8.　二体問題

ここでは、古典力学の応用問題として二体問題を勉強しよう[37]。二体問題とは、二つの質点からなる系の運動を解く問題であり、これは解析的に解ける (=解を式で表すことができる)。一方、限られた場合を除いて、**三体問題は解析的に解けない**ことがわかっている。三体あるいはそれ以上の質点が存在する場合の運動を解くには、数値的な解法に頼らざるを得ない。

宇宙にはたくさんの天体があるわけで、厳密な解を得るにはコンピューターを走らせて、たくさんの連立運動方程式を数値的に解くことが必要なわけだが、多くの場合、二体問題に、他の天体による微細な影響 (摂動) を考えれば十分である。たとえば、人工衛星の運動を解くときは地球の重力のみ、(太陽や月の影響は微少)、惑星の運動を解くときは太陽の重力のみ (他の惑星や恒星の重力は微少) を考えれば、大体、事足りる。

8.1.　二体問題の例

地球の公転:精密な天体観測を行う際、地球の公転運動を考慮に入れることが重要である。たとえば、パルサー (高速回転している中性子星) のタイミング観測を行うとき、地球がパルサーに近づいているか、遠ざかっているかで、見かけ上のパルス周期がドップラー効果に依って変化する。これを補正するために、地球の公転運動を精密に解き、天体からのパルスを解析するときには、そのパルス到達時刻 (pulse-arrival time) を、太陽系重心 (barycenter) で測定した値に直す[38]。これを barycentric correction と呼ぶ。

惑星の軌道:たとえば、「理科年表」を見ると、惑星の軌道が、以下で示す、軌道六要素を用いて記述されている。

人工衛星:地球と人工衛星の二体問題を問いて、人工衛星の軌道は、以下で示すような軌道六要素で記述される。地球大気による擾乱や、地球が扁平している効果によって、人工衛星の軌道はゆっくりと変化している。よって、軌道六要素を出す場合は、いつ測定した値であるかを明示する必要である。測定した時刻を元期 (エポック、Epoch) と呼ぶ。エポックと軌道六要素が与えられらば、その前後の時刻における人工衛星の位置は、解析的に求めることができる。人工衛星の「軌道ファイル」には、六要素がエポックの関数として与えられている[39]。

探査機: 地球の重力圏を脱出した探査機は、主に太陽の重力の影響を受け、太陽を焦点とするほぼ楕円軌道を描き、太陽系内を運動する。軌道を変えるために、地球や月による**スイングバイ**を利用する。その時の軌道は、地球や月を焦点とする双曲線、放物線になっている。

X 線連星系: 太陽は連星系ではないが、多くの恒星は、連星系を成している。特に、通常の星とコンパクト星 (白色矮星、中性子星、ブラックホール) から成る連星系は、通常の星からコン

