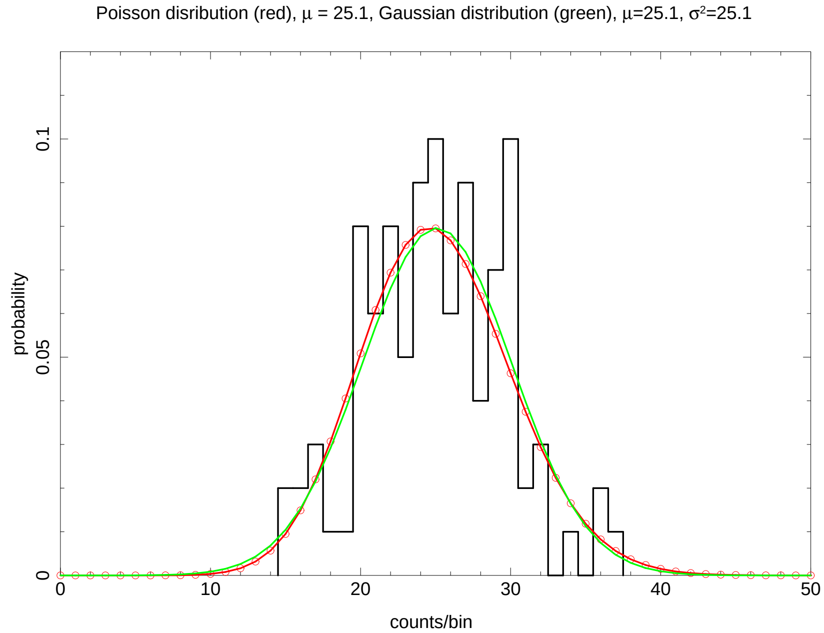


Fig. 11. 観測された X 線データのヒストグラム（黒）と平均 25.1 のポアソン分布（赤）、平均 25.1、分散 25.1 の正規分布（緑）。

とに注意[48]。

x は確率変数で、x が x_0 から x_1 の間の値を取る確率は、

$$\int_{x_0}^{x_1} P_G(x;\mu,\sigma)\,dx \tag{190}$$

で与えられる。よって、x が $-\infty$ から $+\infty$ の値を取る確率は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_G(x;\mu,\sigma)\,dx = 1 \tag{191}$$

であることを、以下の通り確認しておこう。

まず，準備として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \tag{192}$$

を証明しよう。この積分の値を I とすると、積分変数は何でも良いから、

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \\ &= 2\pi \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-r^2}\,rdr = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\,e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=\infty} = \pi. \end{aligned} \tag{193}$$

