東京大学教養学部 2007 年度冬学期 宇宙科学 II (海老沢) 講義ノート (2008 January 28)

http://plain.isas.jaxa.jp/~ebisawa/TEACHING/2007UnivTokyo.html に置いてあります。

Contents

1. 天球座標の定義と座標変換 3
   1.1. 赤道座標、黄道座標 3
   1.2. 銀河座標 4
   1.3. 座標変換 4
   1.4. 方向ベクトル 5
   1.5. 直交変換と変換行列 6
   1.6. 直交変換の簡単な記法 7
   1.7. スカラー三重積 8
2. オイラー角と変換行列 8
   2.1. 座標変換の計算 8
   2.2. オイラーの定理 8
   2.3. オイラー角 9
3. 座標変換の具体例 10
   3.1. 赤道座標と黄道座標への変換 10
   3.2. 赤道座標から銀河座標への変換 11
4. 人工衛星の姿勢 12
   4.1. 人工衛星の姿勢とオイラー角 12
   4.2. 観測装置の視野とオイラー角 12
5. 四元数と座標変換、人工衛星の姿勢 13
   5.1. 四元数 (quaternion) 13
   5.2. 四元数の性質[1] 13
   5.3. 四元数と回転[2] 15
   5.4. 四元数と変換行列の関係 16
   5.5. 座標変換への応用 17
   5.6. 人工衛星の姿勢への応用 18
6. 特殊相対性理論 19
   6.1. ローレンツ変換[3] 19
   6.2. 固有時間 22

[1] この節と次節では ftp://ftp.cis.upenn.edu/pub/graphics/shoemake/quatut.ps.Z を参考にしています。このメモの著者の Ken Shoemake は、コンピューターグラフィクスに quaternion を導入した人らしい。

[2] この節の議論は、有名な教科書、"Classical Mechanics" H. Goldstein に倣いました。

[3] Jackson, "Classical Electrodynamics" の" 第 1 版" を参考にしています (日本語訳も出ています)。特殊相対論に関しては、第 2 版よりも第 1 版の記述のほうがシンプルでわかりやすいと感じました。

6.3. 四元速度 22
6.4. 速度の変換則 23
6.5. 四元運動量 24
6.6. ドップラー効果と光行差 (aberration) 25
7. 一般相対性理論[4] 27
7.1. 局所慣性系 27
7.2. シュバルツシルト時空 28
7.3. シュバルツシルト時空の GPS への応用 29
8. 二体問題 31
8.1. 二体問題の例 31
8.2. 角運動量、中心力、角運動量保存則 33
8.3. 換算質量 34
8.4. 人工衛星の軌道、惑星の軌道 35
8.5. 楕円軌道 36
8.6. ケプラーの法則 38
8.7. 円軌道の場合 38
8.8. 軌道六要素 38
8.9. 静止衛星 39
8.10. Two Line Elements 40
9. X 線連星系の観測 42
9.1. 重力エネルギーの解放 42
9.2. エディントン限界光度 43
9.3. 黒体輻射 (blackbody radiation) 43
9.4. 黒体輻射のスペクトルと波長、振動数、エネルギーの関係 44
9.5. 黒体輻射の例 45
9.6. ステファンボルツマンの法則 46
9.7. 中性子星、白色矮星の表面温度 47
9.8. ブラックホールの周りの降着円盤の温度 47

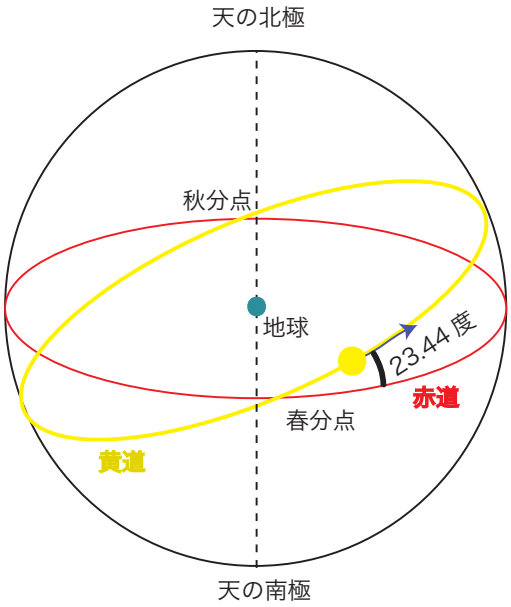
[4] この節では、”Exploring Black Holes –Introduction to General Relativity”, by Taylor and Wheeler, Addison Wesley Longman を参考にしています。日本語でも英語でも一般相対性理論の教科書は山のようにありますが、僕が見た限り、これが一番わかりやすい教科書でした (しかし厳密ではありません)。

1. 天球座標の定義と座標変換

1.1. 赤道座標、黄道座標

天文学では、天体の「見かけ」の位置を表すのに、仮想的な天球という概念を用いる。宇宙が球であり、その中心に私たちがいる (地球がある)、というイメージである。地球の自転軸を延ばしていって、天球とぶつかったところが、点の北極。地球の赤道を拡げていって、天球とぶつかったところが天の赤道。

地球の自転軸は、地球の公転面と垂直ではなく[5]$23.^{\circ}44$ 傾いている[6]。太陽が一年を通じて天球上で通る道を黄道と呼ぶが、黄道は天の赤道と $23.^{\circ}44$ 傾いていることになる。太陽が天の赤道を南から北に横切る点が春分点、北から南に横切る点が秋分点。



地球上の経度 $(0^{\circ} \sim 360^{\circ})$、緯度 $(-90^{\circ} \sim +90^{\circ})$ を定義し、それで地球上の位置を表すように、天球上で、赤経 $(0^{\circ} \sim 360^{\circ})$、赤緯 $(-90^{\circ} \sim +90^{\circ})$ を定義し、それによって天体の位置を表す。グリニッジ天文台 (経度=0°) が地球上の経度の基準点であるように、赤経の基準点は春分点である。このように、天の赤道面を基準にした座標系が赤道座標である[7]。同様に天の黄道

---

[5] 地球自転軸は、25800 年の周期で歳差運動している (コマの首振り運動と同じ)。これによって、赤道座標系は時間とともずれていくので、いつの時点の地球自転軸に準じた赤道座標系かを明示する必要がある。現在普通に使われているのは 2000 年分点であり、これを J2000 で表す。私が大学院に入った 1986 年頃は 1950 年分点のほうが広く使われていて、これを、B1950 と表す。例として、ブラックホール天体、白鳥座 X-1 の赤経赤緯は、$(299.^{\circ}590, 35.^{\circ}201)$ (J2000), $(299.^{\circ}120, 35.^{\circ}065)$(B1950) である。

[6] 41000 年の周期で、$22.^{\circ}2$ から $24.^{\circ}5$ まで変化する。地球の回転を調べることが学問の一大分野になっていて、日本では国立天文台水沢でやっている。

[7] 天球の回転がまさに我々が日常使っている時刻と結びついているために、赤経を 0° から 360° で表す代わりに、0 時から 24 時で表すことがある。1 時間が 15° に対応する。通常通り、1 時間は 60 分、1 分は 60 秒。時、分、秒に対応する部分を hh, mm, ss.s としたとき、赤経を、hh:mm:ss.s と表記する。また、一般的に 1 度は 60 分角、1 分角は 60 秒角。これを、$1^{\circ} = 60', 1' = 60''$ と表記する。赤緯を分角、秒角で表わすことも多い。たとえ

面を基準にした座標系が黄道座標である。

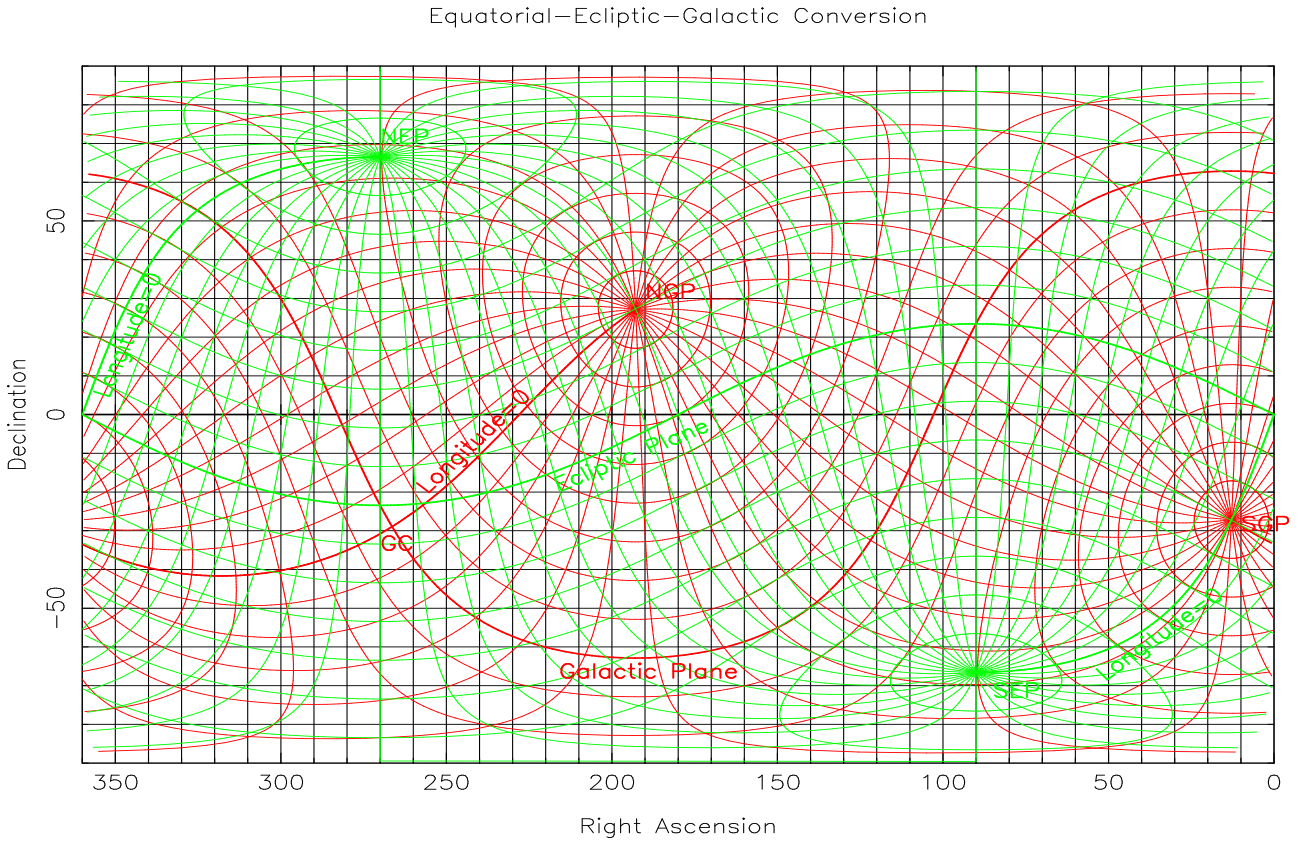
地球上と同様、天球上でも方角を東西南北で表わす。天の北極の方向が北、南極の方向が南、赤経が増える方向が東、減る方向が西。地球上 (地球を外から見ている) と天球上 (天球を内から見ている) で東西の向きが逆になっていることに注意。つまり地図を拡げたとき、北が上向きなら東は右 (右向きに経度が増加する)。一方、「天球図」においては、北が上向きなら、東は左 (左向きに経度が増加する)。

1.2. 銀河座標

もう一つ良く使われるのが、我々の銀河系 (天の川) を基準に取った、銀河座標である。銀河中心の方向が銀経$=0$ 度で (左向きに銀経が増加)、銀河面が銀緯$=0$ 度に対応している。

1.3. 座標変換

任意の天体の位置を、赤道座標、黄道座標、銀河座標で表すことができる。以下の図は、これら 3 つの座標の間の変換を示したものである[8]。



たとえば、以下の 3 つは天球上で同じ位置を表わす[9]。

ば、ある天体の赤経、赤緯を $(281.^\circ00, -4.^\circ07)$ と書いても、$(18:44:0.0, -4^\circ4'12'')$ と書いてもよい。

[8] この図を作った Fortran プログラムをホームページに上げておきますので、参考にしてください。

[9] ほぼ銀河面上 (銀緯が小さいことからわかりますね？)、銀河中心から $28.^\circ5$ 離れて、X 線を強く放射している領域で、「僕の好きな空」です。日本やアメリカの人工衛星で X 線観測、チリやハワイの望遠鏡で赤外線観測

(赤経、赤緯)=$(281.^\circ000,\ -4.^\circ070)$
(銀経、銀緯)=$(28.^\circ463,\ -0.^\circ204)$
(黄経、黄緯)=$(281.^\circ608,\ 18.^\circ927)$
どうやってこのような座標変換を計算するのだろうか[10]？今回はそれを考えてみよう。

1.4. 方向ベクトル

赤経と赤緯を通常、$(\alpha,\ \delta)$ で表す。仮に天球の半径を 1 としたとき、長さが 1 で、(α,δ) の方向を表す方向ベクトル、$\mathbf{p}$ を考えよう。春分点の方向を x 軸、赤道面上、赤経 90 度を y 軸、北極を z 軸、とする右手系を考えよう。方向ベクトルの xyz 座標は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{1}$$

$x^2+y^2+z^2=1$ になることを、当たり前だけど念のために確認しておこう。ここで定義した x,y,z 軸の基底ベクトルを、それぞれ $\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z}$ とすると、

$$\mathbf{p} = x\mathbf{e_x}+y\mathbf{e_y}+z\mathbf{e_z} = (\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

である。

黄道座標系に基づいた、x' 軸,y' 軸,z' 軸と、それぞれの基底ベクトル、$\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z}$ を考えよう。x' 軸は春分点を向いていて、$x'y'$ 軸面が黄道面に一致している。同様に、銀河座標系に基づいた、x'' 軸,y'' 軸,z'' 軸と、基底ベクトル $\mathbf{e''_x},\mathbf{e''_y},\mathbf{e''_z}$ を考える。x'' 軸は銀河中心を向いていて、$x''y''$ 平面は銀河面と一致している。

式 (2) で定義した方向ベクトル $\mathbf{p}$ を、黄道座標系でも銀河座標系でも表わすことができる。

$$\mathbf{p} = (\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z})\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\mathbf{e''_x},\mathbf{e''_y},\mathbf{e''_z})\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}. \tag{3}$$

式 (1) と同じ関係が、黄道座標と (x',y',z') の間に、銀河座標と (x'',y'',z'') の間に、成立する。たとえば、ベクトル $\mathbf{p}$ の銀河座標を (l,b) とすると、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b\,\cos l \\ \cos b\,\sin l \\ \sin b \end{pmatrix}. \tag{4}$$

これを逆に解いて、

をしました。

[10] たとえば、`http://heasarc.gsfc.nasa.gov/cgi-bin/Tools/convcoord/convcoord.pl` などで、座標変換のサービスを提供している。

$$\begin{pmatrix} l \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan^{-1}(y''/x'') \\ \tan^{-1}\left(z''/\sqrt{x''^2+y''^2}\right) \end{pmatrix} \tag{5}$$

によって、銀河座標 (l,b) を求めることができる。

以上まとめると、ある天体の赤経、赤緯 (α,δ) を銀経、銀緯 (l,b) に変換するには、式 (1) によって赤道座標系での方向ベクトルの 3 成分 (x,y,z) を求め、それを式 (3) によって銀河座標系の 3 成分 (x'',y'',z'') に変換し、さらに式 (5) を用いればよい。

1.5. 直交変換と変換行列

基底ベクトル $(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})$ で表される直交座標系と $(\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_3},\mathbf{e'_3})$ で表される直交座標系の間の直交変換を考える (添字 1,2,3 が上で書いた xyz に対応)。これらは、それぞれ互いに垂直な単位ベクトルの組だから、

$$\mathbf{e_1}^2 = \mathbf{e_2}^2 = \mathbf{e_3}^2 = 1, \mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_2} = \mathbf{e_2}\cdot\mathbf{e_3} = \mathbf{e_3}\cdot\mathbf{e_1} = 0 \tag{6}$$

$$\mathbf{e'_1}^2 = \mathbf{e'_2}^2 = \mathbf{e'_3}^2 = 1, \mathbf{e'_1}\cdot\mathbf{e'_2} = \mathbf{e'_2}\cdot\mathbf{e'_3} = \mathbf{e'_3}\cdot\mathbf{e'_1} = 0 \tag{7}$$

片方の系のベクトルはもう片方の系のベクトルを使って表わすことができる。

$$\mathbf{e'_1} = a_{11}\mathbf{e_1} + a_{12}\mathbf{e_2} + a_{13}\mathbf{e_3}, \tag{8}$$

$$\mathbf{e'_2} = a_{21}\mathbf{e_1} + a_{22}\mathbf{e_2} + a_{23}\mathbf{e_3}, \tag{9}$$

$$\mathbf{e'_3} = a_{31}\mathbf{e_1} + a_{32}\mathbf{e_2} + a_{33}\mathbf{e_3}. \tag{10}$$

行列表示すると、

$$(\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_2},\mathbf{e'_3}) = (\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

(7) の条件より、この変換行列の各要素の間に、

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \tag{12}$$

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0, a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0, a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0 \tag{13}$$