---

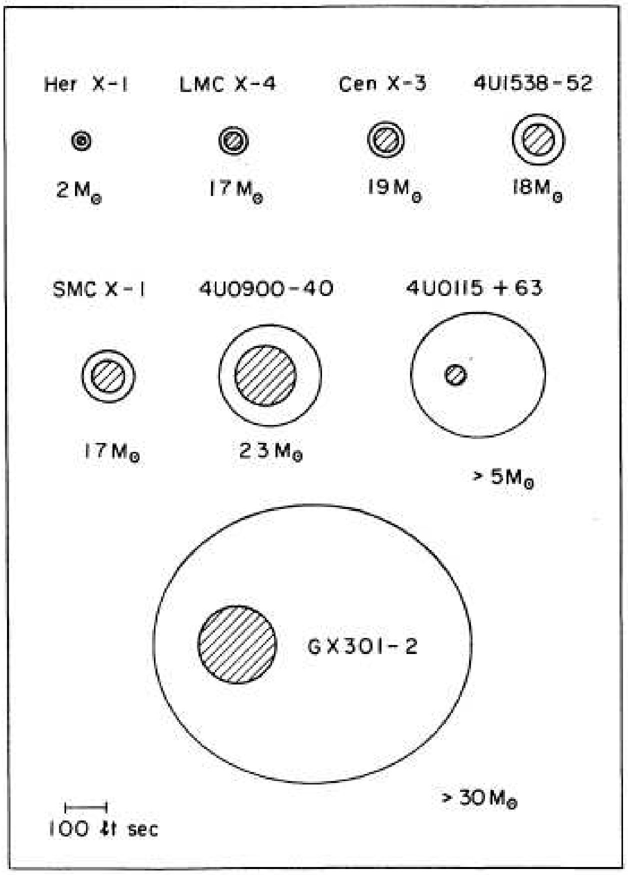
[37] 一般相対論の効果は入れず、ニュートン力学の範囲で考える。

[38] 太陽系重心を求めるにはすべての惑星を考慮にいれるが、木星の影響が一番大きい。それでも、太陽系重心は太陽の中心とはそれほどずれておらず、太陽の中にある。

[39] あるいは、すでに六要素から計算された人工衛星の位置が、より細かい時間ビンで入っていることもある。

パクト星に物質が落ちるときの大きな重力エネルギーが開放されて、**X 線連星系**となる。特にコンパクト星が回転している中性子星の場合、これは **X 線パルサー**として観測され、公転運動によるドップラー効果の測定から、視線方向の速度がわかり、二体問題を解くことによって、その軌道を正確に決めることができる。

下図が X 線連星パルサーの軌道の例である (Joss and Rappaport, 1984, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 22, 537 より)。それぞれの天体名と、伴星の質量が書いてある。相対的なスケールは正しく示されている (左下の線が 1 光秒)。中性子星の質量はどれも大体 $1.4M_{\odot}$。4U0115+63($e=0.34$) や GX301-2($e=0.47$) は離心率の大きい楕円軌道であるが、離心率もドップラー効果の観測から測定できることに注意。



重力波の間接的検証:

電荷を持った物体が加速度運動すると電磁波を放出するように、質量を持った物体が運動すると**重力波**が放出される、と一般相対論は予言している。重力波はあまりにも弱いので、今だ直接検出されていないが、連星パルサーの観測から、間接的に重力波の存在が検証されている。ハルスとテイラーは、PSR 1913+16 という連星パルサーを、プエルトリコにある電波望遠鏡を用い、1974 年の発見以来、長期間モニター観測を行った。その結果、その軌道がほんの少しずつ変化していることがわかった。これはニュートン力学では説明できない。一方、一般相対論によると、重力波の放射によって、連星パルサーはエネルギーを失ない、それによって、

徐々に軌道が変化していく。その計算結果と観測された軌道変化がピタリと一致した。これが、今日では (唯一) の重力波の観測的証拠だと考えられている。ハルスとテイラーは、この業績により、1993 年のノーベル物理学賞を受賞した[40]。

8.2. 角運動量、中心力、角運動量保存則

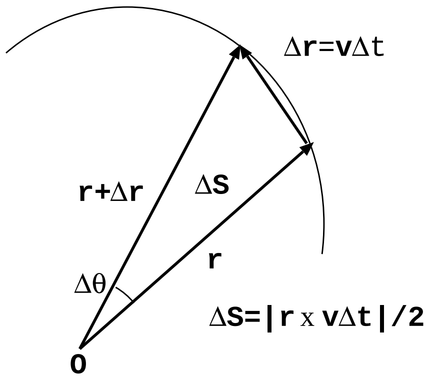
時刻 t における質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と、運動量 $\boldsymbol{p}(t)$ との外積 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ を、原点 O に関する質点の、時刻 t における**角運動量**と言う (以下、$\boldsymbol{l}$ で表す。)。

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}. \tag{150}$$

角運動量ベクトルは、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ を含む平面に垂直で、その向きは、$\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{l}$ が右手系をなす向きである。質点が原点の周りに描く扇型の面積速度は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) \tag{151}$$