よって、$I=\sqrt{\pi}$ が証明された。これを使って、

48 正規分布については、緑線の下の面積が 1 になっていて、ポアソン分布については、赤線の長さを全部足すと、1 になっているわけです。

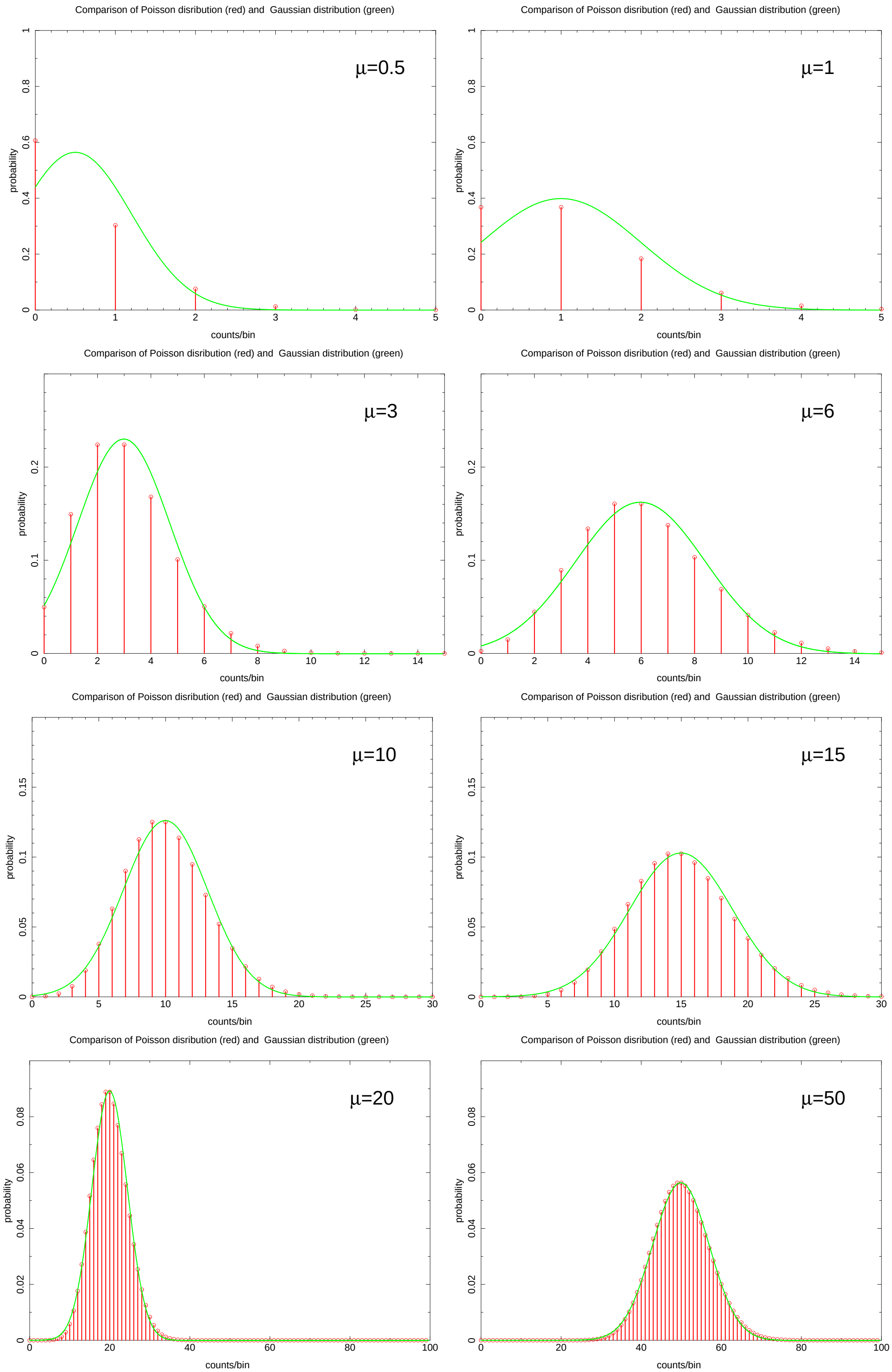


Fig. 12. いろいろな値 μ について、平均 μ のポアソン分布と (赤)、平均 μ、分散 μ の正規分布 (緑) の比較。

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_G(x;\mu,\sigma)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 1.$$

また、その定義から、正規分布の平均が μ、正規分布の分散が σ^2 であることを、手を動かして確認しておこう。

$$Mean \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x\, P_G(x;\mu,\sigma)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-y^2} dy + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} e^{-y^2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \mu = \mu.$$

正規分布の分散が σ^2 になっていることを計算で確認する前に、一般の確率分布で、分散は平均の二乗–二乗の平均になっていることを確認しよう (この決まり文句も暗記しておく事)。

$$Variance \equiv \int (x-\mu)^2 f(x)dx = \int (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)dx$$
$$= \int x^2 f(x)dx - 2\mu \int x f(x)dx + \mu^2 \int f(x)dx = \int x^2 f(x)dx - 2\mu^2 + \mu^2$$
$$= \int x^2 f(x)dx - \mu^2. \tag{194}$$

