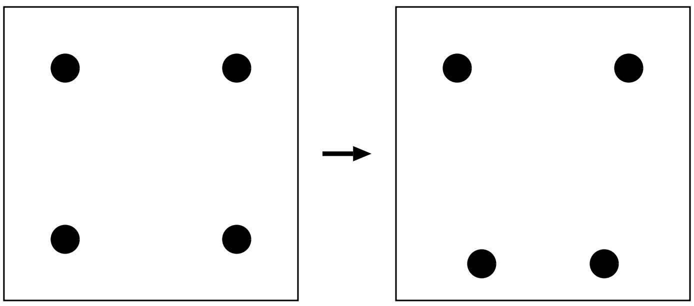
7. 一般相対性理論[30]

7.1. 局所慣性系

互いに等速運動している座標系の間では、式 (86) で与えられる四次元時空中の二点間の「世界間隔」は不変量であった。二つの系の間の座標変換 (ローレンツ変換) は、ベクトルの長さを変えない、四次元時空における回転を表す「直交変換」と考えても良いことを見てきた。これは、系が加速度運動をしておらず、重力を及ぼすモノが存在しない場合にのみ成立し、この条件件が成立している座標系を**慣性系**と呼ぶ。慣性系では「時空が平坦」なので、世界間隔は不変である。慣性系においては、ニュートンの第一法則が成立し、「静止しているモノは静止しつづけ、等速運動しているモノは等速運動しつづける」。

現実の世界には完全な**慣性系**は存在しないが、加速度運動による慣性力と重力は区別できないという**等価原理**によって、重力と慣性力を打ち消しあった、**局所慣性系**を定義することができる。たとえば、宇宙空間に浮かんで、いろいろな天体からの重力に身を任せている宇宙船の中は局所慣性系である。その宇宙船に対して等速運動している局所慣性系とのあいだの座標変換はローレンツ変換で与えられる。

慣性系は局所的にしか存在できないことは、以下の思考実験でわかる。遠方から地球に向かって自由落下する宇宙船を考えよう。あるいは、綱の切れたエレベーターの中でも良い。その中は局所慣性系になっている (いわゆる「無重力状態[31])。ボールを 4 つ等間隔に配置する。



もしこれが完全な慣性系ならば、ボールの間隔は変化しないはずだが、それぞれのボールは地球の中心に向かって落ちていき、地球の中心に近いほうが重力加速度は大きいので、やがてボール間の横方向の間隔は縮み、縦方向の間隔は伸びる[32]。

一般に、グローバルな慣性系は定義できない (時空は一様でない) ので、(86) は成立せず、代わりに、二つの局所慣性系座標の間に、

[30] この節では、"Exploring Black Holes –Introduction to General Relativity", by Taylor and Wheeler, Addison Wesley Longman を参考にしています。日本語でも英語でも一般相対性理論の教科書は山のようにありますが、僕が見た限り、これが一番わかりやすい教科書でした (しかし厳密ではありません)。

[31] 宇宙に行くと重力がなくなる、と言うことはない。重力は宇宙のどこにでも存在する。重力に身を任せて自由落下することにより、重力の効果を打ち消すことはできる。

[32] このように、一つの系の中で場所によって重力が異なることによって見かけ上生じる力を**潮汐力**と言う。潮汐力によって 4 つのボールの配置が変化した、と考えても良いし、重力の影響で、時空が平坦でなくなったと考えてもよい。

$$ds^2 \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 - (c\,dt)^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - (c\,dt')^2 \tag{133}$$

が成立する。ds^2 をメトリック (計量) と呼ぶ。**一般相対性理論**によれば、任意の座標変換に対して、局所的な世界間隔は不変である。

7.2. シュバルツシルト時空

質量 M を持ち、回転していない球対象な天体を考えよう。重力の影響により、その周りの時空は平坦ではない。それを、シュバルツシルト時空と呼ぶ[33]。

球対象だから、世界間隔を表わすのに、極座標を用いると便利である。天体の近く、動径座標 r の球殻に固定した観測者が計る時間を dt_{shell}、r に沿って直接測る距離を dr_{shell} とすると、

$$ds^2 = dr_{shell}^2 + r^2\,d\phi^2 - c^2 dt_{shell}^2 \tag{134}$$

である。ここで、動径座標 r は円周を 2π で割った量として定義される[34]。

十分遠方の観測者が乗っている座標を r, ϕ, t とすると、メトリックは

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} + r^2\,d\phi^2 - c^2\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right)dt^2 \tag{135}$$