であるから、角運動量は面積速度の $2m$ 倍である。



(150) 式を微分し、運動方程式 $d\boldsymbol{p}/dt = \boldsymbol{F}$ を用いると、

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}. \tag{152}$$

右辺を**力のモーメント**または**トルク**と呼ぶ。ある時刻における質点の角運動量の時間変化の割合は、その時刻に質点に作用する力のモーメントに等しい。

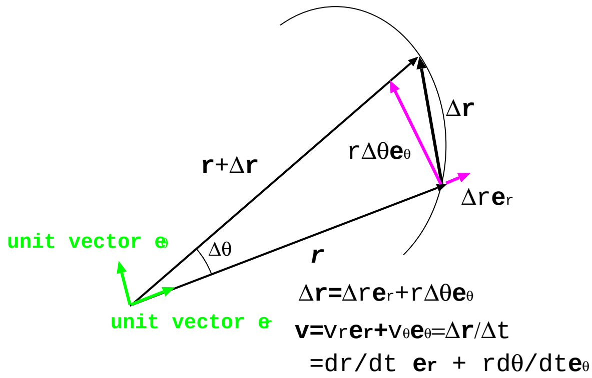
特に、力のモーメントがゼロの時、角運動量は一定に保たれる。これを**角運動量保存則**、あるいは**面積速度保存則**と言う。力がゼロでなくても、それが働く方向が原点 O を通る場合 (中心力)、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ は平行なので、$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = 0$。よって、**質点が重力によって原点 O に引かれながら運動するとき、O の周りの角運動量と面積速度は運動中一定に保たれる。**

角運動量の大きさ $|\boldsymbol{l}|$ を h とする。速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{r}$ に平行な成分 v_r と垂直な成分 v_θ に分解すると、下図からわかるように、

$$v_r = dr/dt, v_\theta = rd\theta/dt \tag{153}$$

である。

[40] http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1993/press.html 参照。



$h = mrv_\theta$ だから、

$$h = mr^2\,\frac{d\theta}{dt} \tag{154}$$

である。

8.3. 換算質量

天体が原点 O の重力に引かれて運動するときは、O の周りの角運動量が保存するので、その問題は簡単になる。しかし、一般に二つの天体が重力で引きあっているときには、両方の運動を考えなくてはいけないので、問題は複雑になるのではないだろうか？その心配がないことを以下で述べる。

例として、惑星 (質量 m) が太陽 (質量 M) のまわりを公転運動する場合を考えよう。それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ とすれば、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F},\; M\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -\boldsymbol{F}. \tag{155}$$

これを足しあわせると、

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\boldsymbol{r}_1 + M\boldsymbol{r}_2) = 0. \tag{156}$$

ところで、$\boldsymbol{R} \equiv (m\boldsymbol{r}_1 + M\boldsymbol{r}_2)/(m+M)$ は、惑星と太陽の重心の位置ベクトルを表わすから、上式は、$d^2\boldsymbol{R}/dt^2 = 0$, すなわち重心は等速運動をする (初速度がゼロならば静止している) ことを示している。

一方、(155) から次式も導ける。

$$\frac{mM}{m+M}\frac{d^2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{dt^2} = \boldsymbol{F}. \tag{157}$$

これは、太陽に対する惑星の位置 $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ に、換算質量 $\frac{mM}{m+M}$ の天体がある場合の運動を表わす運動方程式である。

一般に二つの質点が互いに力を及ぼしあって運動するとき、個々の質点の運動方程式を、質量中心の運動方程式と、一方の質点が静止しているかのようにみなしたときの他方の質点の運動方程式 (ただし、質量が換算質量にかわっている) に書き換えることができる。二体問題 (155) を解くかわりに、それと等価な一体問題 (157) を解けば良いことになる。

8.4. 人工衛星の軌道、惑星の軌道

地球の周りの人工衛星の軌道や、太陽のまわりの惑星の軌道を考えてみよう。以下で、m は人工衛星または惑星の換算質量、$\boldsymbol{r}$ は、地球中心に相対的な人工衛星の位置、あるいは太陽に相対的な惑星の位置を示す。まず、エネルギー保存則から、全エネルギーを E とすると、

$$\frac{m}{2}(v_r^2+v_\theta^2)-\frac{GMm}{r}=E. \tag{158}$$

(153),(154) を使うと、

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{h^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}=E. \tag{159}$$

ここで (154) から、

$$\frac{d}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}=\frac{h}{mr^2}\frac{d}{d\theta}. \tag{160}$$

よって、独立変数を時刻 t から θ に変換して (159) は、

$$\frac{m}{2}\left(\frac{h}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{h^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}=E \tag{161}$$

と書ける。この微分方程式が r と θ の関係を与えるので、r を θ の関数として求めれば、惑星の軌道が求められたことになる。ここで、$1/r=u$ と変数を変換すると、以下のように変形できる。

$$\frac{h^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{h^2u^2}{2m}-GMmu=E, \tag{162}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\left(u-\frac{GMm^2}{h^2}\right)^2-\frac{G^2M^2m^4}{h^4}=\frac{2mE}{h^2}, \tag{163}$$

$$\pm\frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{h^2}+\frac{G^2M^2m^4}{h^4}-\left(u-\frac{GMm^2}{h^2}\right)^2}}=d\theta. \tag{164}$$