まず、正規分布について、二乗の平均をもとめる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, P_G(x;\mu,\sigma)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu+\mu)^2\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$
$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \mu^2$$
$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy + \mu^2$$
$$= \sigma^2 + \mu^2. \tag{195}$$

ただしここで、$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}/2$ を使った。よって、式 (189) で表される正規分布について、

$$Variance = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2 \tag{196}$$

であることが確認できた。

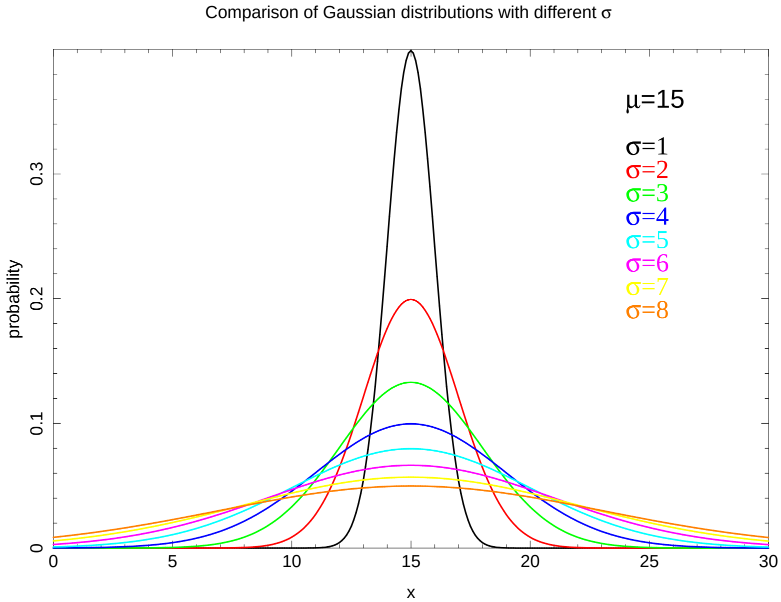


Fig. 13. 平均 $\mu = 15$, 標準偏差 $\sigma = 1,2,3,4,5,6,7,8$ の正規分布の比較。

7.3. 標準偏差と偏差値

分散、σ^2 の平方根、σ が標準偏差である。これは、確率分布がどれだけ平均の回りに集中しているかを示す量である。同じ平均 μ を持つ正規分布でも、σ が小さい分布は「細く」、σ が大きい分布は「太い」ことがわかるだろう (図 13)。いつでも確率分布を x で積分すると 1 になることに注意。正規分布を、横軸を平均 μ からのずれを σ を単位にして描いてみよう (図 14)。この図は、正規分布において、確率変数の平均からのずれが -1σ から $+1\sigma$ のあいだにある確率は 68.26 %、というように見る。同様に、平均からのずれが $+2\sigma$ よりも大きい確率は、約 2.27 %であることがわかる。

ある確率変数が、どれだけ平均からずれているかを表すときに、「何々シグマ」という言い方をする。たとえば、仮に日本人男性の身長の分布が 165cm で、標準偏差が 8cm の正規分布に従うとすると、身長 181cm の人は平均よりも 2 シグマ背が高く、それよりも背が高い人は、人口の中の約 2.27 %である。身長 189cm の人は平均よりも 3 シグマ背が高く、それよりも背が高い人は、人口の中の約 0.13 %である。

いわゆる「偏差値」は、平均を 50, 1 シグマを 10 としたときに、平均からどれだけずれているかを示す指標である。たとえば、偏差値 70 というのは平均よりも 2 シグマ上位にいることで、それよりも上位の人は全体の約 2.27 %である。

7.4. χ^2 *(*カイ二乗*)* 分布

平均 μ, 標準偏差 σ である正規分布に従う確率変数 x を、えいやっ、と取ってきて $(x-\mu)/\sigma$ という量を作ってみよう。これは、0 の回りに対称にばらつき、大きく 0 からずれることは稀なので、-1 から+1 の間の値を取る事が多いだろう。