が成立する。また、(8)、(9)、(10) と、$\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$ の内積を取ることにより、以下がわかる。

$$\mathbf{e'_1}\cdot\mathbf{e_1} = a_{11},\ \mathbf{e'_1}\cdot\mathbf{e_2} = a_{12},\ \mathbf{e'_1}\cdot\mathbf{e_3} = a_{13}, \tag{14}$$

$$\mathbf{e'_2}\cdot\mathbf{e_1} = a_{21},\ \mathbf{e'_2}\cdot\mathbf{e_2} = a_{22},\ \mathbf{e'_2}\cdot\mathbf{e_3} = a_{23}, \tag{15}$$

$$\mathbf{e'_3}\cdot\mathbf{e_1} = a_{31},\ \mathbf{e'_3}\cdot\mathbf{e_2} = a_{32},\ \mathbf{e'_3}\cdot\mathbf{e_3} = a_{33}. \tag{16}$$

つまり、式 (11) で定義される変換行列の 9 つの変換係数は旧座標系の 3 軸と新座標系の 3 軸の間のなす 9 つの角度の余弦に対応している。これを、「$\mathbf{e_1}\mathbf{e_2}\mathbf{e_3}$ で表わされる系における $\mathbf{e'_1}$,$\mathbf{e'_2}$,$\mathbf{e'_3}$ の方向余弦は、それぞれ $(a_{11},a_{12},a_{13}),(a_{21},a_{22},a_{23}),(a_{31},a_{32},a_{33})$ である」、という言いかたをする。同様に、式 (14),(15),(16) を縦に眺めると、「$\mathbf{e'_1}\mathbf{e'_2}\mathbf{e'_3}$ で表わされる系における $\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,$\mathbf{e_3}$ の方向余弦は、それぞれ $(a_{11},a_{21},a_{31}),(a_{12},a_{22},a_{32}),(a_{13},a_{23},a_{33})$ である」ことがわかる。

よって、式 (8),(9),(10) の逆変換は、

$$\mathbf{e_1} = a_{11}\mathbf{e'_1} + a_{21}\mathbf{e'_2} + a_{31}\mathbf{e'_3}, \tag{17}$$

$$\mathbf{e_2} = a_{12}\mathbf{e'_1} + a_{22}\mathbf{e'_2} + a_{32}\mathbf{e'_3}, \tag{18}$$

$$\mathbf{e_3} = a_{13}\mathbf{e'_1} + a_{23}\mathbf{e'_2} + a_{33}\mathbf{e'_3} \tag{19}$$

となる。

行列表示すると、

$$(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) = (\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

(6) の条件より、(12), (13) に対応する式は、

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \tag{21}$$

、

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0. \tag{22}$$

式 (11) と式 (20) を比較すると、変換行列の行と列を入れかえた転置行列が逆行列になっていることがわかる。

1.6. 直交変換の簡単な記法

以上の諸式を、簡単に表す記法がある。まず、添字、1,2,3 を i, j, k などの文字で表す。**Kronecker** のデルタを導入する。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{23}$$

さらに、「同じ添字が対になって一つの項に現われるときには、常にその添字について 1 から 3 までの和[11]をとる (Σ 記号を省略する)」という総和の規約を導入する。

基底ベクトルの直交条件、(6),(7) は以下のように書ける。

$$\mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_j} = \delta_{ij}, \mathbf{e'_i} \cdot \mathbf{e'_j} = \delta_{ij}. \tag{24}$$

二つの座標系の基底ベクトルと、変換行列との関係は以下のようになる。

$$\mathbf{e'_i} \cdot \mathbf{e_j} = a_{ij},\ \mathbf{e'_i} = a_{ij}\mathbf{e_j},\ \mathbf{e_i} = a_{ji}\mathbf{e'_j}. \tag{25}$$

座標軸の直交関係を表わす (12),(13),(21),(22) は、

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}. \tag{26}$$

[11] 空間の 3 次元に加えて、時間の 1 次元が入ると 1 から 4 まで (あるいは 0 から 3 まで) の和になる。

1.7. スカラー三重積

一般的に、ベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ のスカラー三重積は、

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{27}$$

で定義される。$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ がこの順に右手系をなすとき、スカラー三重積は、この 3 つのベクトルが作る平行六面体の体積を表わす。 スカラー三重積を $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ の直角成分を用いて書くと、

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=A_xB_yC_z+A_yB_zC_x+A_zB_xC_y-A_xB_zC_y-A_yB_xC_z-A_zB_yC_x \tag{28}$$

$$=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix}. \tag{29}$$

上記で定義した直交座標系の基底ベクトル $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$ または $\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_2},\mathbf{e'_3}$ のスカラー三重積は、当然 1 である。よって、直交変換の変換行列の行列式の値は 1 である。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1 \tag{30}$$

2. オイラー角と変換行列

2.1. 座標変換の計算

(3) と (20) を合わせると、

$$\mathbf{p}=(\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z})\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{31}$$

よって、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{32}$$

これが、二つの座標系における方向ベクトルの 3 成分、(x,y,z) と (x',y',z') との間の変換式である。

2.2. オイラーの定理

今、共通の原点を持つ二つの直交座標系の間の座標変換 (点のまわりの回転変位) を考えているのだが、この場合に以下のオイラーの定理が成立する。

定理 **I** 点のまわりの回転変位は、その点を軸とする **1** つの軸のまわりの回転によって達っせられる。

これを、すでに学んだ直交行列の性質から簡単に証明することができる。回転変位を実現する回転軸に沿った方向ベクトルはその変換によって不変だから、そのベクトルの 3 成分を (x_0, y_0, z_0) と書けば、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

ここで変換行列を単純に A と書いた。これは、直交行列 A に対して、(x_0, y_0, z_0) が固有ベクトルであり、固有値が 1 であることを示している。単位行列 I を持ちいると、上式は、

$$(A - I) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

と書ける。つまり、行列 $A - I$ には逆行列が存在しない。その条件は、行列式が 0 であること、

$$|A - I| = 0 \tag{35}$$

である。ところで、A の転置行列 ${}^tA$ は A の逆行列だから、

$$(A - I)\,{}^tA = I - {}^tA. \tag{36}$$

ここで両辺の行列式を取り、転置行列の行列式は元の行列式と等しいこと、回転行列の行列式は 1 であること (式 30) を持ちいると、

$$|A - I| = |I - A|. \tag{37}$$

一般に、 $n \times n$ 行列 B の行列式について、

$$|-B| = (-1)^n |B| \tag{38}$$

が成立する。今考えている 3 次元行列については、$|I - A| = -|A - I|$ である。よって、(37) は (35) を示していることがわかる。

2.3. オイラー角

変換行列は 9 つの要素を持つわけだが、独立な要素は 3 つである[12]。その 3 つを指定すれば、二つの座標系の間の変換を定義したことになる。

座標変換を表わす 3 つのパラメーターとして良く使われるものにオイラー角がある。オイラー角にもいろいろな定義があるが、ここでは日本の科学衛星の姿勢に使われている「zyz」オイラー角の定義を用いて議論を進める。

赤道座標の上で、1.4 節で定義した、x, y, z 軸を考える (x 軸は春分点、z 軸は北極を向いている)。z 軸の周りに、$+z$ の向きを向いて時計周りに角度 ϕ 回転し、x 軸、y 軸の位置を変える。この新たな 3 軸を、便宜上 $x'y'z'$ としよう ($z = z'$ である)。次に、y' 軸の周りに、角度 θ 回転し、$x'z'$ 軸の位置を変え、$x''y''z''$ 軸を定義する ($y' = y''$ である)。最後に、z'' 軸の周りに ψ 回

[12] オイラーの定理より任意の直交変換は、回転軸の方向 (二つの要素で決まる) とそのまわりの回転角を与えれば実現できる。よって、必要なパラメーターは 3 つである。

転し、最終的に、x''',y''',z''' 軸を定義することができる。xyz 軸による旧座標系と、$x'''y'''z'''$ 軸による新座標系の間の関係を与える (ϕ,θ,ψ) を、オイラー角と呼ぶ。

このように定義したオイラー角と、(11) または (20) で与えられる変換行列との関係を調べてみよう。まず、最初の z 軸のまわりの ϕ 回転で、新たな基底ベクトルと元の基底ベキトルの間の関係は以下のようになる。

$$(\mathbf{e_1'},\mathbf{e_2'},\mathbf{e_3'}) = (\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}) \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

同様にして、y' 軸周りの θ 回転によって、

$$(\mathbf{e_1''},\mathbf{e_2''},\mathbf{e_3''}) = (\mathbf{e_1'},\mathbf{e_2'},\mathbf{e_3'}) \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{40}$$

z'' 軸周りの ψ 回転によって、

$$(\mathbf{e_1'''},\mathbf{e_2'''},\mathbf{e_3'''}) = (\mathbf{e_1''},\mathbf{e_2''},\mathbf{e_3''}) \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

以上、3 式をまとめて、

$$(\mathbf{e_1'''},\mathbf{e_2'''},\mathbf{e_3'''}) = (\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}) \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

$$= (\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}) \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta\cos\psi + \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{43}$$

これは回転行列だから、条件 (26) と (30) を満たしていることに注意しよう[13]。

3. 座標変換の具体例

3.1. 赤道座標と黄道座標への変換

春分点を指している x 軸の周りの回転を考えると速い。回転角 $\theta = 23.^\circ 43929$ である[14]。元の基底ベクトルを $\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z}$, 新たな基底ベクトルを $\mathbf{e_x'},\mathbf{e_y'},\mathbf{e_z'}$ とすると、

$$(\mathbf{e_x'},\mathbf{e_y'},\mathbf{e_z'}) = (\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91748 & -0.39778 \\ 0 & 0.39778 & 0.91748 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

[13] 手計算は面倒だが、"Mathematica" を使えば計算してくれる。しかし、ある程度は自分の手を動かすことを覚えておいたほうが良い。

[14] 正確な出典はわからなかったのだが、HEASARC の coco ではこの値を使っているので、ここではそれに倣うことにした。

$$(\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})=(\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z})\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.91748 & 0.39778\\ 0 & -0.39778 & 0.91748\end{pmatrix}. \tag{45}$$

よって、赤道座標での方向ベクトルの 3 成分を (x,y,z), 黄道座標での成分を (x',y',z') としたとき、(32) より、

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.91748 & 0.39778\\ 0 & -0.39778 & 0.91748\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \tag{46}$$

が、赤道座標から黄道座標への変換を与える。5 ページの例を考えてみよう。赤経、赤緯が $(281.^\circ000,\quad -4.^\circ070)$ のとき、(1) で与えられる、その方向ベクトルは、$(0.19033,\,-0.97915,\,-0.0709752)$ となる。(46) より、黄道座標における方向ベクトルは、$(0.19033,-0.92658,0.32437)$ となる。(5) と同様にして、

$$\tan^{-1}\left(\frac{-0.92658}{0.19033}\right)=-78.^\circ3923=281.^\circ608.$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{0.32437}{\sqrt{-0.92658^2+0.19033^2}}\right)=18.^\circ927.$$

このようにして、黄経、黄緯が得られた。

3.2. 赤道座標から銀河座標への変換

銀河中心の赤経、赤緯は $(266.^\circ40500,-28.^\circ93617)$ である。2 節で定義した z 軸の周りの $\phi=266.^\circ40500$,y 軸の周りの $\theta=28.^\circ93617$ の回転で、新たな x 軸が銀河中心を指すことがわかるだろう。しかし、それだけでは銀河面の傾きが決まっていない。さらに「新たな x 軸のまわり」で $\psi=58.^\circ59866$ 回転してやれば、正しく銀河座標系が定義されることがわかっている。銀河座標系の基底ベクトルをダッシュつきで表わすと、(42) を参考にして、

$$(\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z})=(\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi\\ 0 & \sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}. \tag{47}$$

逆変換は以下のようになる。

$$(\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})=(\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z})\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi & \sin\psi\\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{48}$$

$$=(\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z})\begin{pmatrix}-0.0548755 & -0.873437 & -0.483835\\ 0.49411 & -0.44483 & 0.746982\\ -0.867666 & -0.198076 & 0.455984\end{pmatrix}. \tag{49}$$

よって、赤道座標での方向ベクトルの 3 成分を (x,y,z), 銀河座標での成分を (x',y',z') としたとき、(32) より、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0548755 & -0.873437 & -0.483835 \\ 0.49411 & -0.44483 & 0.746982 \\ -0.867666 & -0.198076 & 0.455984 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{50}$$

が、赤道座標から銀河座標への変換を与える。

赤経、赤緯が $(281.^\circ000, -4.^\circ070)$ のときの方向ベクトル、$(0.19033, -0.97915, -0.0709752)$ を上式に代入し、銀河座標における方向ベクトルは、$(0.879122, 0.476581, -0.00355986)$ となる。これから、

$$\tan^{-1}\left(\frac{0.476581}{0.879122}\right) = 28.^\circ463$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{-0.00355986}{\sqrt{0.879122^2 + 0.476581^2}}\right) = -0.^\circ204$$

となり、正しい銀経、銀緯が得られた。

4. 人工衛星の姿勢

4.1. 人工衛星の姿勢とオイラー角

天球に対する人工衛星の姿勢を、オイラー角を使って表わすことができる。宇宙科学研究本部の科学衛星では、たとえば、X 線天文衛星「あすか」、「すざく」、赤外線天文衛星「あかり」に関しては、スピン軸が衛星の+Z 軸、衛星の太陽電池パネルは+Y 軸の方向を向いていて、観測方向 (望遠鏡が向いている方向) は+Z 軸方向である。Z 軸を天の北極、X 軸を春分点、Y 軸を赤経=90° が衛星の初期姿勢で、そこから ZYZ の順に回転させていった 3 つのオイラー角で、衛星の姿勢を定義する。

十分な発電量を得るため、+Y 軸は、常に太陽の方向を向いている必要がある[15]。季節によって、太陽は黄道上を移動し、+Z 軸方向を観測するので、観測ターゲットは、太陽と約 90° をなす大円上になくてはならないことがわかる。また、黄道座標の北極 (North Ecliptic Pole; NEP) と南極 (South Ecliptic Pole; SEP) は、一年中観測可能であることがわかる。

4.2. 観測装置の視野とオイラー角

衛星のオイラー角と、観測している視野の関係は大切である。ZYZ のオイラー角を (ϕ, θ, ψ) としよう。衛星の+Z 軸が観測装置が見ている方向だから、赤経 (R.A.)、赤緯 (Dec.) は、

$$R.A. = \phi, Dec. = 90^\circ - \theta \tag{51}$$

で与えられることがただちにわかるだろう。

第 3 オイラー角、ψ は、観測装置がターゲットの周りに回転する角、いわゆるロール角を与える。慣習として、ロール角は、天の北から観測装置の+Y 軸 (DETY) へ、反時計周りに計った角を使う[16]。第 3 オイラー角とロール角 (ROLL) の関係は、

---

[15] 少々ずれていても良い。太陽と+Y 軸のなす角を「太陽角」と言う

[16] 地球上では、通常、方位角は北から時計周りに計った角で定義する。経度が増える向きが地球と天球で反対のため、こうなる。

$$Roll = 90° - \psi \tag{52}$$

で与えられる。

人工衛星による実際の観測においては、観測ターゲットの天球上での位置と季節 (太陽の天球上での位置) に応じて、オイラー角を決定する必要がある[17]。具体的な例を見てみよう。NEP の赤経、赤緯は $(270°.0, 66.°6)$ であることは良いだろう (4 頁の図参照)。「すざく」衛星は、今までこの領域を二回観測している。その時期とオイラー角は以下の通りである。

2005-09-02 (272.80, 24.00, 159.07)

2006-02-10 (272.82, 23.98, 323.67)

式 (51) より、これらのオイラー角が、NEP 近辺を見ていることがわかる。最初の ZY の回転で、Y 軸がほぼ春分点を、Z 軸がほぼ NEP を向いていることに注意。よって、Y 軸はほぼ黄道上にあり、第 3 オイラー角がその黄経に対応することがわかる。秋分の時に太陽の黄経が 180°、春分の時に 0° であることを考えれば、9 月 2 日の太陽の黄経はほぼ 159°、2 月 10 日の太陽の黄経がほぼ 324° であることがわかるだろう。

5. 四元数と座標変換、人工衛星の姿勢

5.1. 四元数 *(quaternion)*

これまで見てきたように、オイラー角を用いて人工衛星の姿勢を記述することができる。また、オイラー角から得られる回転行列 (式 43) を用いれば、天球座標と衛星座標の変換が計算できる。

では、時々刻々と変化する人工衛星の姿勢を記述する「姿勢ファイル」にはオイラー角が時間の関数として書かれているか？、というとそうではない。多くの場合、姿勢ファイルには、時間の関数として、四元数 **(quaternion)** が書かれている。四元数を用いると、任意の座標変換を連続的に表現できる[18]、計算に三角関数が必要ない、9 つの要素を持つ変換行列と比較して、パラメーターが 4 つだけなので計算量が少くて済む、等のメリットがあるので、人工衛星の姿勢計算やコンピューターグラフィクスなどに広く用いられている。

5.2. 四元数の性質[19]

四元数は 19 世紀にハミルトンによって発見されたそうだ。数学的な側面はともかく、ここでは四元数の応用面について述べる。すぐ後に述べるように、ノルム **(norm)** が **1** である単位四元数 **(unit quarternion)** は、**3** 次元直交座標系の間の直交変換を記述する。

四元数は複素数の拡張として、以下のように定義される。

$$q \equiv \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z + w, \text{ where } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1. \tag{53}$$