ここで積分公式、$\int dx/\sqrt{a^2-x^2}=\cos^{-1}(x/a)$ を用いて、

$$\pm\cos^{-1}\frac{u-\frac{GMm^2}{h^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{h^2}+\frac{G^2M^2m^4}{h^4}}}=\theta. \tag{165}$$

よって、

$$r=\frac{\frac{h^2}{GMm^2}}{1+\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{G^2M^2m^3}}\cos\theta}. \tag{166}$$

ここで、

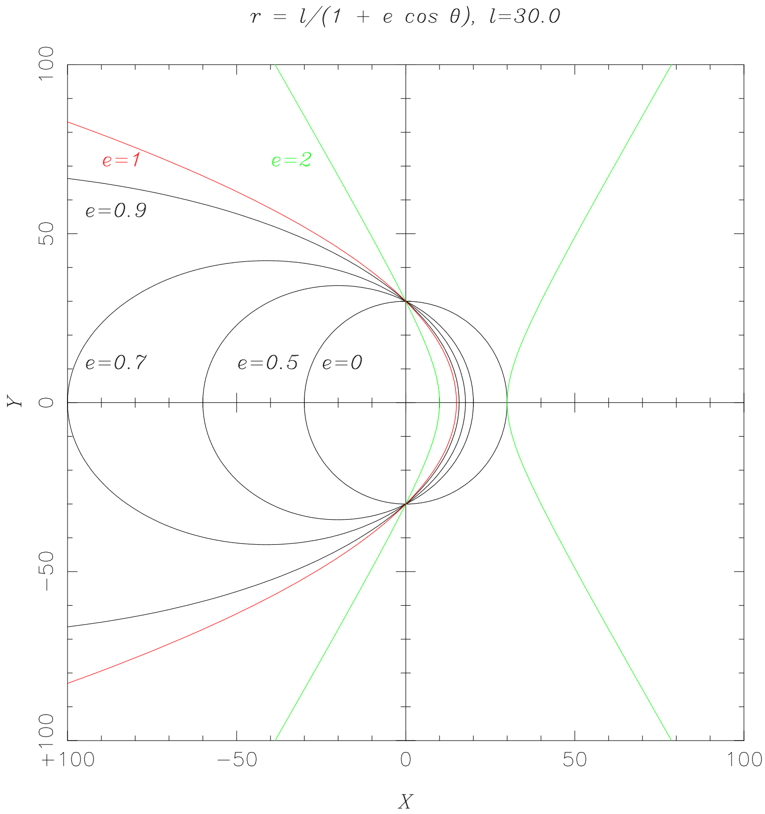
$$l\equiv\frac{h^2}{GMm^2}, \tag{167}$$

$$e\equiv\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{G^2M^2m^3}} \tag{168}$$

と定義すれば、(166) は、

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}. \tag{169}$$

と書ける。これは原点 (太陽または地球) を**焦点**の一つとする**円錐曲線**の式で、e は離心率、l は半直弦と呼ばれる。円錐曲線は、円錐を任意の断面で切ったときの断面の形で、楕円 $(e<1)$、放物線 $(e=1)$、双曲線 $(e>1)$、のいずれかである。下図に、異なる離心率の円錐曲線の例を示す。



実際に太陽の周りの惑星 (彗星) や地球の周りの人工衛星 (探査機) の軌道も、楕円、放物線、双曲線のどれかである。(168) より、離心率 $e<1, e=1, e>1$ はそれぞれエネルギー $E<0, E=0, E>0$ に対応している。すなわち、全エネルギー E が負のときは、人工衛星は地球の重力に束縛されて、地球の周りを楕円軌道を描いて周回する。運動エネルギーが増加するにつれ、離心率が大きなり、やがて軌道は放物線となり、人工衛星は地球の重力圏を脱出する。無限遠でエネルギーはゼロになる。さらに運動エネルギーが大きい場合は、双極線軌道になり、無限遠でも正のエネルギーを持つ。