では、同じ正規分布を考え、そこから $x_1, x_2, x_3, , , x_N$ という N 個の値をとってきて、

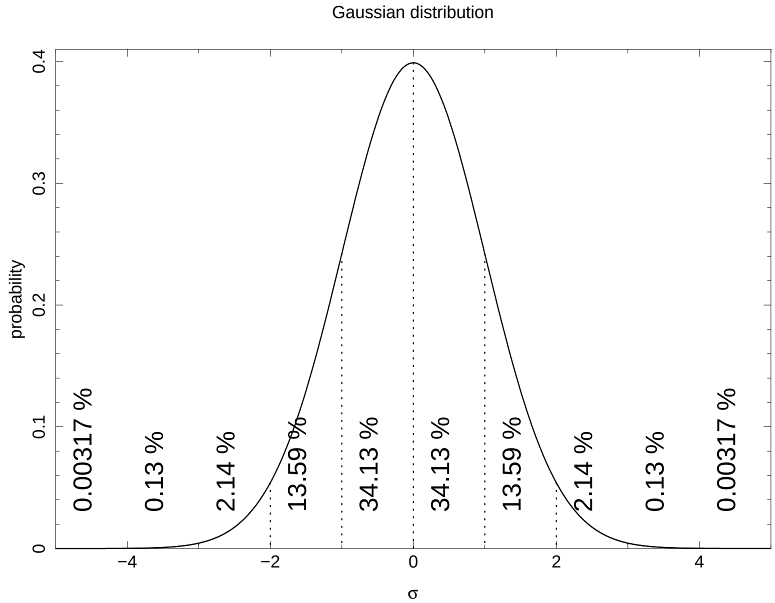


Fig. 14. 正規分布において、横軸を σ を単位として表したときの確率分布

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \tag{197}$$

という量を定義したら、その値はどうなるだろうか？各項は 1 の回りにばらついているので、χ^2 は N の回りにばらつくはずである。χ^2 の従う確率分布を自由度 N の χ^2 分布 (カイ二乗分布) と呼ぶが、その平均は上記の推測通り N である。また、その分散は $2N$ であることがわかっている。χ^2/N のことを reduced χ^2 ($\equiv \chi^2_N$) と呼び、この値は 1 に近い。 χ^2 分布の表式はやや複雑なので、ここには記さないが、それをプロットしたものは図 15 の通りである。それぞれ、自由度が平均になっていること、(当然であるが) 積分すると 1 になっていることに注意。

7.5. カイ二乗検定

さて、図 10,11 の例で、この X 線天体の強度が本当に一定かどうか、検定してみよう。各時間ビンに入る X 線光子数はポアソン分布に従う訳だが、十分に明るいので（一ビンあたりのカウント数の平均は約 25)、図 12 から明らかなように、これは正規分布で近似してよい。よって、$N = 100$ ビンについて、(197) に従って χ^2 を計算すると、それは自由度 100 の χ^2 分布に従っているはずである。しかし、この天体の「真の」平均 μ と標準偏差 σ を我々は知らない。限られた観測データから、それらを推定できるだけである。観測データから求めた平均を

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{198}$$

として、ポアソン分布では分散は平均に等しいこと標準偏差は平均の平方根に等しい）から、

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{\bar{x}}} \right)^2 \tag{199}$$