ここで、x, y, z, w は実数である。また四元数を以下のようにも表す。

---

[17] こういう衛星運用も、宇宙科学研究所の研究者の大事な仕事である

[18] たとえば、ZYZ で定義されるオイラー角を採用した場合、X 軸の周りの回転を記述するのはやっかいである。

[19] この節と次節では `ftp://ftp.cis.upenn.edu/pub/graphics/shoemake/quatut.ps.Z` を参考にしています。このメモの著者の Ken Shoemake は、コンピューターグラフィクスに quaternion を導入した人らしい。

$$q = [\mathbf{v}, w] = [(x, y, z), w] = [x, y, z, w]. \tag{54}$$

$\mathbf{v}$ は、3 次元空間のベクトルを表す。$q = [\mathbf{v}, w], q' = [\mathbf{v}', w']$ とするとき、四元数同士の和、積は四元数であり、それは次のように定義される。

$$q + q' = [\mathbf{v}, w] + [\mathbf{v}', w'] \equiv [\mathbf{v} + \mathbf{v}', w + w']. \tag{55}$$

$$qq' = [\mathbf{v}, w][\mathbf{v}', w'] \equiv [\mathbf{v} \times \mathbf{v}' + w\mathbf{v}' + w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']. \tag{56}$$

積が可換でないことに注意 (異なる軸の周りの回転が可換でないことに対応している)。また、$q'' = [\mathbf{v}'', w'']$ としたとき、

$$(qq')q'' = q(q'q'') \tag{57}$$

が成立する[20]。

定数や 3 次元ベクトルも、四元数表示することができる。s を実数の定数としたとき、その四元数表示は、$[0, 0, 0, s] = [\mathbf{0}, s]$。$\mathbf{v}$ を 3 次元ベクトルとしたとき、その四元数表示は、$[\mathbf{v}, 0]$。定数や 3 次元ベクトルを四元数表示したとき、それらを含む四元数の積に関して、以下は自明である。

$$sq = [\mathbf{0}, s][\mathbf{v}, w] = [s\mathbf{v}, sw] = qs, \tag{58}$$

$$\mathbf{v}\mathbf{v}' = [\mathbf{v}, 0][\mathbf{v}', 0] = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}', -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']. \tag{59}$$

s, s' を四元数の定数、p, q, q' を任意の四元数としたとき、以下のように線型性が成立する。

$$p(sq + s'q') = spq + spq', \tag{60}$$

$$(sq + s'q')p = sqp + s'q'p. \tag{61}$$

四元数の共役 (conjugate) の定義と、その性質は以下の通りである。

$$q^* = [\mathbf{v}, w]^* \equiv [-\mathbf{v}, w]. \tag{62}$$

$$(q^*)^* = q, \tag{63}$$

$$\begin{aligned}(pq)^* = \{[\mathbf{v}, w][\mathbf{v}', w']\}^* &= [\mathbf{v} \times \mathbf{v}' + w\mathbf{v}' + w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']^* \\ &= [\mathbf{v}' \times \mathbf{v} - w\mathbf{v}' - w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'] \\ &= [-\mathbf{v}', w][-\mathbf{v}, w'] = q^*p^*,\end{aligned} \tag{64}$$

$$(p + q)^* = p^* + q^*. \tag{65}$$

ノルムの定義と性質は以下の通りである。

---

[20] これはそんなに自明でないから、ぜひ自分で手を動かして確認しておこう。その証明には、スカラー三重積に関する法則 (27) と、ベクトル三重積に関する法則、$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$ を使う。(おそらく) 力学の教科書に書いてあるように、ベクトル三重積の展開式を以下のように覚えておく。(1) 展開式はカッコ内のベクトルの一次結合であって、(2) 各ベクトルの係数は他の 2 つのベクトルの内積であり、(3) その符号は三重積の中央のベクトルに対しては正、端のベクトルに対しては負である。

$$N(q) \equiv qq^* = q^*q = w^2 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = w^2 + x^2 + y^2 + z^2, \tag{66}$$

$$N(qq') = (qq')^*(qq') = q'^*q^*qq' = N(q)q'^*q' = N(q)N(q^*), \tag{67}$$

$$N(q^*) = N(q). \tag{68}$$

特に、ノルムが 1 である四元数を単位四元数 (unit quaternion) と呼ぶ。q の逆四元数を

$$q^{-1} = q^*/N(q) \tag{69}$$

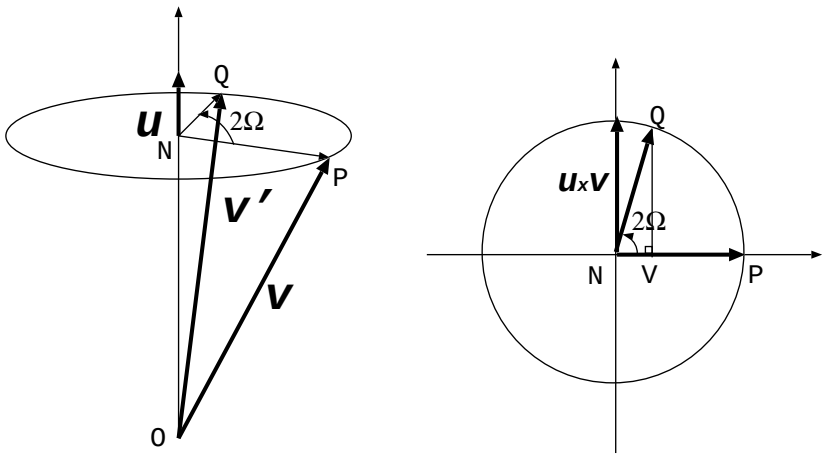
で定義する。q が単位四元数であるとき、

$$q^{-1} = q^* \tag{70}$$

である。

5.3. 四元数と回転[21]

定理 II $\mathbf{u}$ を単位ベクトルとするとき、ノルムが *1* である単位四元数、$q = [\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega]$ と、任意のベクトル $\mathbf{v}$ を空間成分とする四元数、$p = [\mathbf{v}, 0]$ を考える。$p' = qpq^{-1} = [\mathbf{v}', 0]$ としたとき、$\mathbf{v}'$ は、$\mathbf{v}$ を $\mathbf{u}$ の周りに角度 2Ω 回転したものである。



まず、幾何学的に考えよう。上図がここで考えている状況を図示したものである。$\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ を $\mathbf{u}$ の周りに 2Ω 回転したものが、$\mathbf{v}' = \overrightarrow{OQ}$ である。ここで、$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ}$ であることに注目する。また、$\overrightarrow{ON} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}$、$\overrightarrow{NV} = \cos 2\Omega\,(\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u})$、$\overrightarrow{VQ} = \sin 2\Omega\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ である。よって、

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + \cos 2\Omega\,(\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}) + \sin 2\Omega\,\mathbf{u}\times\mathbf{v} \\ &= (1 - \cos 2\Omega)\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + \cos 2\Omega\,\mathbf{v} + \sin 2\Omega\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}.\end{aligned} \tag{71}$$

一方、四元数の計算より、

$$p' = qpq^{-1} = [\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega][\mathbf{v}, 0][-\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega]$$

[21] この節の議論は、有名な教科書、"Classical Mechanics" H. Goldstein に倣いました。

$$= [\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega][-\sin\Omega(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) + \cos\Omega\,\mathbf{v}, \sin\Omega\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}]$$

$$= [-\sin^2\Omega\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) + \sin\Omega\cos\Omega\mathbf{u}\times\mathbf{v} - \sin\Omega\cos\Omega(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) + \cos^2\Omega\mathbf{v} + \sin^2\Omega(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}, 0]. \quad (72)$$

空間ベクトル部を取りだして、ベクトル三重積を展開して変形すると、

$$\mathbf{v}' = -\sin^2\Omega\mathbf{v} + \sin^2\Omega(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + 2\sin\Omega\cos\Omega\mathbf{u}\times\mathbf{v} + \cos^2\Omega\mathbf{v} + \sin^2\Omega(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}$$

$$= 2\sin^2\Omega(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + (\cos^2\Omega - \sin^2\Omega)\mathbf{v} + 2\sin\Omega\cos\Omega\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}$$

$$= (1-\cos 2\Omega)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + \cos 2\Omega\,\mathbf{v} + \sin 2\Omega\,\mathbf{u}\times\mathbf{v} \quad (73)$$

となり、式 (71) と式 (73) は完全に一致する。よって、定理 II が示された。

$p = [\mathbf{v}, 0]$ について、単位四元数 q,q' による回転を引き続いて行う場合を考える。

$$q'(qpq^{-1})q'^{-1} = q'qpq^{-1}q'^{-1} = (q'q)p(q'q)^{-1}. \quad (74)$$

ここで、(57)、(64) を用いた。よって、以下の定理が得られた[22]。

定理 III 単位四元数 q による回転に引き続いて q' という回転を行うとき、その回転は $q'q$ という新たな単位四元数で表わされる。

5.4. 四元数と変換行列の関係

$\mathbf{v} = x\mathbf{e_x} + y\mathbf{e_y} + z\mathbf{e_z}$ として、(71) または (73) の各成分を書き下してみる。ただし、

$$q = [\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega] \equiv [q_1, q_2, q_3, q_4] \quad (75)$$

とする。これが単位四元数であるという条件から、

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (76)$$

である。$\sin\Omega\mathbf{u} = q_1\mathbf{e_x} + q_2\mathbf{e_y} + q_3\mathbf{e_z}$ であることを使う。

$$\mathbf{v}' = 2(\sin\Omega\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}\ \sin\Omega\mathbf{u} + (2\cos^2\Omega - 1)\mathbf{v} + 2\cos\Omega\,(\sin\Omega\mathbf{u})\times\mathbf{v}$$

$$= 2(q_1x + q_2y + q_3z)(q_1\mathbf{e_x} + q_2\mathbf{e_y} + q_3\mathbf{e_z}) + (q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)(x\mathbf{e_x} + y\mathbf{e_y} + z\mathbf{e_z})$$

$$+2q_4\{(q_2z - q_3y)\mathbf{e_x} + (q_3x - q_1z)\mathbf{e_y} + (q_1y - q_2x)\mathbf{e_z}\}$$

$$= (\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}) \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_1q_2 - 2q_3q_4 & 2q_1q_3 + 2q_2q_4 \\ 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 \\ 2q_1q_3 - 2q_2q_4 & 2q_2q_3 + 2q_1q_4 & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (77)$$

$$\equiv (\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (78)$$

ここで、式 (77) で得られた 3×3 変換行列を簡単のために A と表わした。式 (78) の意味は以下の通りである。基底ベクトル $(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$ を持つ座標系で、(x, y, z) という成分で表わされるベク

[22] オイラー角を用いて、3 つの回転を順次行う際の行列計算が非常に面倒くさかったことを思いだそう (43 式など)。四元数を用いると、回転はよりシンプルに記述できる。

トル $\mathbf{v}$ を、式 (75) で表される四元数によって回転し、$\mathbf{v}'$ というベクトルが得られたとき、同じ座標系におけるその成分は $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で与えられる。ここで考えたのは、ベクトルの変換 (回転) であって座標変換ではないことに注意。

次に座標変換を考える。すなわち、$(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$ という基底ベクトルそれぞれを、式 (75) で表される四元数によって回転し、新たな $(\mathbf{e'_x}, \mathbf{e'_y}, \mathbf{e'_z})$ という基底ベクトルを定義したとき、$\mathbf{v}$ というベクトルの旧座標系における成分 (x, y, z) から新座標系における成分 (x', y', z') への変換を考える。その変換行列は $A^{-1} = {}^tA$ で与えられることは自明だろう。よって、以前に式 (32) で定義した変換行列と対比して書くと、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & 2q_1q_3 - 2q_2q_4 \\ 2q_1q_2 - 2q_3q_4 & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_2q_3 + 2q_1q_4 \\ 2q_1q_3 + 2q_2q_4 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{79}$$

8 頁で述べたオイラーの定理を思いだそう。$(a_{11}, a_{12}, , , a_{33})$ の 9 つの成分を持つ変換行列が与えられたとき、それに対応する回転軸と回転角はどうやって求めたら良いだろうか？まず、(79) によって、$(a_{11}, , a_{33})$ から、対応する四元数 $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ を求める。15 頁の定理 II によって、$q = [q_1, q_2, q_3, q_4] = [\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega]$ と書いたとき、その座標変換はベクトル $\mathbf{u}$ のまわりの角度 2Ω の回転に対応している。

5.5. 座標変換への応用

赤道座標から銀河座標への変換行列の式 (50) と式 (79) を比較してみよう。これ q_1, q_2, q_3, q_4 について解くことができて、

$$q_1 = 0.4832,\ q_2 = -0.1963,\ q_3 = -0.6992,\ q_4 = 0.4889 \tag{80}$$

が得られる。12 頁の例にあるように、赤道座標における方向ベクトル $(0.19033, -0.97915, -0.0709752)$ を空間成分に持つ四元数 $p = (0.19033, -0.97915, -0.0709752, 0)$ を考える。上記の q を使い、定義に従って四元数の積を計算すると、

$$q^{-1}pq = (0.879122, 0.476581, -0.00355986, 0) \tag{81}$$

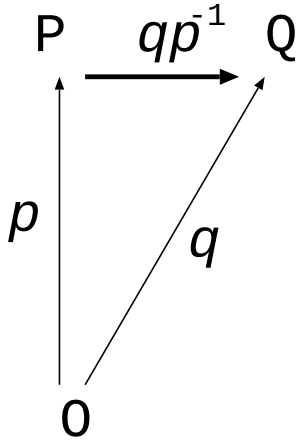
が得られる。この空間成分が銀河座標における方向ベクトルに対応している。式 (50) を使った行列計算でも、四元数を使った計算でも同じ結果が得られるというわけだ。

また、定理 II より、$q = [\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega]$ として、この q パラメーターは、単位ベクトル $\mathbf{u} = (0.5539, -0.2250, -0.8016)$ の周りの $2\Omega = 2 \times 60.^\circ73$ の回転に対応していることがわかる。3.2 節では、赤道座標から銀河座標への変換を 3 つのオイラー角 (各座標軸の周りの回転) で表わしたが、これは上記で示される、一回の回転と等価である (定理 I 参照)。

5.6. 人工衛星の姿勢への応用

四元数の具体的な応用例として、人工衛星の姿勢の平均や補間を考えよう。現実的に、二つ (あるいはそれ以上) の人工衛星の姿勢の平均や、離れた時間の間の姿勢の補完が必要になることがある。例えば、二つの姿勢計があり、その測定が少々違う場合、その平均をもっともらしい姿勢として採用することがある[23]。また、姿勢ファイルにはとびとびの時刻 (たとえば 4 秒ごと) における姿勢が書かれているので、その間の時刻における姿勢は、二つの姿勢の補間で決める必要がある。

元の姿勢 (通常、Z 軸が天の北極、X 軸が春分点の状態) を O、四元数 p で表わされる姿勢を P、四元数 q で表わされる姿勢を Q とする。下図からわかるように、姿勢 P から Q への変換は、新たな四元数 qp^{-1} で表されるはずである。



qp^{-1} がわかれば、それを $[\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega]$ と分解し、回転軸 $\mathbf{u}$ と回転角 2Ω がわかる。たとえば、その回転角のちょうど半分回転したのが、P と Q の平均の姿勢になる。P から Q に姿勢が移動しているとき、その間の姿勢を計算するには、回転角を経過時刻に合わせて補間してやれば良い。具体的には、姿勢 P を持つ時刻を t_0、姿勢 Q を持つ時刻を t_1 とすると、その間の時刻 t における姿勢は、四元数 $[\mathbf{u}\sin\Omega(t), \cos\Omega(t)]$ で与えられ、

$$\Omega(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \tag{82}$$

である。

[23] 私が「あすか」衛星の Slew(大きな姿勢移動) 中のデータを解析したとき、ジャイロを前方から積分して決めた姿勢と、後方から積分した姿勢の平均を使うと、もっとも正確な姿勢が得られることがわかりました。

6. 特殊相対性理論

6.1. ローレンツ変換[24]

これまでに、3 次元の直交変換が、天球座標の間の変換や人工衛星の姿勢に応用されることを学んだ。さらに 1 次元を加えて 4 次元時空を考えると、同様の直交変換が、特殊相対性理論にも使えることを見てみよう。

4 次元空間における直交変換を考える。あるベクトルを元の基底で表したときの成分が (x_1,x_2,x_3,x_4)、新しい基底ベクトルで表わしたときの成分を (x'_1,x'_2,x'_3,x'_4) とする。ベクトルの長さは不変なので、

$$s^2 \equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+x_4'^2 \tag{83}$$

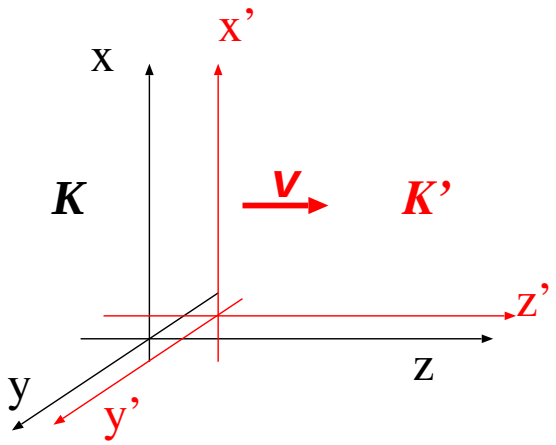
である。変換行列を $a_{ij}(i,j=1,2,3,4)$ と書くと、3 次元のとき (26, 32) と全く同じように、