8.5. 楕円軌道

楕円は、二つの焦点からの距離の和が等しい点をつなげたものである。下図のように長半径を a、短半径を b とする。楕円の面積は πab で与えられる。

$\theta=0$ の点が A,$\theta=\pi/2$ の点が Q,$\theta=\pi$ の点が C である。右側の焦点、F からの距離を考える。A が近日点、C が遠日点である。

下図と (169) より、$r_A = l/(1+e), r_Q = l, r_C = l/(1-e)$。よって、

$$r_A + r_C = 2a = l/(1+e) + l/(1-e) = 2l/(1-e^2). \tag{170}$$

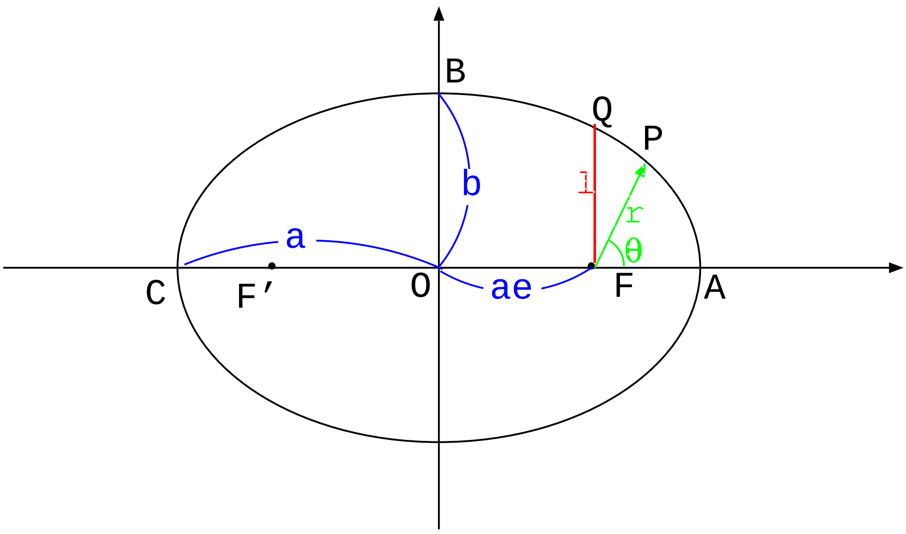
これから、長半径は

$$a = l/(1-e^2) \tag{171}$$

と書けることがわかる。よって、

$$r_A = \frac{l}{1+e} = a\frac{1-e^2}{1+e} = a(1-e) \tag{172}$$

だから、下図に書いてあるとおり $OF = a - a(1-e) = ae$ である。



次に短半径を a と e で表わす。楕円の定義より、$BF + BF' = FA + F'A$ である。

$$BF + BF' = 2\sqrt{a^2e^2 + b^2}, FA + F'A = a(1-e) + 2ae + a(1-e) = 2a. \tag{173}$$

よって、

$$b^2 = a^2(1-e^2) = al. \tag{174}$$

ここで、(171) を使った。

(167),(168) と (171) より、

$$a = -GMm/2E. \tag{175}$$

つまり、軌道長半径は、エネルギー E だけで決まる。同様に、(174) と (167) を使って、

$$b^2 = -h^2/2Em. \tag{176}$$

これら二つの式は、M, m, E, h が与えられらば、一意的に a, b、つまり楕円軌道が決まることを表わしている。

8.6. ケプラーの法則

楕円の長半径を a、短半径を b としたとき、その面積は πab で与えられる。角運動量を h、天体の質量を m とするとすると、面積速度は $h/2m$ である。よって、天体の公転周期 T は、

$$T = \frac{\pi ab}{h/2m}. \tag{177}$$

である。ここで、(174) と (167) を使って、$b = \sqrt{al} = \frac{h}{m}\sqrt{\frac{a}{GM}}$ だから、

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}. \tag{178}$$

これが、惑星の公転周期の二乗が軌道長半径の三乗に比例する、という**ケプラーの第三法則**である[41]。

8.7. 円軌道の場合

円運動の場合 (離心率 $e = 0$) の運動方程式は、半径 r、公転速度を v として、

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \tag{179}$$

である。周期 T は、$T = 2\pi r/v$ だから、

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \tag{180}$$

となり、ケプラーの第三法則が得られた。

[41] 惑星は太陽を焦点の一つとする楕円軌道を描く、というのが第一法則。面積速度一定が第二法則。