という値を観測データだけから計算することができる。この新たな χ^2 には、「自由な」パラメー

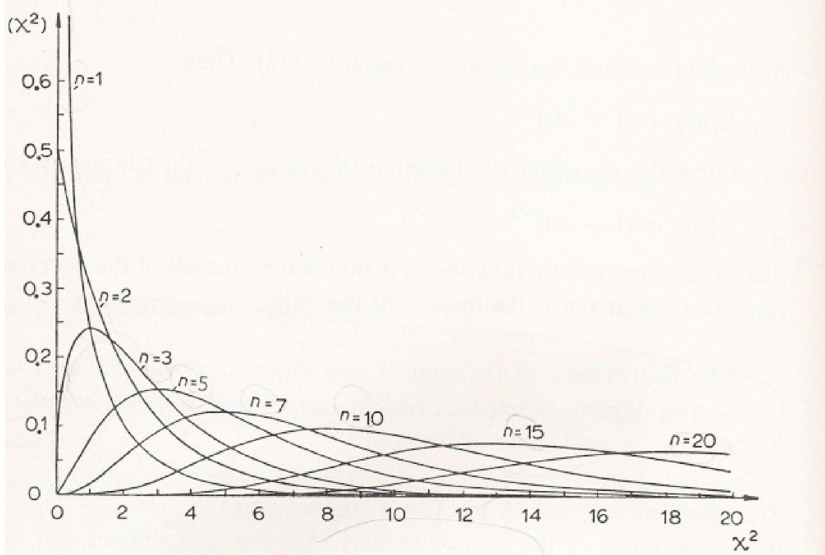


Fig. 6-2. Probability density of χ^2.

Fig. 15. 自由度 1, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 20 の χ^2 分布。"Statistical and Computation Methods in Data Analysis"(ISBN 0-7204-0334-0) より。

ターは N 個ではなく、$N-1$ 個である事に注意[49]。よって、式 (199) に従って計算した χ^2 は、自由度 $N-1$ の χ^2 分布に従う。

計算してみると、$\chi^2 = 86.18, \chi^2_N = 86.18/99 = 0.871$ となる。ここで、χ^2 分布の表 (図 16) と照らし合わせる[50]。表には自由度 99 はないが、それほど変わらないので、自由度 100 の χ^2 分布を見てみる。ここには、「上側確率」の値と、それを与える χ^2_N の値が書いてある。たとえば、上側確率が 0.5, 0.1, 0.01, 0.001 となる χ^2_N の値は、それぞれ 0.993, 1.358, 1.494 である。これは、自由度 100 の χ^2 分布において、χ^2_N が 1.494 以上であるような事象の起きる確率は 0.001 以下 (非常に稀) であることを意味している。それにたいして、現在の $\chi^2_N = 0.871$ という値は、「なんてことのない」値で、自由度 100 の χ^2 分布において普通に起こりうる。よって、図 10 のライトカーブ、図 11 のヒストグラムで与えられる天体の時間変動は一定だと考えてよい。

では、図 17 で与えられるライトカーブの場合はどうであろうか? これは先のライトカーブで、一ビンだけ、カウント数を 15 から 65 に作為的に変更したものである。もし、このようなライトカーブが観測されたとしたら、これは統計的なゆらぎで起きうることだろうか? あるいは、「X 線フラッシュ」[51]のような宇宙現象であろうか？先の例と同様に、平均を計算すると 25.58 となる。$\chi^2 = 141.84$, $\chi^2_N = 1.432$ である。χ^2 分布の表と照らし合わせると、このように大きな χ^2_N の値が起きる確率は、0.01 以下であるが、0.001 以上であることがわかる。ライトカーブから作った χ^2 が、もし χ^2 分布に従うとしたら非常に稀なことが起きた、ということは、

[49] $N-1$ 個の x_i と $\bar{x}$ の値が与えられれば、残り 1 個の x_i の値も決まる

[50] 電卓、ポケコンによっては、ポアソン分布、正規分布、χ^2 がライブラリとして入っているものがある。そういうモノを買おう！私の愛機、FX-860P は残念ながら製造中止のようだが。。。

[51] 実際に、そういう現象が知られている。

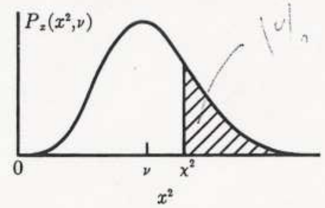


TABLE C.4
χ^2 distribution. Values of the reduced chi-square $\chi^2_\nu = \chi^2/\nu$ corresponding to the probability $P_\chi(\chi^2;\nu)$ of exceeding χ^2 vs. the number of degrees of freedom ν