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij},\ a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \tag{84}$$

$$x'_i = a_{ij}\,x_j,\ \ x_i = a_{ji}\,x'_j \tag{85}$$

が成立する。ここで、1.6 節で述べたように、同じ添字については 1 から 4 までの和を取る。

(x,y,z) を空間座標成分、t を時間とする。ある事象をある座標系 K で表わした「世界点」の座標を (x,y,z,t) する。下図のように、時刻 $t=t'=0$ で原点が K と一致し、K と相対的に速度 v で移動している座標系 K' を考え、その事象を K' で表わした座標を (x',y',z',t') とする。



c を光速として、$x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=ict$ としよう (x_4 が形式的に「虚時間」に対応していることに注意)。

このとき、式 (83) は、

$$s^2 \equiv x^2+y^2+z^2-(ct)^2 = x'^2+y'^2+z'^2-(ct')^2 \tag{86}$$

となり、これは相対的に等速運動をしている二つの座標系において、s^2 で定義される「世界間隔」が不変量であることを示している。式 (85) で表わされる (x,y,z,t) と (x',y',z',t') の間の変

[24] Jackson, "Classical Electrodynamics" の" 第 1 版" を参考にしています (日本語訳も出ています)。特殊相対論に関しては、第 2 版よりも第 1 版の記述のほうがシンプルでわかりやすいと感じました。

換がローレンツ変換で、式 (83) で表わされるのがローレンツ不変量である。一般に、式 (83) で示されるように「長さ」が不変で、式 (85) のローレンツ変換に従うベクトルを四元ベクトルと呼ぶ。

特に、時刻 $t = t' = 0$ で両系の原点を出発した光を考える。光の波面は球面上に拡がっていくわけだが、時刻 t,t' における波面上の座標はそれぞれの系で、$(x, y, z), (x', y', z')$ で、式 (86) は、

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, \tag{87}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \tag{88}$$

を意味している。つまり、K 系と K' 系がどのような相対速度で動いていようとも、どちらの系から見ても、光速は c である、という光速度一定の原理が得られた。

具体的な例を見てみよう。下図のように、K 系の z 軸 (x_3 軸) のプラス方向に、K' 系が速度 v で動いている場合を考える。

この場合のローレンツ変換は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \tag{89}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\gamma\beta \\ 0 & 0 & i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}. \tag{90}$$

ここで、

$$\beta = \frac{v}{c}, \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{91}$$

c は光速である。この変換行列が、直交条件、(84) を満たしていること、転置行列が逆行列になっていること ($a_{ij}^{-1} = a_{ji}$) を確認しておこう。

式 (89),(90) より、

$$x'_3 = \gamma(x_3 + i\beta x_4), \tag{92}$$

$$x_3 = \gamma(x'_3 - i\beta x'_4) \tag{93}$$

である。K' 系の原点は $x'_3 = 0$、K 系の原点は $x_3 = 0$ であるが、これらを代入すると、

$$x_3 = v\, t, \tag{94}$$

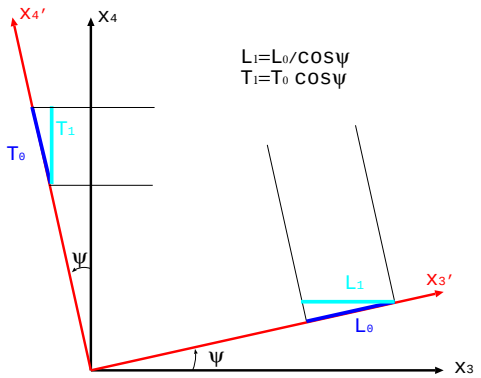
$$x'_3 = -v\, t' \tag{95}$$

が得られる。(94) は、K' 系の原点を K 系で表わしたときの関係式、(95) は、K 系の原点を K' 系で表わしたときの関係式で、どちらも自明である。

3 次元の直交変換は、座標系の間の空間回転を表わすのであった。同様に、4 次元の直交変換も、仮想的な回転で表すことができる。式、(89) を以下のように書こう。

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \tag{96}$$

$\cos\psi = \gamma \geq 1$ からわかるように、ここで導入した角度 ψ は仮想的なものであるが、ローレンツ変換を仮想的な座標軸の回転と考えても、以下で示すように、正しい結果が得られる。



K' 系で、x_3' 軸に沿った、長さ L_0 の棒を考えよう。K 系から見ると、この棒は $+z$ 方向に、速度 v で走っていることになる。K でこの棒の長さを測るときには、当然同時刻で測るから、それは、x_3 軸に沿った長さ L_1 になる。図から、

$$L_1 = L_0/\cos\psi \tag{97}$$

だから、

$$L_1 = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1-(v/c)^2} \leq L_0. \tag{98}$$

よって、走っている棒は短く見える (ローレンツ収縮)。次に、K' 系に固定した点における経過時間 T_0 を考える。これを K 系で測った時間 T_1 は、x_4 軸に沿って、

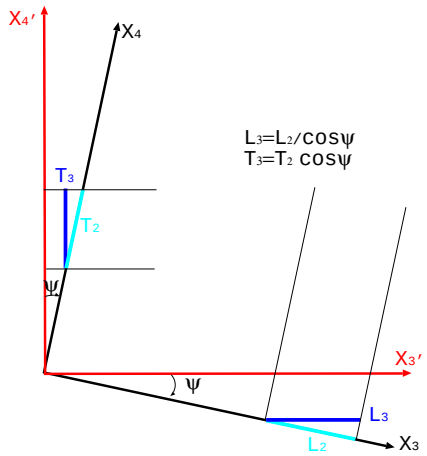
$$T_1 = T_0\ \cos\psi = T_0\,\gamma = \frac{T_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \geq T_0 \tag{99}$$

となる。つまり、動いている時計はゆっくり進む[25]。では、K' 系から K 系を見たときはどうなるのであろうか？特殊相対性原理によって、互いに等速運動をしている系から、すべての物理法則は、全く同じに見えなくてはいけない。

上図からわかるように、K 系の x_3 軸に沿った棒の長さ L_2 を K' 系で測定したときの長さ L_3 は、

$$L_3 = L_2/\cos\psi = L_2/\gamma = L_2\sqrt{1-(v/c)^2} \leq L_2 \tag{100}$$

[25] この現象は、例えば素粒子加速器実験では日々観測されている。素粒子固有の寿命 T_0 がごく短くても、それを光速近くまで加速すると、我々が観測する寿命 T_1 は十分長くなるので、そのビームを観測することができる。



となる。また、K 系に固定された点が T_2 の時間経過するとき、K' 系における時間 T_3 は、

$$T_3 = T_2 \cos\psi = T_2\,\gamma = T_2/\sqrt{1-(v/c)^2} \geq T_2 \tag{101}$$

である。式 (98) と (100)、(99) と (101) をそれぞれ比較することにより、K から K' を見ても K' から K を見ても、まったく同じように見えることがわかる。

6.2. 固有時間

式 (86) で示されるように、(x,y,z,ict) の長さはローレンツ不変量であるから、微少なベクトル $(dx,dy,dz,ic\,dt)$ の長さもローレンツ不変である。すなわち、

$$-c^2 d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \tag{102}$$

$$-c^2 d\tau'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 \tag{103}$$

と書いたとき、$d\tau = d\tau'$ である[26]。$d\tau$ は、K 系で静止している $(dx = dy = dz = 0)$ 観測者の測る時間、$d\tau'$ は K' 系で静止している $(dx' = dy' = dz' = 0)$ 観測者の測る時間である。つまり、物体とともに動く時計で測った時間は不変量であり[27]、この τ を固有時間と呼ぶ。

式 (102) を、

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{104}$$

と書くと、これはまさに式 (99) と同値で、動いている時計はゆっくり進むことを示している。

6.3. 四元速度

すでに見たように、時空点の座標 (x,y,z,ict) やその微少変化量 $(dx,dy,dz,ic\,dt)$ は四元ベクトルの一つである。これを不変量 $d\tau$ で割った

$$\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, ic\frac{dt}{d\tau}\right) \tag{105}$$

も 四元ベクトルであり、これを四元速度と呼ぶ。これを式 (104) を使って、

[26] 自明ではあるが、式 (89) について、これが成立することを確認しておこう。

[27] だから、例えば 1 秒の絶対的な長さというものを定義することができる。

$$\gamma(v_x, v_y, v_z, ic) \tag{106}$$

と書ける。

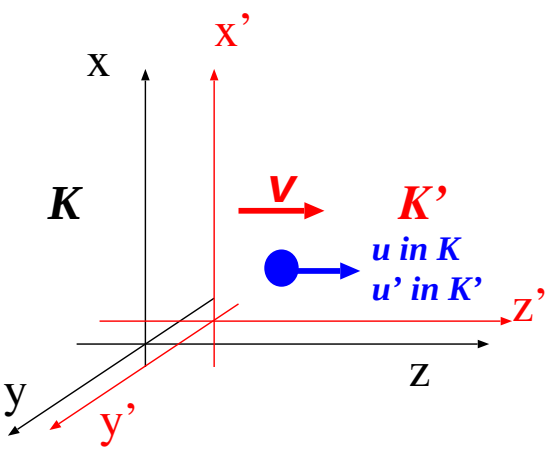
四元速度の長さがローレンツ不変量であることを確認しておこう。

$$\gamma^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - c^2) = \frac{v^2 - c^2}{1 - (v/c)^2} = -c^2. \tag{107}$$

6.4. 速度の変換則

先に考えた K 系で運動する物体を K' 系で見たときの速度を考えよう。K 系における物体の速度、K' 系における物体の速度、K 系と K' 系の相対速度を区別する必要があることに注意。

先と同じく、K' 系は K 系の $+z$ 軸方向に、K に対して速度 v で動いているとする $\left(\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}\right)$。物体の運動も、$K$ 系から見て $+z$ 軸方向とし、その速度を u とする $(u_x = u_y = 0, u_z = u)$。K' 系から見た物体の速度を u' とする。また、$1/\sqrt{1-(u/c)^2} = \gamma_u, 1/\sqrt{1-(u'/c)^2} = \gamma_{u'}$ とする。



ローレンツ変換の式 (89) と、四元速度の定義 (106) から、

$$\begin{pmatrix} \gamma_{u'} u'_x \\ \gamma_{u'} u'_y \\ \gamma_{u'} u'_z \\ \gamma_{u'} ic \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_u u \\ \gamma_u ic \end{pmatrix}. \tag{108}$$

これから、

$$u'_x = u'_y = 0 \tag{109}$$

$$\gamma_{u'}\, u'_z = \gamma\gamma_u(u - v) \tag{110}$$

$$\gamma_{u'} = \gamma\gamma_u\left(1 - \frac{v}{c^2}u\right). \tag{111}$$

(110) と (111) から、

$$u'_z = \frac{u-v}{1-v\,u/c^2}. \tag{112}$$

x', y' 方向の速度成分がないことがわかったので、単純に、$u'_z = u'$ と書くことにする。上式を解釈してみよう。まず、$u = 0$ のとき、$u = -v$ であるが、K 系に静止しているものを K' 系から見たら、$-z'$ 方向に速さ v で遠ざかることは自明である。

日常生活においては、物体の移動速度は光速に比べてはるかに小さいので、$vu/c^2 = 0$ と近似してよい。すると上式は $u' = u - v$ と言う、見慣れた式になる[28]。

$u = c$ のときには、v の値には関わらず、$u' = c$ になる。これは光速度不変の原理に他ならない。$u = -0.9c,\ v = 0.9c$ としてみよう。非相対論的に考えると、K' 系から見て、物体は $u - v = -1.8c$ で遠ざかっていくことになるが、そんなことは実際にはありえない。式 (112 は、$-0.9945c$ を与える。物体の運動の速度が光速を越えることはありえないのだ。

6.5. 四元運動量

四元速度に質量 m を書けたものを四元運動量と呼ぶ。すなわち、

$$m\gamma(v_x, v_y, v_z, ic) \tag{113}$$

$$\equiv (p_x, p_y, p_z, iE/c). \tag{114}$$

ここで、相対論的には運動量は

$$p = m\gamma v \tag{115}$$

で、エネルギーは、

$$E = m\gamma c^2 \tag{116}$$

で表されることを用いた。$v/c \ll 1$ のとき、$\gamma \approx 1 - \frac{1}{2}(v/c)^2$ を用いて、(116) は、

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{117}$$

と近似できる。最初の項が静止エネルギー、二番目の項が、ニュートン力学における通常の運動エネルギーである。

(107) より、四元運動量の長さの二乗は $-m^2c^2$ だから、良く知られたエネルギーと運動量の間の関係式、

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \tag{118}$$

が得られる。

特に、光子など質量がゼロである素粒子の場合は、

$$E = p\,c. \tag{119}$$

---

[28] 地上でボールを時速 $u = 100\text{km}$ で投げる。同じ方向に時速 $v = 80\text{km}$ で進む列車から見ると、その速さは $u - v$=100-80=20km であると考えるのが自然であるが、これは本当は正しくない。ここで、厳密に式 (112) を使うと、時速 $(20 + 1 \times 10^{-13}) = 20.0000000000001\text{km}$ になる。

光の波長を λ, 振動数を ν とするとき、h をプランク定数として、光子のエネルギーは $E = h\nu$, 運動量は $p = h/\lambda = h\nu/c$ で表わされることを思いだそう。あたりまえだが、光子について、(118) が成立している。

6.6. ドップラー効果と光行差 *(aberration)*

電磁波の伝播を考えるとき、電磁波の波数ベクトルを $\mathbf{k}$ ($|\mathbf{k}| = \omega/c$)、角振動数を ω として、

$$(\mathbf{k}, i\omega/c) \tag{120}$$

は四元ベクトルである。その長さは、

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} - \omega^2/c^2 = 0 \tag{121}$$

となり、ローレンツ不変量であることがわかる。また、四元ベクトル、

$$(x, y, z, , ict) \tag{122}$$

との内積をとると、

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t \tag{123}$$

は、電磁波の位相を与え、これもローレンツ不変量である。

K 系と、その z 方向に速度 v で走る K' 系の間のローレンツ変換の式 (89) と、四元速度の定義 (106) から、

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \\ \omega' i/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ \omega i/c \end{pmatrix}. \tag{124}$$

波数の定義から $|\mathbf{k}| = \omega/c$、$|\mathbf{k}'| = \omega'/c$ で、ベクトル $\mathbf{k}$ が yz 平面にあり、電磁波が進む向きと z 軸、z' 軸のなす角を θ, θ' とすると、$k_y = (\omega/c)\sin\theta$、$k'_y = (\omega'/c)\sin\theta'$ $k_z = (\omega/c)\cos\theta$、$k'_z = (\omega'/c)\cos\theta'$ である。よって、(124) を書きくだすと、

$$\omega' \sin\theta' = \omega \sin\theta \tag{125}$$

$$\omega' \cos\theta' = \omega\,\gamma(\cos\theta - \beta) \tag{126}$$

$$\omega' = \omega\,\gamma\,(1 - \beta\cos\theta) = \frac{\omega}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) \tag{127}$$

となる。式 (125) と (126) の比を取ると、

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)} = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}\sin\theta}{\cos\theta - v/c} \tag{128}$$

が得られる。

式 (127) は、光のドップラー効果に他ならない。$v \ll c$ のとき、'$(v/c)^2$ の項を無視すれば、これは

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) \tag{129}$$

となり、音波の場合と同じように、非相対論的なドップラー効果を表す。$(v/c)^2$ の項を無視できないとき、式 (127) で、$\theta = 0$、光源が視線方向と垂直に運動しているときにも波長が変化することに注意。これを横ドップラー効果と呼ぶ。

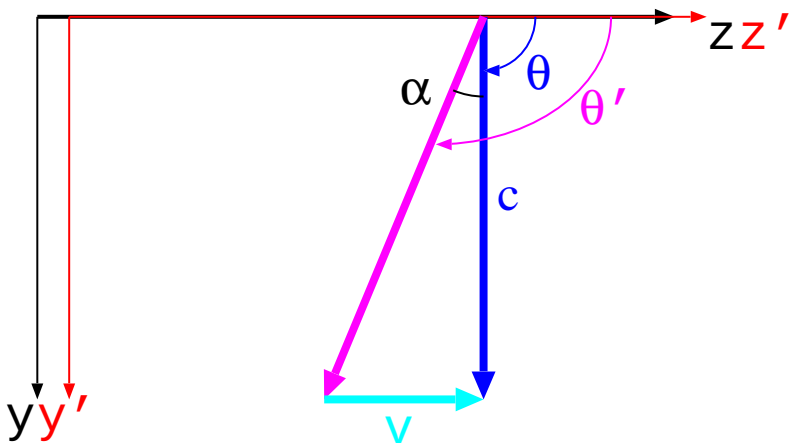
式 (128) は、地球の公転運動によって、星からの光の到来方向が変化する光行差 (aberration) を説明する。地球の公転速度は、$v \approx 30$ km/s, $v/c \approx 10^{-4}$ である。地球の公転面と垂直方向から星の光がやってくるとき、$\theta = 90°$ なので、

$$\tan\theta' = -\frac{c}{v}\sqrt{1-(v/c)^2} \tag{130}$$

である。

$\tan(\theta - \pi/2) = -1/\tan\theta$ を使って、$\theta - \pi/2 = \alpha$ とすると (下図参照)

$$\tan\alpha = \frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{131}$$



非相対論的には、単純にベクトルの大きさから、

$$\tan\alpha = \frac{v}{c} \tag{132}$$

が得られるが、これは式 (131) で、$(v/c)^2$ の項を無視した場合と一致する。

$v/c \approx 10^{-4}$ は、角度では $\sim 20''$ に対応する。地球の公転のために、季節 (地球の公転運動の方向の違い) によって、星の見かけの位置は最大 $\pm 20''$ 変化する[29]。$(v/c)^2 \approx 10^{-8}$ は、角度では ~ 2 marcsec (ミリ秒角) に対応していて、それほど高分解能の観測は電波干渉計によって可能であるが、それ以外のほとんどの天文観測においては装置の位置分解能以下なので、無視しても構わない。