	P															
ν	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.00016	0.00063	0.00393	0.0158	0.0642	0.148	0.275	0.455	0.708	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.827
2	0.0100	0.0202	0.0515	0.105	0.223	0.357	0.511	0.693	0.916	1.204	1.609	2.303	2.996	3.912	4.605	6.908
3	0.0383	0.0617	0.117	0.195	0.335	0.475	0.623	0.789	0.982	1.222	1.547	2.084	2.605	3.279	3.780	5.423
4	0.0742	0.107	0.178	0.266	0.412	0.549	0.688	0.839	1.011	1.220	1.497	1.945	2.372	2.917	3.319	4.617
5	0.111	0.150	0.229	0.322	0.469	0.600	0.731	0.870	1.026	1.213	1.458	1.847	2.214	2.678	3.017	4.102
6	0.145	0.189	0.273	0.367	0.512	0.638	0.762	0.891	1.035	1.205	1.426	1.774	2.099	2.506	2.802	3.743
7	0.177	0.223	0.310	0.405	0.546	0.667	0.785	0.907	1.040	1.198	1.400	1.717	2.010	2.375	2.639	3.475
8	0.206	0.254	0.342	0.436	0.574	0.691	0.803	0.918	1.044	1.191	1.379	1.670	1.938	2.271	2.511	3.266
9	0.232	0.281	0.369	0.463	0.598	0.710	0.817	0.927	1.046	1.184	1.360	1.632	1.880	2.187	2.407	3.097
10	0.256	0.306	0.394	0.487	0.618	0.727	0.830	0.934	1.047	1.178	1.344	1.599	1.831	2.116	2.321	2.959
11	0.278	0.328	0.416	0.507	0.635	0.741	0.840	0.940	1.048	1.173	1.330	1.570	1.789	2.056	2.248	2.842
12	0.298	0.348	0.436	0.525	0.651	0.753	0.848	0.945	1.049	1.168	1.318	1.546	1.752	2.004	2.185	2.742
13	0.316	0.367	0.453	0.542	0.664	0.764	0.856	0.949	1.049	1.163	1.307	1.524	1.720	1.959	2.130	2.656
14	0.333	0.383	0.469	0.556	0.676	0.773	0.863	0.953	1.049	1.159	1.296	1.505	1.692	1.919	2.082	2.580
15	0.349	0.399	0.484	0.570	0.687	0.781	0.869	0.956	1.049	1.155	1.287	1.487	1.666	1.884	2.039	2.513
16	0.363	0.413	0.498	0.582	0.697	0.789	0.874	0.959	1.049	1.151	1.279	1.471	1.644	1.852	2.000	2.453
17	0.377	0.427	0.510	0.593	0.706	0.796	0.879	0.961	1.048	1.148	1.271	1.457	1.623	1.823	1.965	2.399
18	0.390	0.439	0.522	0.604	0.714	0.802	0.883	0.963	1.048	1.145	1.264	1.444	1.604	1.797	1.934	2.351
19	0.402	0.451	0.532	0.613	0.722	0.808	0.887	0.965	1.048	1.142	1.258	1.432	1.586	1.773	1.905	2.307
20	0.413	0.462	0.543	0.622	0.729	0.813	0.890	0.967	1.048	1.139	1.252	1.421	1.571	1.751	1.878	2.266
22	0.434	0.482	0.561	0.638	0.742	0.823	0.897	0.970	1.047	1.134	1.241	1.401	1.542	1.712	1.831	2.194
24	0.452	0.500	0.577	0.652	0.753	0.831	0.902	0.972	1.046	1.129	1.231	1.383	1.517	1.678	1.791	2.132
26	0.469	0.516	0.592	0.665	0.762	0.838	0.907	0.974	1.045	1.125	1.223	1.368	1.496	1.648	1.755	2.079
28	0.484	0.530	0.605	0.676	0.771	0.845	0.911	0.976	1.045	1.121	1.215	1.354	1.476	1.622	1.724	2.032
30	0.498	0.544	0.616	0.687	0.779	0.850	0.915	0.978	1.044	1.118	1.208	1.342	1.459	1.599	1.696	1.990
32	0.511	0.556	0.627	0.696	0.786	0.855	0.918	0.979	1.043	1.115	1.202	1.331	1.444	1.578	1.671	1.953
34	0.523	0.567	0.637	0.704	0.792	0.860	0.921	0.980	1.042	1.112	1.196	1.321	1.429	1.559	1.649	1.919
36	0.534	0.577	0.646	0.712	0.798	0.864	0.924	0.982	1.042	1.109	1.191	1.311	1.417	1.541	1.628	1.888
38	0.545	0.587	0.655	0.720	0.804	0.868	0.926	0.983	1.041	1.106	1.186	1.303	1.405	1.525	1.610	1.861
40	0.554	0.596	0.663	0.726	0.809	0.872	0.928	0.983	1.041	1.104	1.182	1.295	1.394	1.511	1.592	1.835
42	0.563	0.604	0.670	0.733	0.813	0.875	0.930	0.984	1.040	1.102	1.178	1.288	1.384	1.497	1.576	1.812
44	0.572	0.612	0.677	0.738	0.818	0.878	0.932	0.985	1.039	1.100	1.174	1.281	1.375	1.485	1.562	1.790
46	0.580	0.620	0.683	0.744	0.822	0.881	0.934	0.986	1.039	1.098	1.170	1.275	1.366	1.473	1.548	1.770
48	0.587	0.627	0.690	0.749	0.825	0.884	0.936	0.986	1.038	1.096	1.167	1.269	1.358	1.462	1.535	1.751
50	0.594	0.633	0.695	0.754	0.829	0.886	0.937	0.987	1.038	1.094	1.163	1.263	1.350	1.452	1.523	1.733
60	0.625	0.662	0.720	0.774	0.844	0.897	0.944	0.989	1.036	1.087	1.150	1.240	1.318	1.410	1.473	1.660
70	0.649	0.684	0.739	0.790	0.856	0.905	0.949	0.990	1.034	1.081	1.139	1.222	1.293	1.377	1.435	1.605
80	0.669	0.703	0.755	0.803	0.865	0.911	0.952	0.992	1.032	1.076	1.130	1.207	1.273	1.351	1.404	1.560
90	0.686	0.718	0.768	0.814	0.873	0.917	0.955	0.993	1.031	1.072	1.123	1.195	1.257	1.329	1.379	1.525
100	0.701	0.731	0.779	0.824	0.879	0.921	0.958	0.993	1.029	1.069	1.117	1.185	1.243	1.311	1.358	1.494
120	0.724	0.753	0.798	0.839	0.890	0.928	0.962	0.994	1.027	1.063	1.107	1.169	1.221	1.283	1.325	1.446
140	0.743	0.770	0.812	0.850	0.898	0.934	0.965	0.995	1.026	1.059	1.099	1.156	1.204	1.261	1.299	1.410
160	0.758	0.784	0.823	0.860	0.905	0.938	0.968	0.996	1.024	1.055	1.093	1.146	1.191	1.243	1.278	1.381
180	0.771	0.796	0.833	0.868	0.910	0.942	0.970	0.996	1.023	1.052	1.087	1.137	1.179	1.228	1.261	1.358
200	0.782	0.806	0.841	0.874	0.915	0.945	0.972	0.997	1.022	1.050	1.083	1.130	1.170	1.216	1.247	1.338