[29] 光行差と年周視差を混同しないこと。後者は、地球の公転半径が、星の距離に比べ無視できないときに効いてきて、その大きさは星までの距離に依存する。

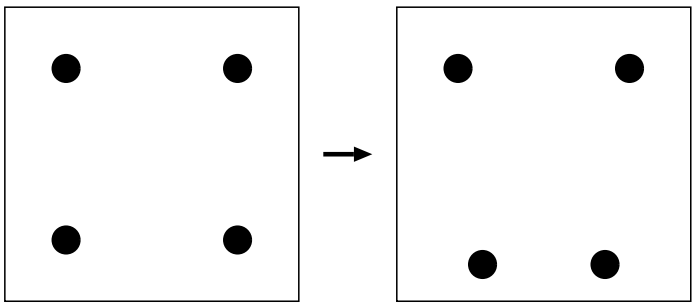
7. 一般相対性理論[30]

7.1. 局所慣性系

互いに等速運動している座標系の間では、式 (86) で与えられる四次元時空中の二点間の「世界間隔」は不変量であった。二つの系の間の座標変換 (ローレンツ変換) は、ベクトルの長さを変えない、四次元時空における回転を表す「直交変換」と考えても良いことを見てきた。これは、系が加速度運動をしておらず、重力を及ぼすモノが存在しない場合にのみ成立し、この条件が成立している座標系を慣性系と呼ぶ。慣性系では「時空が平坦」なので、世界間隔は不変である。慣性系においては、ニュートンの第一法則が成立し、「静止しているモノは静止しつづけ、等速運動しているモノは等速運動しつづける」。

現実の世界には完全な慣性系は存在しないが、加速度運動による慣性力と重力は区別できないという等価原理によって、重力と慣性力を打ち消しあった、局所慣性系を定義することができる。たとえば、宇宙空間に浮かんで、いろいろな天体からの重力に身を任せている宇宙船の中は局所慣性系である。その宇宙船に対して等速運動している局所慣性系とのあいだの座標変換はローレンツ変換で与えられる。

慣性系は局所的にしか存在できないことは、以下の思考実験でわかる。遠方から地球に向かって自由落下する宇宙船を考えよう。あるいは、綱の切れたエレベーターの中でも良い。その中は局所慣性系になっている (いわゆる「無重力状態[31]」)。ボールを 4 つ等間隔に配置する。



もしこれが完全な慣性系ならば、ボールの間隔は変化しないはずだが、それぞれのボールは地球の中心に向かって落ちていき、地球の中心に近いほうが重力加速度は大きいので、やがてボール間の横方向の間隔は縮み、縦方向の間隔は伸びる[32]。

一般に、グローバルな慣性系は定義できない (時空は一様でない) ので、(86) は成立せず、代わりに、二つの局所慣性系座標の間に、

---

[30] この節では、"Exploring Black Holes –Introduction to General Relativity", by Taylor and Wheeler, Addison Wesley Longman を参考にしています。日本語でも英語でも一般相対性理論の教科書は山のようにありますが、僕が見た限り、これが一番わかりやすい教科書でした (しかし厳密ではありません)。

[31] 宇宙に行くと重力がなくなる、と言うことはない。重力は宇宙のどこにでも存在する。重力に身を任せて自由落下することにより、重力の効果を打ち消すことはできる。

[32] このように、一つの系の中で場所によって重力が異なることによって見かけ上生じる力を潮汐力と言う。潮汐力によって 4 つのボールの配置が変化した、と考えても良いし、重力の影響で、時空が平坦でなくなったと考えてもよい。

$$ds^2 \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 - (c\,dt)^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - (c\,dt')^2 \tag{133}$$

が成立する。ds^2 をメトリック (計量) と呼ぶ。一般相対性理論によれば、任意の座標変換に対して、局所的な世界間隔は不変である。

7.2. シュバルツシルト時空

質量 M を持ち、回転していない球対象な天体を考えよう。重力の影響により、その周りの時空は平坦ではない。それを、シュバルツシルト時空と呼ぶ[33]。

球対象だから、世界間隔を表わすのに、極座標を用いると便利である。天体の近く、動径座標 r の球殻に固定した観測者が計る時間を dt_{shell}、r に沿って直接測る距離を dr_{shell} とすると、

$$ds^2 = dr_{shell}^2 + r^2\,d\phi^2 - c^2 dt_{shell}^2 \tag{134}$$

である。ここで、動径座標 r は円周を 2π で割った量として定義される[34]。

十分遠方の観測者が乗っている座標を r, ϕ, t とすると、メトリックは

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} + r^2\,d\phi^2 - c^2\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right)dt^2 \tag{135}$$

と書けることがわかっている。これをシュバルツシルトメトリックと呼ぶ。c は光速、G は万有引力定数である。$2GM/c^2$ が、質量 M の天体のシュバルツシルト半径である。

太陽と地球のシュバルツシルト半径は覚えておこう。$G = 6.6726 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^2/kg/s^2}$、$c = 2.9979 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$、太陽質量$=1.989 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$、地球質量 $= 5.9742 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$ だから、太陽のシュバルツシルト半径は、$2.95\ \mathrm{km}$、地球のシュバルツシルト半径は $8.87\ \mathrm{mm}$[35]。

通常の星 (主系列星) は、核融合反応による圧力で形を保っていて、その半径はシュバルツシルト半径よりもはるかに大きい。中性子星の平均質量は太陽質量の約 1.4 倍で、中性子間の核力により形を保っていて、その半径はシュバルツシルト半径よりも大きい。質量が太陽の約 3 倍以上になると、中性子間の核力でもその重さを支えられなくなり、重力崩壊を起こしてブラックホールになる。回転していなりブラックホールの半径 (のようなもの) が、シュバルツシルト半径と考えてよい。

(134) と (135) を比較して、

$$dr_{shell} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}} \geq dr \tag{136}$$

$$dt_{shell} = \sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}\,dt \leq dt \tag{137}$$

である。

(136) は、直接測った動径方向の長さは、円周を 2π で割った長さよりも長いことを示している。(137) は、重力が強いところでは、時間の進み方が遅いことを示している。特にシュバ

[33] 回転している天体の周りの時空がカー時空である。

[34] たとえばブラックホールの場合は、シュバルツシルト半径より内側が見えないので、半径を直接測れない。

[35] $3\ \mathrm{km}$, $1\mathrm{cm}$ と覚えておけば大体事足りる。

ルツシルト半径、$r \approx 2GM/c^2$ においては、dt_{shell} に対しても dt は無限大になる。よって、たとえばブラックホールに一定間隔で光を出しながらモノが落ちていくようすを無限遠方から眺めると、シュバルツシルト半径に近づくにつれてその間隔は伸びていき、やがて無限になる (モノがブラックホールに落ちるところは決っして観測できない)。

また、天体の近く r で時間間隔 dt_{shell} の間に N 個の光波が発射されたとき、その場所における光の振動数は $\nu_{shell} = N/dt_{shell}$、無限遠方で観測した同じ光の振動数は $\nu = N/dt$ であるが、(137) より、

$$\nu = \sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}\nu_{shell} \leq \nu_{shell} \tag{138}$$

である。これは、強い重力場中から放出された光が、無限遠方で観測すると振動数が小さいほうにずれる (光の波長が長いほうにずれる) ことを示している。これが重力赤方偏移である。

7.3. シュバルツシルト時空の *GPS* への応用

地球の半径はそのシュバルツシルト半径に比べてはるかに大きいから、一般相対性理論の効果は、日常生活では、ほとんど効いてこない。しかし、非常に精密な測定によって、一般相対性理論が効いてくることがある。その例が GPS (Glocal Positioning System) である。GPS は、地球の周りをそれぞれ 12 時間で周回する 24 個の衛星を用いている。3 個の衛星からの正確な距離がわかれば、地球上あらゆる場所の位置が正確にわかる。衛星からの距離は、光の発射時刻と受信時刻の差に光速を掛けて求める。時刻の補正には 4 つめの衛星を使う。地球上のどこからでも、(視界が開けていれば) 常に 4 つの衛星が受信できるように、衛星軌道が配置されている。

地球表面で自転運動している観測者、GPS 衛星上で公転運動している観測者を考える。式 (134) で、どちらの"shell" でも、自分の座標系では動いていないから、$dr_{shell} = d\phi = 0$ で、$ds^2 = -c^2 dt_{shell}^2$ である。十分遠方の観測者がこれを見たとき $dr = 0$ だから、(135) と合わせて、

$$c^2 dt_{shell}^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) dt^2 - r^2 d\phi^2 \tag{139}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} c^2 \left(\frac{dt_{shell}}{dt}\right)^2 &= c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \\ &= c^2 \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) - v^2. \end{aligned} \tag{140}$$

ここで、v は、地表の自転速度、または GPS 衛星の公転の速度である。(140) を、地表と GPS 衛星について比を取って、

$$\left(\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{satellite}}\right) - (v_{satellite}/c)^2}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{earth}}\right) - (v_{earth}/c)^2}. \tag{141}$$

$r_{satellite}, r_{earth}$ は地球のシュバルツシルト半径に比べてはるかに大きいから、いくつか近似が可能である。

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx \frac{\left(1-\frac{2GM/c^2}{r_{satellite}}-(v_{satellite}/c)^2\right)^{1/2}}{\left(1-\frac{2GM/c^2}{r_{earth}}-(v_{earth}/c)^2\right)^{1/2}} \tag{142}$$

$$\approx \left(1-\frac{GM/c^2}{r_{satellite}}-(v_{satellite}/c)^2/2\right)\left(1+\frac{GM/c^2}{r_{earth}}+(v_{earth}/c)^2/2\right)$$

$$\approx 1-\frac{GM/c^2}{r_{satellite}}-(v_{satellite}/c)^2/2+\frac{GM/c^2}{r_{earth}}+(v_{earth}/c)^2/2. \tag{143}$$

まず、$v^2_{satellite}, v^2_{earth}$ の項を除いて考えよう (これらの効果はマイナーであることがわかっている)。この式からただちにわかるように、$(GM/c^2)/r_{earth}$ と $(GM/c^2)/r_{satellite}$ はどちらも非常に小さな数であるが、その違いが無視できない、ということが本質的である。

GPS 衛星の周期が 12 時間ということから、$r_{satellite}$ と $v_{satellite}$ を求めよう。円運動の公式から[36]、

$$\frac{v^2_{satellite}}{r_{sattelite}} = \frac{GM}{r^2_{satellite}}, \tag{144}$$

$$P_{satellite} = \frac{2\,\pi\, r_{satellite}}{v_{satellite}}. \tag{145}$$

これを変形して、

$$r_{satellite} = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}, \tag{146}$$

$$v_{satellite} = \left(\frac{2\pi GM}{P}\right)^{1/3}. \tag{147}$$

数値を代入して、$r_{satellite} = 2.66\times 10^7$m (2 万 6600km)、$v_{satellite} = 3.87\times 10^3$ m/s.

$GM/c^2 = 4.4\times 10^{-3}$m、$r_{earth} = 6.37\times 10^6$m だから、(143) に代入して、$v_{satellite}$、$v_{earth}$ の項を無視すると、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx 1-1.65\times 10^{-10}+6.91\times 10^{-10} \approx 1+5.26\times 10^{-10}. \tag{148}$$

v_{earth} として赤道上の値を使うと、$v_{earth} = 4\times 10^7$ m/86400=463 m/s。(143) に $v_{satellite}$、v_{earth} の項も入れて、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx 1+5.26\times 10^{-10}-8.32\times 10^{-11}+0.12\times 10^{-11} \approx 1+4.44\times 10^{-10}. \tag{149}$$

これだけの割合で、地表の時間よりも、人工衛星上の時間のほうが速く進むことがわかる。一日 (86400 秒) で、このずれは、38 マイクロ秒になる。その間に、光は 11km も進む! これを補正しないと、GPS は全く使いものにならない。

[36] この計算には一般相対論を使っていないが、それで精度は十分である。

8. 二体問題

ここでは、古典力学の応用問題として二体問題を勉強しよう[37]。二体問題とは、二つの質点からなる系の運動を解く問題であり、これは解析的に解ける (=解を式で表すことができる)。一方、限られた場合を除いて、三体問題は解析的に解けないことがわかっている。三体あるいはそれ以上の質点が存在する場合の運動を解くには、数値的な解法に頼らざるを得ない。

宇宙にはたくさんの天体があるわけで、厳密な解を得るにはコンピューターを走らせて、たくさんの連立運動方程式を数値的に解くことが必要なわけだが、多くの場合、二体問題に、他の天体による微細な影響 (摂動) を考えれば十分である。たとえば、人工衛星の運動を解くときは地球の重力のみ、(太陽や月の影響は微少)、惑星の運動を解くときは太陽の重力のみ (他の惑星や恒星の重力は微少) を考えれば、大体、事足りる。

8.1. 二体問題の例

地球の公転:精密な天体観測を行う際、地球の公転運動を考慮に入れることが重要である。たとえば、パルサー (高速回転している中性子星) のタイミング観測を行うとき、地球がパルサーに近づいているか、遠ざかっているかで、見かけ上のパルス周期がドップラー効果に依って変化する。これを補正するために、地球の公転運動を精密に解き、天体からのパルスを解析するときには、そのパルス到達時刻 (pulse-arrival time) を、太陽系重心 (barycenter) で測定した値に直す[38]。これを barycentric correction と呼ぶ。

惑星の軌道:たとえば、「理科年表」を見ると、惑星の軌道が、以下で示す、軌道六要素を用いて記述されている。

人工衛星:地球と人工衛星の二体問題を問いて、人工衛星の軌道は、以下で示すような軌道六要素で記述される。地球大気による擾乱や、地球が扁平している効果によって、人工衛星の軌道はゆっくりと変化している。よって、軌道六要素を出す場合は、いつ測定した値であるかを明示する必要である。測定した時刻を元期 (エポック、Epoch) と呼ぶ。エポックと軌道六要素が与えられらば、その前後の時刻における人工衛星の位置は、解析的に求めることができる。人工衛星の「軌道ファイル」には、六要素がエポックの関数として与えられている[39]。

探査機: 地球の重力圏を脱出した探査機は、主に太陽の重力の影響を受け、太陽を焦点とするほぼ楕円軌道を描き、太陽系内を運動する。軌道を変えるために、地球や月によるスイングバイを利用する。その時の軌道は、地球や月を焦点とする双曲線、放物線になっている。

X 線連星系: 太陽は連星系ではないが、多くの恒星は、連星系を成している。特に、通常の星とコンパクト星 (白色矮星、中性子星、ブラックホール) から成る連星系は、通常の星からコン

---

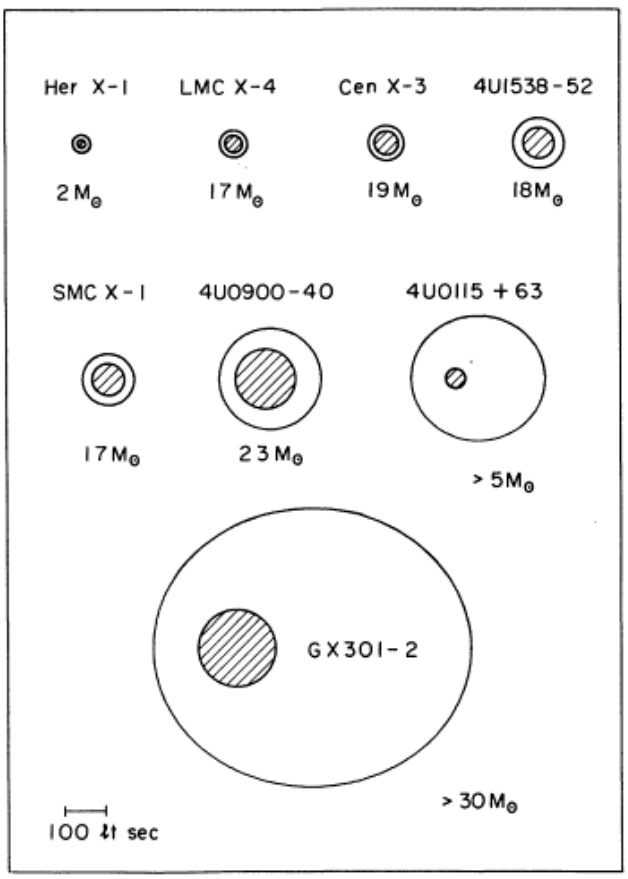
[37] 一般相対論の効果は入れず、ニュートン力学の範囲で考える。

[38] 太陽系重心を求めるにはすべての惑星を考慮にいれるが、木星の影響が一番大きい。それでも、太陽系重心は太陽の中心とはそれほどずれておらず、太陽の中にある。

[39] あるいは、すでに六要素から計算された人工衛星の位置が、より細かい時間ビンで入っていることもある。

パクト星に物質が落ちるときの大きな重力エネルギーが開放されて、X 線連星系となる。特にコンパクト星が回転している中性子星の場合、これは X 線パルサーとして観測され、公転運動によるドップラー効果の測定から、視線方向の速度がわかり、二体問題を解くことによって、その軌道を正確に決めることができる。

下図が X 線連星パルサーの軌道の例である (Joss and Rappaport, 1984, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 22, 537 より)。それぞれの天体名と、伴星の質量が書いてある。相対的なスケールは正しく示されている (左下の線が 100 光秒)。中性子星の質量はどれも大体 $1.4M_{\odot}$。4U0115+63($e = 0.34$) や GX301-2($e = 0.47$) は離心率の大きい楕円軌道であるが、離心率もドップラー効果の観測から測定できることに注意。



重力波の間接的検証:

電荷を持った物体が加速度運動すると電磁波を放出するように、質量を持った物体が運動すると重力波が放出される、と一般相対論は予言している。重力波はあまりにも弱いので、今だ直接検出されていないが、連星パルサーの観測から、間接的に重力波の存在が検証されている。ハルスとテイラーは、PSR 1913+16 という連星パルサーを、プエルトリコにある電波望遠鏡を用い、1974 年の発見以来、長期間モニター観測を行った。その結果、その軌道がほんの少しずつ変化していることがわかった。これはニュートン力学では説明できない。一方、一般相対論によると、重力波の放射によって、連星パルサーはエネルギーを失ない、それによって、

徐々に軌道が変化していく。その計算結果と観測された軌道変化がピタリと一致した。これが、今日では (唯一) の重力波の観測的証拠だと考えられている。ハルスとテイラーは、この業績により、1993 年のノーベル物理学賞を受賞した[40]。

8.2. 角運動量、中心力、角運動量保存則

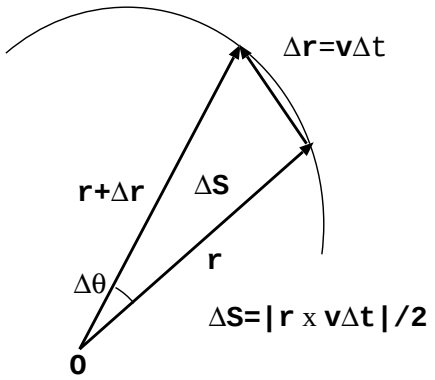
時刻 t における質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と、運動量 $\boldsymbol{p}(t)$ との外積 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ を、原点 O に関する質点の、時刻 t における角運動量と言う (以下、$\boldsymbol{l}$ で表す。)。

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}. \tag{150}$$

角運動量ベクトルは、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ を含む平面に垂直で、その向きは、$\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{l}$ が右手系をなす向きである。質点が原点の周りに描く扇型の面積速度は

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) \tag{151}$$

であるから、角運動量は面積速度の $2m$ 倍である。



(150) 式を微分し、運動方程式 $d\boldsymbol{p}/dt=\boldsymbol{F}$ を用いると、

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}. \tag{152}$$

右辺を力のモーメント またはトルクと呼ぶ。ある時刻における質点の角運動量の時間変化の割合は、その時刻に質点に作用する力のモーメントに等しい。

特に、力のモーメントがゼロの時、角運動量は一定に保たれる。これを角運動量保存則、あるいは面積速度保存則と言う。力がゼロでなくても、それが働く方向が原点 O を通る場合 (中心力)、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ は平行なので、$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=0$。よって、質点が重力によって原点 O に引かれながら運動するとき、O の周りの角運動量と面積速度は運動中一定に保たれる。

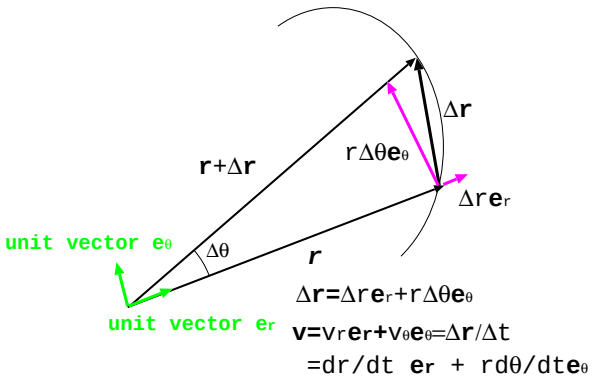
角運動量の大きさ $|\boldsymbol{l}|$ を h とする。速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{r}$ に平行な成分 v_r と垂直な成分 v_θ に分解すると、下図からわかるように、

$$v_r=dr/dt, v_\theta=rd\theta/dt \tag{153}$$

である。

---

[40] http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1993/press.html 参照。



$h = mrv_\theta$ だから、

$$h = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \tag{154}$$

である。

8.3. 換算質量

天体が原点 O の重力に引かれて運動するときは、O の周りの角運動量が保存するので、その問題は簡単になる。しかし、一般に二つの天体が重力で引きあっているときには、両方の運動を考えなくてはいけないので、問題は複雑になるのではないだろうか？その心配がないことを以下で述べる。

例として、惑星 (質量 m) が太陽 (質量 M) のまわりを公転運動する場合を考えよう。それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ とすれば、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F},\ M\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -\boldsymbol{F}. \tag{155}$$

これを足しあわせると、

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\boldsymbol{r}_1 + M\boldsymbol{r}_2) = 0. \tag{156}$$

ところで、$\boldsymbol{R} \equiv (m\boldsymbol{r}_1 + M\boldsymbol{r}_2)/(m+M)$ は、惑星と太陽の重心の位置ベクトルを表わすから、上式は、$d^2\boldsymbol{R}/dt^2 = 0$, すなわち重心は等速運動をする (初速度がゼロならば静止している) ことを示している。

一方、(155) から次式も導ける。

$$\frac{mM}{m+M}\frac{d^2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{dt^2} = \boldsymbol{F}. \tag{157}$$

これは、太陽に対する惑星の位置 $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ に、換算質量 $\frac{mM}{m+M}$ の天体がある場合の運動を表わす運動方程式である。

一般に二つの質点が互いに力を及ぼしあって運動するとき、個々の質点の運動方程式を、質量中心の運動方程式と、一方の質点が静止しているかのようにみなしたときの他方の質点の運動方程式 (ただし、質量が換算質量にかわっている) に書き換えることができる。二体問題 (155) を解くかわりに、それと等価な一体問題 (157) を解けば良いことになる。

8.4. 人工衛星の軌道、惑星の軌道

地球の周りの人工衛星の軌道や、太陽のまわりの惑星の軌道を考えてみよう。以下で、m は人工衛星または惑星の換算質量、$\boldsymbol{r}$ は、地球中心に相対的な人工衛星の位置、あるいは太陽に相対的な惑星の位置を示す。まず、エネルギー保存則から、全エネルギーを E とすると、

$$\frac{m}{2}(v_r^2+v_\theta^2)-\frac{GMm}{r}=E. \tag{158}$$

(153),(154) を使うと、

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{h^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}=E. \tag{159}$$

ここで (154) から、

$$\frac{d}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}=\frac{h}{mr^2}\frac{d}{d\theta}. \tag{160}$$

よって、独立変数を時刻 t から θ に変換して (159) は、

$$\frac{m}{2}\left(\frac{h}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{h^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}=E \tag{161}$$

と書ける。この微分方程式が r と θ の関係を与えるので、r を θ の関数として求めれば、惑星の軌道が求められたことになる。ここで、$1/r=u$ と変数を変換すると、以下のように変形できる。

$$\frac{h^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{h^2u^2}{2m}-GMmu=E, \tag{162}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\left(u-\frac{GMm^2}{h^2}\right)^2-\frac{G^2M^2m^4}{h^4}=\frac{2mE}{h^2}, \tag{163}$$

$$\pm\frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{h^2}+\frac{G^2M^2m^4}{h^4}-\left(u-\frac{GMm^2}{h^2}\right)^2}}=d\theta. \tag{164}$$

ここで積分公式、$\int dx/\sqrt{a^2-x^2}=\cos^{-1}(x/a)$ を用いて、

$$\pm\cos^{-1}\frac{u-\frac{GMm^2}{h^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{h^2}+\frac{G^2M^2m^4}{h^4}}}=\theta. \tag{165}$$

よって、

$$r=\frac{\frac{h^2}{GMm^2}}{1+\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{G^2M^2m^3}}\cos\theta}. \tag{166}$$

ここで、

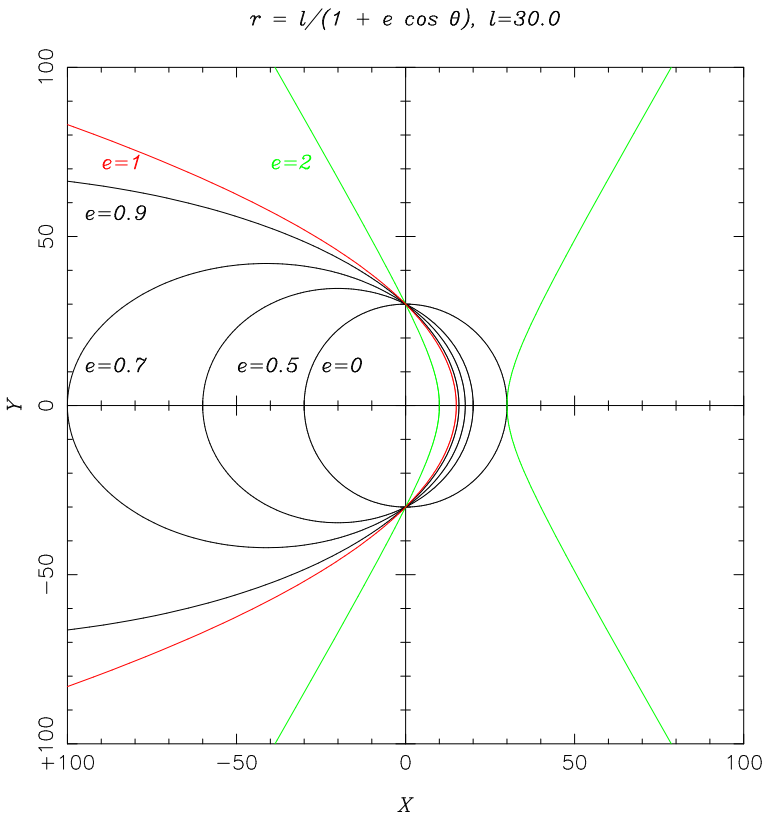
$$l\equiv\frac{h^2}{GMm^2}, \tag{167}$$

$$e\equiv\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{G^2M^2m^3}} \tag{168}$$

と定義すれば、(166) は、

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}. \tag{169}$$

と書ける。これは原点 (太陽または地球) を焦点の一つとする円錐曲線の式で、e は離心率、l は半直弦と呼ばれる。円錐曲線は、円錐を任意の断面で切ったときの断面の形で、楕円 $(e < 1)$、放物線 $(e = 1)$、双曲線 $(e > 1)$、のいずれかである。下図に、異なる離心率の円錐曲線の例を示す。



実際に太陽の周りの惑星 (彗星) や地球の周りの人工衛星 (探査機) の軌道も、楕円、放物線、双曲線のどれかである。(168) より、離心率 $e < 1, e = 1, e > 1$ はそれぞれエネルギー $E < 0, E = 0, E > 0$ に対応している。すなわち、全エネルギー E が負のときは、人工衛星は地球の重力に束縛されて、地球の周りを楕円軌道を描いて周回する。運動エネルギーが増加するにつれ、離心率が大きなり、やがて軌道は放物線となり、人工衛星は地球の重力圏を脱出する。無限遠でエネルギーはゼロになる。さらに運動エネルギーが大きい場合は、双極線軌道になり、無限遠でも正のエネルギーを持つ。

8.5. 楕円軌道

楕円は、二つの焦点からの距離の和が等しい点をつなげたものである。下図のように長半径を a、短半径を b とする。楕円の面積は πab で与えられる。

$\theta = 0$ の点が A,$\theta = \pi/2$ の点が Q,$\theta = \pi$ の点が C である。右側の焦点、F からの距離を考える。A が近日点、C が遠日点である。

下図と (169) より、$r_A = l/(1+e), r_Q = l, r_C = l/(1-e)$。よって、

$$r_A + r_C = 2a = l/(1+e) + l/(1-e) = 2l/(1-e^2). \tag{170}$$

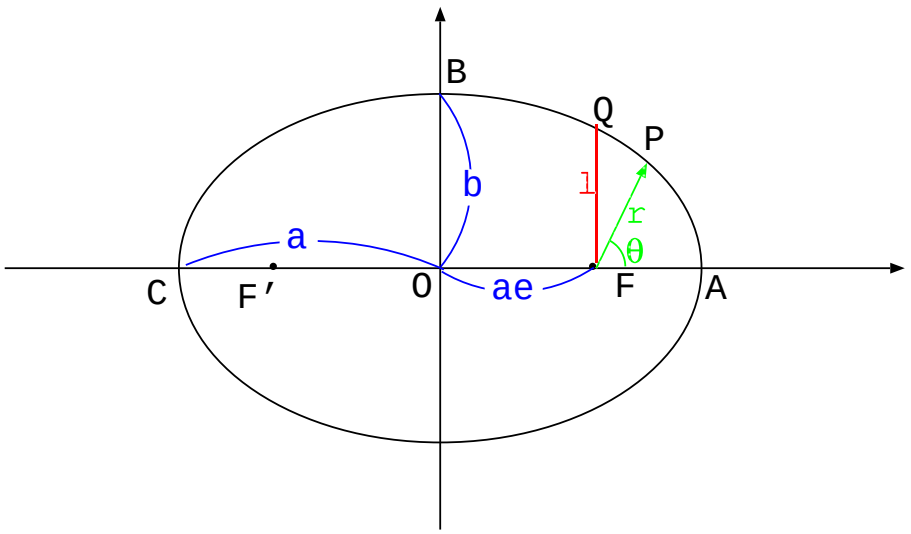
これから、長半径は

$$a = l/(1-e^2) \tag{171}$$

と書けることがわかる。よって、

$$r_A = \frac{l}{1+e} = a\frac{1-e^2}{1+e} = a(1-e) \tag{172}$$

だから、下図に書いてあるとおり $OF = a - a(1-e) = ae$ である。



次に短半径を a と e で表わす。楕円の定義より、$BF + BF' = FA + F'A$ である。

$$BF + BF' = 2\sqrt{a^2e^2 + b^2}, FA + F'A = a(1-e) + 2ae + a(1-e) = 2a. \tag{173}$$

よって、

$$b^2 = a^2(1-e^2) = al. \tag{174}$$

ここで、(171) を使った。

(167),(168) と (171) より、

$$a = -GMm/2E. \tag{175}$$

つまり、軌道長半径は、エネルギー E だけで決まる。同様に、(174) と (167) を使って、

$$b^2 = -h^2/2Em. \tag{176}$$

これら二つの式は、M, m, E, h が与えられらば、一意的に a, b、つまり楕円軌道が決まることを表わしている。

8.6. ケプラーの法則

楕円の長半径を a、短半径を b としたとき、その面積は πab で与えられる。角運動量を h、天体の質量を m とするとすると、面積速度は $h/2m$ である。よって、天体の公転周期 T は、

$$T = \frac{\pi ab}{h/2m}. \tag{177}$$

である。ここで、(174) と (167) を使って、$b = \sqrt{al} = \frac{h}{m}\sqrt{\frac{a}{GM}}$ だから、

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}. \tag{178}$$

これが、惑星の公転周期の二乗が軌道長半径の三乗に比例する、というケプラーの第三法則である[41]。

8.7. 円軌道の場合

円運動の場合 (離心率 $e = 0$) の運動方程式は、半径 r、公転速度を v として、

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \tag{179}$$

である。周期 T は、$T = 2\pi r/v$ だから、

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \tag{180}$$

となり、ケプラーの第三法則が得られた。

8.8. 軌道六要素

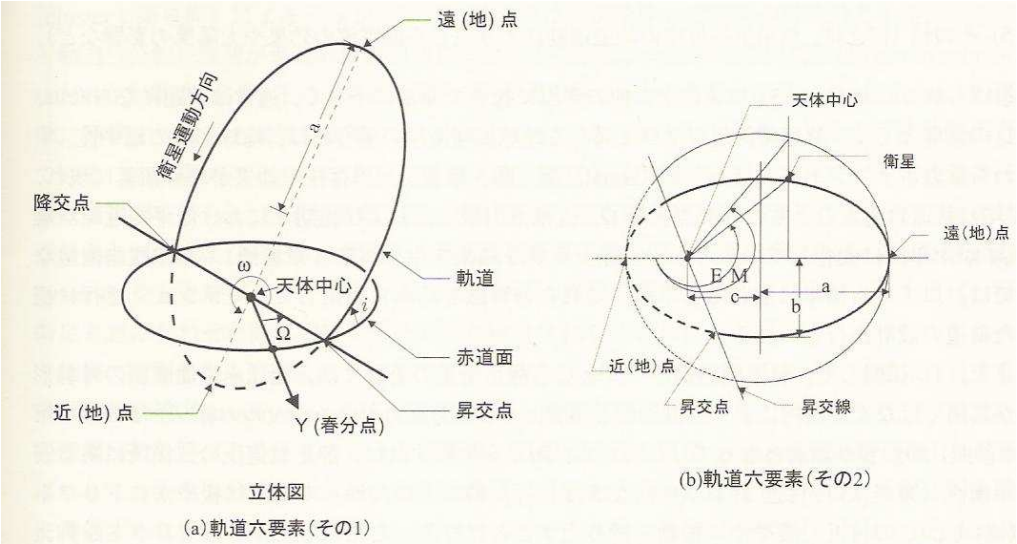
ある時刻 (エポック) における人工衛星の軌道 (一般に楕円軌道) と位置は、軌道六要素を用いて記述できる。次図は「人工衛星の力学と制御ハンドブック」より[42]。[h]
a:軌道長半径。円軌道のときは、円の半径。
e:離心率 ($e = 0$ は円軌道)。
i:軌道傾斜角。地球の赤道面と人工衛星の軌道面がなす角度。
Ω:昇交点赤経。$i \neq 0$ のとき、地球の赤道面と人工衛星の軌道面が交差する点の赤経。
ω:近地点引数。楕円軌道の場合、昇交点から測って近地点が軌道面上のどこに来るかを表わす。
以上 5 つのパラメーターで軌道は決まる。
M:平均近点離角。与えられたエポックにおける人工衛星の軌道上での位置を表す。