Fig. 16. χ^2 分布の表。"Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences", Bevington and Robinson (ISBN 0-07-911243-9) より。

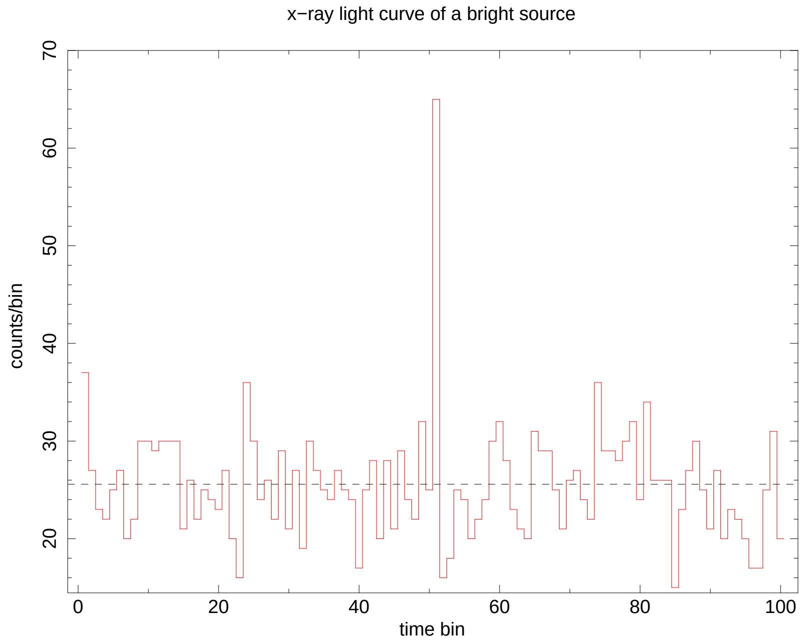


Fig. 17. 図 10 のライトカーブのうち、1 ビンだけ、カウント数を 15 から 65 に変えたもの。平均値 25.58 に横線を引いてある。

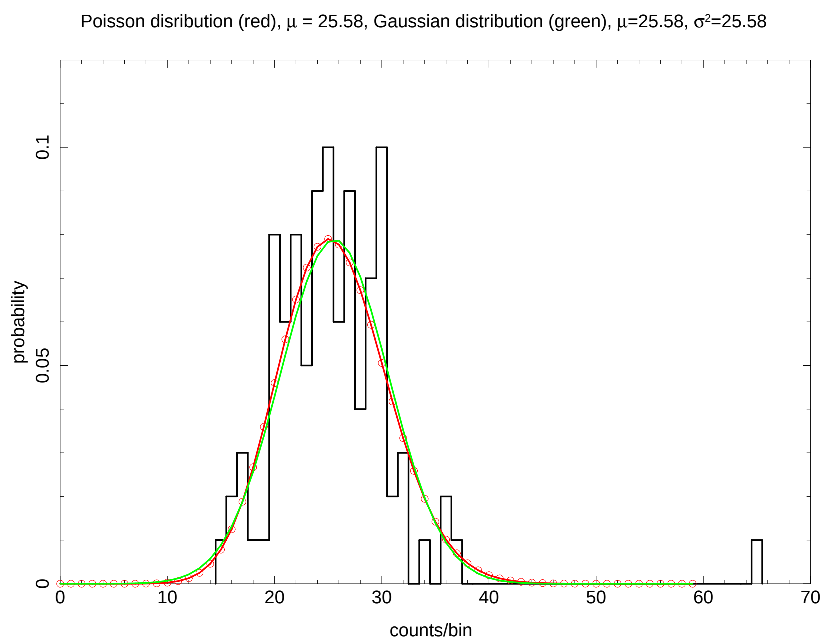


Fig. 18. 図 17 に対応するヒストグラム。図 11 と比較すると、15 カウント入るビンが一つ減り、65 カウント入るビンが一つ増えている。

そもそもそれが χ^2 分布に従っていないこと、つまり各ビンに落ちてくる X 線光子数の分布は、ある平均値の回りの正規分布にしたがっていない (=この天体は時間変動している) ことを示唆する。

まとめると、図 17 のような X 線天体の時間変動が観測されたとき、この天体の強度が一定であると言う仮説は、危険率 0.01 で棄却できる (これほど稀な事は、偶然には 100 回に一

回も起こらない)。しかし、危険率 0.001 では棄却できない (これほど珍しい事でも、1000 回に一回は偶然起きることがある)。