以下に、1987 年 2 月 5 日に打ちあげられ、1991 年 11 月 1 日に大気圏に再突入した「ぎんが」衛星の軌道六要素の時間変化を示す。

$e \approx 0$、ほぼ円軌道である。地球の半径は、約 6378km だから、ぎんが衛星の打ち上げ時の高度は、約 550 km。軌道傾斜角 i が、「ぎんが」衛星が打ち上げられた内之浦宇宙空間観測

[41] 惑星は太陽を焦点の一つとする楕円軌道を描く、というのが第一法則。面積速度一定が第二法則。

[42] http://spaceflight.nasa.gov/realdata/elements/graphs.html も参考に



所の緯度に対応していることに注意しよう。地球の自転速度を稼ぐために、人工衛星は真東に打たれる。その結果、軌道傾斜角が打ち上げ地の緯度に一致することになる。

もし衛星の軌道の地球に対する相対的な位置が不変ならば、Ω も $a,\ e,\ i$ と同じくほぼ一定のはずであるが、Ω は周期的に変化している。これは、地球が扁平である影響で人工衛星の軌道面が歳差運動をしているためである。ほぼ円軌道なので、近地点の位置を表わす ω はあまり意味を持たない。

ミッションの終了近くになって、大気の摩擦のために、急激に a が減少 (衛星が降下) していることがわかる。また、もともと離心率は小さくほぼ円軌道であったが、衛星が降下するにつれて、さらに円軌道からのずれが「なまされて」、離心率も減少していることがわかる。

式 (178) より、a から衛星の公転周期 T が求められる。地球のシュバルツシルト半径、$2GM/c^2 = 8.87\ \mathrm{mm}$ を使うと、以下のように簡単に計算できる。

$$T = \frac{2\sqrt{2}\pi a^{3/2}/c}{\sqrt{2GM/c^2}} = \frac{2\sqrt{2}\pi(a/6900\ \mathrm{km})^{3/2}(6900\ \mathrm{km})^{3/2}/(300000\ \mathrm{km/s})}{\sqrt{8.87\ \mathrm{mm}}}$$
$$= 95\ \mathrm{min}(a/6900\ \mathrm{km})^{3/2}. \qquad (181)$$

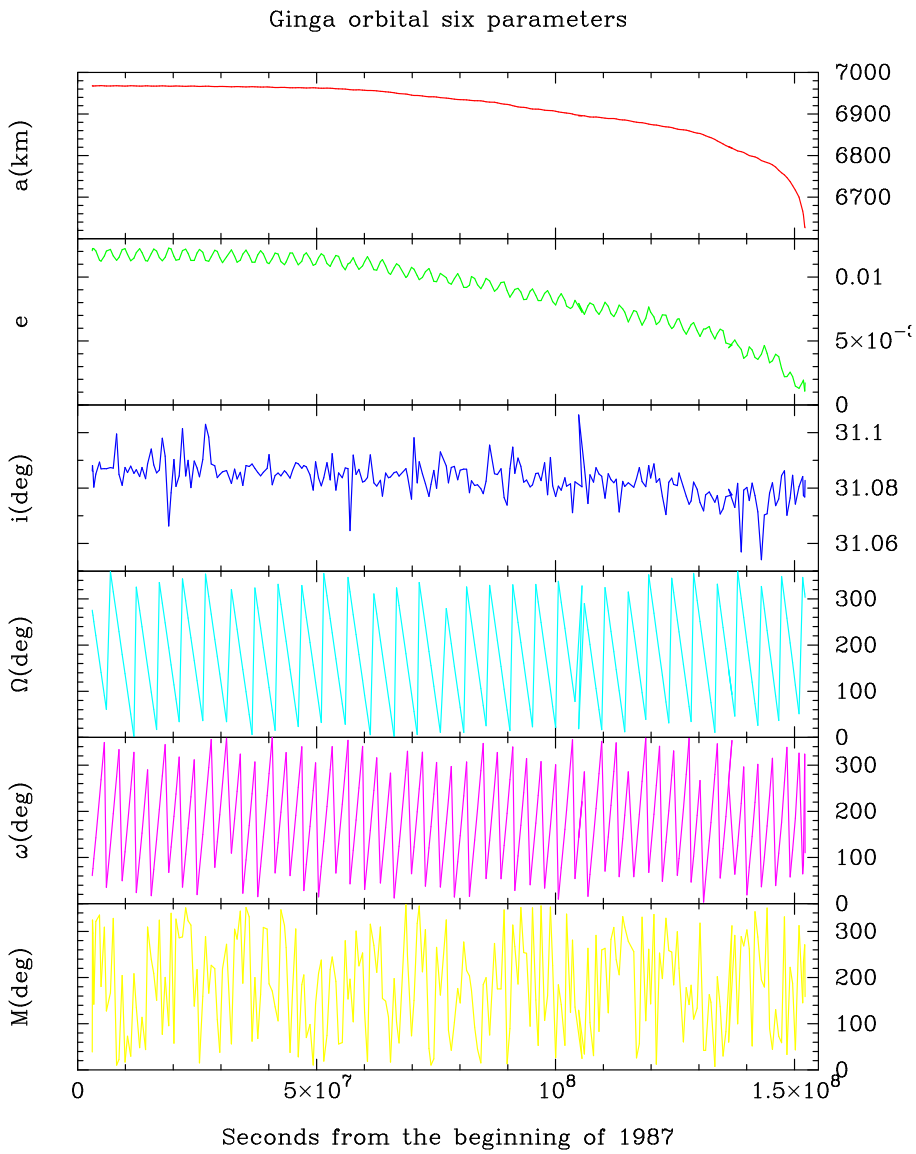
このようにして求められた公転周期と a の関係を以下に示す。

ぎんが衛星のように低高度の衛星は、一日に地球の周りを約 15 周することがわかる。

8.9. 静止衛星

地球の自転周期は 23 時間 56 分 4.09 秒である[43]。(181) から、人工衛星の公転周期が自転周期と等しくなるのは、$a = 42200\ \mathrm{km}$ のとき (高度は約 $35800\ \mathrm{km}$)。赤道上、この高さにある衛星は地表から見て静止しているように見えるので、静止衛星と呼ばれる。常に地表から見えている必要がある通信衛星、放送衛星、気象衛星などは、静止軌道に打ち上げられる。

[43] 24 時間ではないことに注意。太陽に対して同じ向きになる周期が 1 日=24 時間。



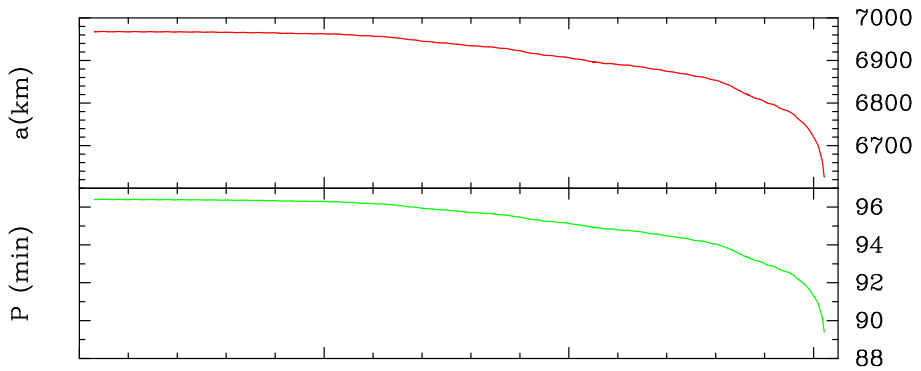
8.10. Two Line Elements

軌道六要素で衛星の軌道とある時刻における位置を表わすことができるわけだが、それと等価な情報とさらに衛星名、国際識別番号などを付加した情報を記述する、**Two Line Elements** (TLE) と言う標準的なフォーマットがある。

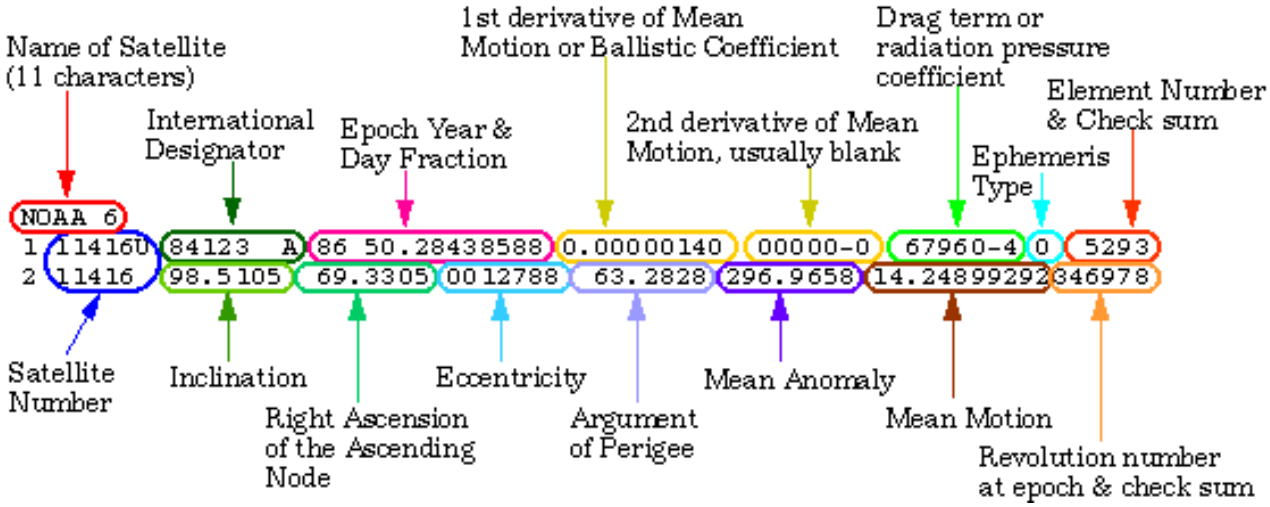
NORAD (NORth American aerospace Defence Command; 北アメリカ航空宇宙防衛司令部;`httm://www.norad.mil`) は、地球の周りを周回している (ほぼ) すべての人工衛星をモニターし、その軌道要素を TLE で公開している。TLE の説明については、`http://science.nasa.gov/Realtime/rocket_sci/orbmech/state/2line.html` を参照。そこから TLE の定義を再掲する。

軌道長半径 a の代わりに、一日あたりの周回数である、"Mean Motion" が使われていることに注意。いくつかの衛星について、具体的な TLE の値を見てみよう。現在地球を周回している衛星の最新の TLE は、たとえば `http://celestrak.com` から入手できる。

Ginga orbital six parameters



Seconds from the beginning of 1987




```
SUZAKU
1 28773U 05025A   08013.93865221  .00000558  00000-0  37528-4 0  6575
2 28773  31.4061 323.8498 0007001 164.9250 195.1602 15.00529329137995
ASTRO-F (AKARI)
1 28939U 06005A   08014.23580039  .00000005  00000-0  11192-4 0  6030
2 28939  98.2316  16.5778 0008622   0.3484 359.7729 14.57435459100351
HINODE (SOLAR-B)
1 29479U 06041A   08013.94377495  .00000087  00000-0  26130-4 0  4426
2 29479  98.0789  23.2007 0014564 229.4553 130.5382 14.62802560 69920
INTEGRAL
1 27540U 02048A   08012.45833333  .00000061  00000-0  10000-3 0  6500
2 27540  86.3672  23.5282 7969010 276.7243 358.3858  0.33418208  2558
HIMAWARI 6
1 28622U 05006A   08014.77456198 -.00000264  00000-0  10000-3 0  4588
2 28622   0.0211  76.8046 0002163  49.6656  46.0362  1.00271868 10549
```

これから、以下のことが読みとれる。(1) すざく (X 線天文衛星)、あかり (赤外線天文衛星)、ひので (太陽天文衛星) は、一日に約 15 周回する、低軌道衛星である。ひまわりは一日に一周回する、静止衛星である。INTEGRAL 衛星は三日で一周する、大きな軌道である。(2) INTEGRAL は離心率が大きな楕円軌道を持つが、他の衛星はほぼ円軌道である。(3) すざくの軌道傾斜角は、ぎんがと同じく、内之浦から真東に打ちだしているので、内之浦の緯度に対応して 31.4 度である。ひまわりは赤道上の静止衛星なので、軌道傾斜角は 0 度。あかり、ひのでの軌道は、赤道とほぼ直交している。はこの二つの衛星は太陽同期軌道を持ち、軌道面が常に太陽を向いていて、ちょうど昼と夜の境目を周回している。それによって、ひのでは常に太陽を観測することが可能である。一方、あかりは、つねに地球と反対向きの空を観測することが可能になっている[44]。

巷に、TLE から衛星軌道を計算したり表示させたりするプログラムが溢れている。たとえば、`http://science.nasa.gov/Realtime/jtrack/3d/JTrack3D.html`、`http://www.lizard-tail.com/isana/lab/googlesat/googlesat2_plus.php` などを参照。前者は、衛星の軌道を 3 次元的に表示し、そのスケールや向きをインターアクティブに変更できる。後者は、Google map 上に衛星の位置をリアルタイムで表示できる。

9. X 線連星系の観測

先に述べたように、ブラックホール、中性子星、白色矮星というコンパクト星を含む連星系は「X 線」連星系として観測される。なぜ、これらの連星系は X 線で明るく観測されるのだろうか？ここでは、それを考えてみよう。

9.1. 重力エネルギーの解放

中性子星やブラックホールと対をなす伴星から物質が中性子星、ブラックホールに落ちていくとき、重力エネルギーが解放される。単位時間あたり $\dot{M}$ [g/s] の物質が落ちていくとすると、重力エネルギーが解放される割合、L [erg/s] は、以下のように見積もられる。

$$L \approx \frac{GM\dot{M}}{r_{in}}. \tag{182}$$

ここで、r_{in} は、重力エネルギーが解放される一番内側の半径である。中性子星のときは中性子星の半径、ブラックホールの場合は降着円盤の内縁の半径[45]。

半径 $\sim$10 km、$\sim 1.4M_\odot$ の典型的な中性子星を考えよう。近接連星系において、伴星からは $\sim 10^{18}$ g/s の物質が流れ出すことがわかっている。このときの中性子星光度を見積ってみよう。

$$L \approx \frac{1.4GM_\odot 10^{18}\ [\mathrm{g/s}]}{c^2 10\ [\mathrm{km}]}c^2 \left(\frac{10\ [\mathrm{km}]}{r_{in}}\right)\left(\frac{M}{1.4\ M_\odot}\right)\left(\frac{\dot{M}}{10^{18}\ [\mathrm{g/s}]}\right)$$

[44] 地球は赤外線を出すので、赤外線衛星にとってはノイズ源になる。

[45] 物質は角運動量を持ってブラックホールに渦巻きながら落ちていくので、ブラックホールのまわりに円盤が形成される。これを降着円盤と呼ぶ。

$$\approx \frac{1.4\times1.5\times10^{18}}{10}(3\times10^{10})^2\ [\mathrm{erg/s}]\left(\frac{10\ [\mathrm{km}]}{r_{in}}\right)\left(\frac{M}{1.4\ M_\odot}\right)\left(\frac{\dot{M}}{10^{18}\ [\mathrm{g/s}]}\right)$$
$$\approx 2\times10^{38}\ [\mathrm{erg/s}]\left(\frac{10\ [\mathrm{km}]}{r_{in}}\right)\left(\frac{M}{1.4\ M_\odot}\right)\left(\frac{\dot{M}}{10^{18}\ [\mathrm{g/s}]}\right). \tag{183}$$

実際、Sco X-1[46]を始めとする明るいX線源の典型的な光度は$\sim 10^{38}$ erg/sである。

9.2. エディントン限界光度

天体にはその質量から決まる、エディントン限界 (Eddington limit) と言う限界光度がある。それ以上明るくなると、輻射圧によって星の大気が飛ばされてしまう。宇宙にある元素の大部分が水素である。水素の質量をm_Hとして、重力と輻射圧のつりあいの式は以下のように書ける。

$$\frac{\sigma_T}{c}\frac{L_{Edd}}{4\pi r^2}=\frac{GMm_H}{r^2}. \tag{184}$$

ここで$\sigma_T 6.65\times10^{-25}$ cm^{2}はトムソン断面積[47]で、電子が光を散乱する際の断面積である。これから、

$$L_{Edd}=\frac{4\pi cGM}{\sigma_T/m_H}=\frac{4\pi c\,GM}{\kappa_T}. \tag{185}$$

κ_Tはトムソン散乱によるOpacity(不透明度)で、$\sim$0.4 cm^2/gである。よって、

$$L_{Edd}=\frac{4\pi c^3}{\kappa_T}\frac{GM_\odot}{c^2}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\approx 1.3\times10^{38}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\ [\mathrm{erg/s}]. \tag{186}$$

白色矮星の最大質量 (チャンドラセカール限界) は$1.4M_\odot$で、それが中性子星の平均質量に対応している。中性子星の最大質量は$\sim 2M_\odot$で、それより重いコンパクト星はブラックホールである[48]。ブラックホールについては、(186) に従って、質量が大きいほど、明るく光ることができる。

前節で示したとおり、$\sim 10^{18}$ erg/sで質量降着している中性子星はほぼエディントン限界で光っていることに注意。これより質量降着率が大きくなっても、より明るく光ることはできない (物質は降着できずに、輻射圧で跳ねとばされてしまう)。

9.3. 黒体輻射 *(blackbody radiation)*

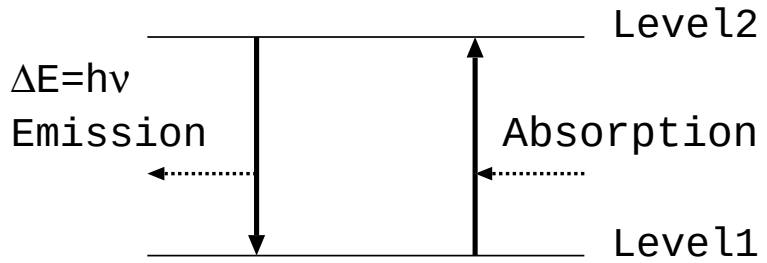
黒体輻射は物質と輻射場が完全に熱平衡にあるときの放射を記述し、[erg/s/cm^2/Hz/str]という単位を持つ (strは立体角)。どんな状況においても熱平衡にあるかぎり黒体輻射は成立するので、二つの準位を持つ原子と輻射場を考える。

上の準位にある原子が単位時間あたり$A_{21}[\mathrm{s}^{-1}]$の割合で下の準位に遷移し、光子を放射する。一方、輻射場の強度をJ_νとして、光子は単位時間あたり、$B_{12}J_\nu$の割合で、吸収される。

[46] さそり座X-1。全天で一番明るく、最初に発見されたX線源。

[47] 断面積という概念に慣れておこう。文字通り、一つの電子がこれだけの面積をもって、光の道筋に立ちはだかっていると思ってよい。

[48] 質量以外にブラックホールの観測的証拠はなかなか見つからないのだが、「ブラックホールしかありえない」、ということ。



また、輻射場の強度に刺激されて起きる放射の割合が、$B_{21}J_\nu$ である。下の準位にある原子の密度を n_1、上の密度にある原子の密度を n_2 とし、系が平衡状態にあることから、

$$n_1 B_{12} J_\nu = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} J_\nu \tag{187}$$

である。これを J_ν について解けば、

$$J_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}. \tag{188}$$

ここで、熱平衡の式より、

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp(h\nu/kT). \tag{189}$$

よって (188) は、

$$J_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{\exp(h\nu/kT)(B_{12}/B_{21}) - 1}. \tag{190}$$

ここで、一般に Einstein の関係式、

$$\begin{aligned} B_{12} &= B_{21}, \\ A_{21} &= \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \end{aligned} \tag{191}$$

が成立することがわかっている。前者は、詳細つりあい (detailed balance) を示し、後者では、$2h\nu^3/c^2$ が、[erg/cm^2/s/Hz] という単位を持つフラックスである。係数 2 は、変更の自由度 2 を表わしている。式 (191) を用いて、(190) は、

$$J_\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1} \ [\mathrm{erg/s/cm^2/Hz/str}]. \tag{192}$$

これが黒体輻射の式で、通常 $B_\nu(T)$ で表す。

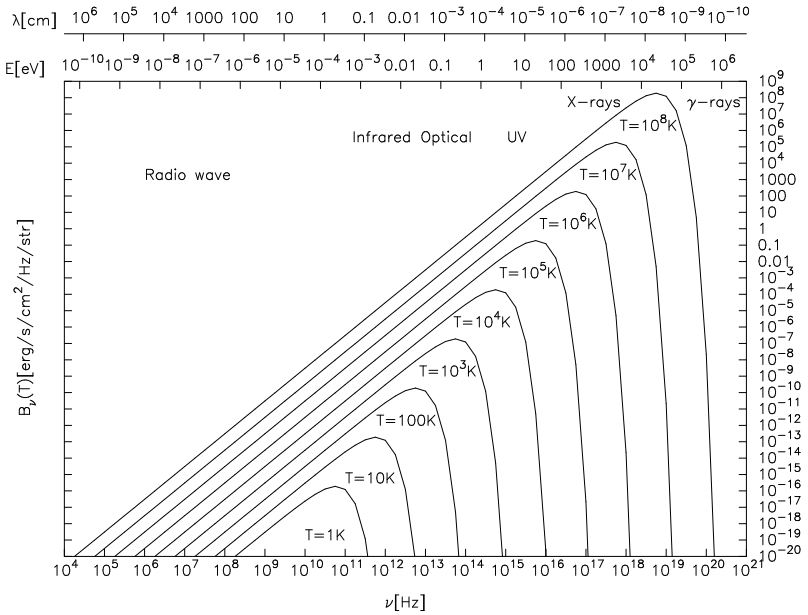
9.4. 黒体輻射のスペクトルと波長、振動数、エネルギーの関係

黒体輻射のスペクトル、(192) を振動数の関数としてプロットしたのが下図である (横軸、縦軸ともに対数表示であることに注意)。光の波長 λ と振動数 ν のあいだには光速 c を通じて、

$$c = \lambda\nu \tag{193}$$

という関係があることを思いだそう。また、光子のエネルギー E はプランク定数 h を使って、

$$E = h\nu = h\lambda/c \tag{194}$$



である。電磁波の波長の長いほうから短いほうに向って、電波、赤外線、可視光線、紫外線、X 線、ガンマ線である。それらの境界は必ずしもはっきりと定義されているわけではない[49]。

天体のエネルギースペクトルを表わすとき、横軸を波長 (単位は Å, μm など)、振動数 (Hz)、エネルギー (eV) のそれぞれで表す場合があるから注意しよう。プランク定数 $h = 6.626 \times 10^{-27}$ erg/s, 光速 $c = 2.9978 \times 10^{10}$ cm/s、エネルギーの換算式 1 eV $= 1.602 \times 10^{-12}$ erg を使って、

$$1\ [\mathrm{Hz}] \leftrightarrow 4.1357 \times 10^{-15}\ [\mathrm{eV}] \leftrightarrow 3.3356 \times 10^{-11}\ [\mathrm{cm}^{-1}]$$

である。「理科年表」にこれ以外の単位も含めた詳細なエネルギー換算表があるから、それを手元に置いておくと便利。

また、ボルツマン定数 $k = 1.38 \times 10^{-16}$ erg/K を用いて、1 eV $\approx$ 11600 K であるから、物質 (天体) の温度を表すのに、[K] で表すかわりに [eV] また [keV] で表してもよい。そうすると、温度 kT [eV] を持つ天体からの黒体輻射のピークはほぼ $h\nu \approx kT$ [eV] にくることがわかる[50]。実際、黒体輻射では物質と輻射 (光子) が平衡状態にあるので、物質の温度に対応したエネルギーの光子が最も多く放出されるのは自明である。たとえば、$\sim$ keV (数千万度) の温度を持つ中性子星表面やブラックホール周辺の降着円盤からの黒体輻射は、$\sim$ keV の X 線でもっとも明るく観測される。

9.5. 黒体輻射の例

黒体輻射は宇宙のいたるところで観測されるが、最も普遍的なのが宇宙背景輻射 (**Cosmic Microwave Background Radiation; CMBR**) である。これは、ビッグバンから数十万年後、宇宙が約 3000 K の黒体輻射に満ちていたときの光が、宇宙が 1000 倍膨張した結果、温度 (エネルギー) が 1/1000 に下がった (赤方偏移) ものである。NASA の COBE 衛星はその温度を正確に 2.725 ± 0.002 K と測定した。COBE 衛星の業績により、Mather と Smoot の 2 人は 2006

[49] X 線天文学では、2– 10 keV の波長域 (エネルギーバンド) が、標準的に使われている。

[50] 厳密には $h\nu = 2.82kT$ にピークがくる。これは式 (192) を $h\nu$ で微分すれば得られる。

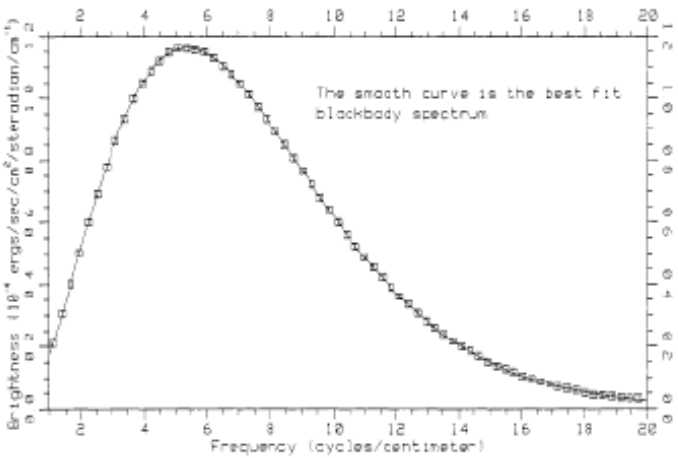
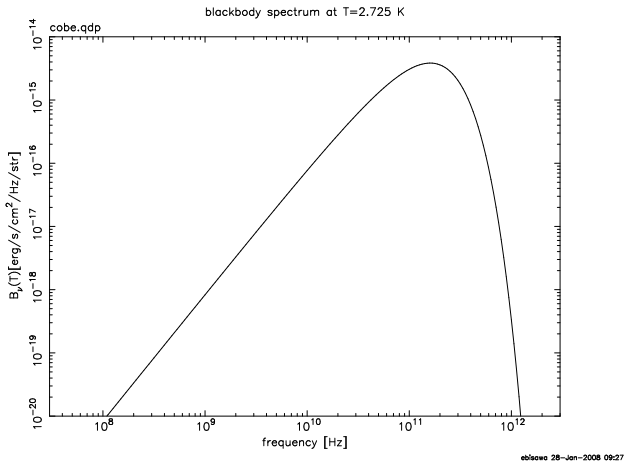


Fig. 1. COBE 衛星が測定した CMBR のスペクトル。四角が測定点、実線は 2.735 K の黒体輻射。Matehr et al. 1990, Astrophysical Journal, 354, L37 より。後に検出装置の較正が進み、最終的に COBE チームが 1999 年に発表した CMBR の温度は 2.725 ± 0.002 K である。横軸の単位が波数 (=波長の逆数=振動数/光速) であること、横軸、縦軸ともに線型表示であることに注意。同じ 2.725 K の黒体輻射のスペクトルを対数表示したのが下の図である。黒体輻射に限ったことではないが、スペクトルの表示の仕方によって、見た目の印象は大部違ってくる。



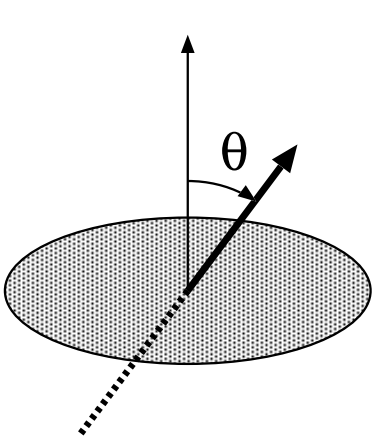
年のノーベル物理学賞を受賞している[51]。さらに、CMBR の微少な空間的ゆらぎを測定することにより、宇宙膨張のパラメーターに制限がつき、宇宙の年齢を知ることができる。WMAP 衛星の測定によって、それは 137 億年と求められている。

9.6. ステファンボルツマンの法則

黒体輻射をしている物体の表面から、単位面積あたり放射されるエネルギーを求めよう。黒体輻射の式に $\cos\theta$ を掛けて (ここに注意!)、全振動数と、立体角で $\theta = 0$ から $\pi/2$ まで積分する。立体角で積分する部分は

$$\int \cos\theta d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \pi \tag{195}$$

[51] http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2006/phyadv06.pdf.



となる。よって、求めるフラックスは

$$\pi \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \pi \left(\frac{2h}{c^2}\right)\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{dx}{e^x - 1} \tag{196}$$

$$= \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} T^4 \equiv \sigma T^4 \ [\mathrm{erg/s/cm^2}]. \tag{197}$$

ここで、$\int_0^\infty x^3/(e^x-1)dx = \pi^4/15$ を用いた。σ がステファンボルツマン定数であり、以下の値を持つ。

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-5} \ [\mathrm{erg/s/cm^2/K^4}] = 1.03 \times 10^{24} \ [\mathrm{erg/s/cm^2/keV^4}]. \tag{198}$$

9.7. 中性子星、白色矮星の表面温度

エディントン光度 $\sim 10^{38}$ [erg/s] で光っている、中性子星、白色矮星の表面温度を見積もってみよう。黒体放射を仮定すると、星の半径を R とすると、ステファン・ボルツマンの法則から $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ だから、

$$T \approx \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{1/4}$$

$$\approx \left(\frac{10^{38}\ \mathrm{erg/s}}{4\pi(10\mathrm{km})^2 10^{24}\ [\mathrm{erg/s/cm^2/keV^4}]}\left(\frac{L}{10^{38}\ \mathrm{erg/s}}\right)\left(\frac{10\ \mathrm{km}}{R}\right)^2\right)^{1/4}$$

$$\approx 2\ \mathrm{keV}\left(\frac{L}{10^{38}\ \mathrm{erg/s}}\right)^{1/4}\left(\frac{10\ \mathrm{km}}{R}\right)^{1/2}. \tag{199}$$

よって、半径 10 km の中性子星は、~ 2 keV の X 線で光っていることがわかる[52]。一方、半径 ~ 5000 km の白色矮星の表面温度は、$\sim$90 eV になり、これは軟 X 線源として観測される[53]。実際、このような白色矮星 X 線源が多数観測されており、Super Soft Sources と呼ばれている。

9.8. ブラックホールの周りの降着円盤の温度

ブラックホールに表面はないが、前節と同様に、その周りの降着円盤の温度を見積ることができる。シュバルツシルトブラックホール (回転していないブラックホール) を考えよう。

[52] 1 eV=11604 K だから、~ 2 keV は、2300 万度と言っても良い。

[53] エネルギーが低い X 線を軟 X 線、soft X-rays、高い X 線を硬 X 線、hard X-rays と呼ぶ。

すでに 7.2 節で学んだように、シュバルツシルト半径、$R_s = 2GM/c^2$ である[54]。

ところで、シュバルツシルト時空では、$3\ R_s$ より内側では安定な円軌道が存在しないことが知られている[55]。よって、通常、ブラックホールの周りの降着円盤の内縁の半径は $3\ R_s$ である。実際には円盤の温度は半径に依存するわけだが、非常に大雑把に、内縁付近の円盤の面積を $2\pi(3R_s)^2$ と仮定し、質量 M の天体のエディントン限界光度における降着円盤温度を見積もることにしよう。もっとも単純な場合として、降着円盤が黒体輻射をしていると仮定する。

$$L_{Edd} = \frac{4\pi\, cGM}{\kappa} \approx 2\pi\,(3R_s)^2\,\sigma\, T^4 \tag{200}$$

より温度を求めると、

$$T \approx \left(\frac{c^3}{18\sigma\kappa}\right)^{1/4} \left(\frac{2GM_\odot}{c^2}\right)^{-1/4} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/4} \approx 1\ \mathrm{keV}\ \left(\frac{M}{10\ M_\odot}\right)^{-1/4}. \tag{201}$$

よって、最大光度 (エディントン限界) で光っている質量 $\sim 10M_\odot$ のブラックホールの周りの降着円盤は、~ 1 keV の温度を持つので、X 線領域で観測されることがわかる。

ブラックホールの質量が大きいほど、降着円盤の温度が低くなることに注意。たとえば、太陽の十億倍の質量を持つブラックホール[56]の降着円盤の温度は ~ 10 eV となり、これは紫外線領域で観測される。

---

[54] 厳密には $R_s = 2GM/c^2$ という関係はアインシュタイン方程式を解かないと出てこないのだが、以下のように覚えておくこともできる。質量 m の物体が質量 M、半径 r の天体から脱出する際の脱出速度は、ニュートン力学で考えると $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = 0$ より、$v = \sqrt{2GM/r}$。半径が小さくなっていくと、天体の重力は強くなるので、それから脱出するのに必要な速度は大きくなる。半径が、$2GM/c^2$ まで小さくなると、脱出速度は光速に等しくなる。この半径がシュバルツシルト半径。

[55] これこそ、運動方程式を一般相対論的に解かないと出てこない。相対論の教科書を参考にしてください。

[56] このような巨大ブラックホールが、活動的銀河中心核 (**Active Galactic Nuclei; AGN**) の正体と考えられている。