と書けることがわかっている。これをシュバルツシルトメトリックと呼ぶ。c は光速、G は万有引力定数である。$2GM/c^2$ が、質量 M の天体のシュバルツシルト半径である。

太陽と地球のシュバルツシルト半径は覚えておこう。$G = 6.6726 \times 10^{-11}$ m^2/kg/s^2、$c = 2.9979 \times 10^8$ m/s、太陽質量=1.989×10^{30} kg、地球質量 $= 5.9742 \times 10^{24}$ kg だから、太陽のシュバルツシルト半径は、2.95 km、地球のシュバルツシルト半径は 8.87 mm[35]。

通常の星 (主系列星) は、核融合反応による圧力で形を保っていて、その半径はシュバルツシルト半径よりもはるかに大きい。中性子星の平均質量は太陽質量の約 1.4 倍で、中性子間の核力により形を保っていて、その半径はシュバルツシルト半径よりも大きい。質量が太陽の約 3 倍以上になると、中性子間の核力でもその重さを支えられなくなり、重力崩壊を起こしてブラックホールになる。回転していなりブラックホールの半径 (のようなもの) が、シュバルツシルト半径と考えてよい。

(134) と (135) を比較して、

$$dr_{shell} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}} \geq dr \tag{136}$$

$$dt_{shell} = \sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}\,dt \leq dt \tag{137}$$

である。

(136) は、直接測った動径方向の長さは、円周を 2π で割った長さよりも長いことを示している。(137) は、重力が強いところでは、時間の進み方が遅いことを示している。特にシュバ

[33] 回転している天体の周りの時空がカー時空である。

[34] たとえばブラックホールの場合は、シュバルツシルト半径より内側が見えないので、半径を直接測れない。

[35] 3 km, 1cm と覚えておけば大体事足りる。

ルツシルト半径、$r \approx 2GM/c^2$ においては、dt_{shell} に対しても dt は無限大になる。よって、たとえばブラックホールに一定間隔で光を出しながらモノが落ちていくようすを無限遠方から眺めると、シュバルツシルト半径に近づくにつれてその間隔は伸びていき、やがて無限になる (モノがブラックホールに落ちるところは決っして観測できない)。

また、天体の近く r で時間間隔 dt_{shell} の間に N 個の光波が発射されたとき、その場所における光の振動数は $\nu_{shell} = N/dt_{shell}$、無限遠方で観測した同じ光の振動数は $\nu = N/dt$ であるが、(137) より、

$$\nu = \sqrt{1 - \frac{2GM/c^2}{r}}\nu_{shell} \leq \nu_{shell} \tag{138}$$

である。これは、強い重力場中から放出された光が、無限遠方で観測すると振動数が小さいほうにずれる (光の波長が長いほうにずれる) ことを示している。これが**重力赤方偏移**である。

7.3. シュバルツシルト時空の *GPS* への応用

地球の半径はそのシュバルツシルト半径に比べてはるかに大きいから、一般相対性理論の効果は、日常生活では、ほとんど効いてこない。しかし、非常に精密な測定によって、一般相対性理論が効いてくることがある。その例が GPS (Glocal Positioning System) である。GPS は、地球の周りをそれぞれ 12 時間で周回する 24 個の衛星を用いている。3 個の衛星からの正確な距離がわかれば、地球上あらゆる場所の位置が正確にわかる。衛星からの距離は、光の発射時刻と受信時刻の差に光速を掛けて求める。時刻の補正には 4 つめの衛星を使う。地球上のどこからでも、(視界が開けていれば) 常に 4 つの衛星が受信できるように、衛星軌道が配置されている。

地球表面で自転運動している観測者、GPS 衛星上で公転運動している観測者を考える。式 (134) で、どちらの"shell" でも、自分の座標系では動いていないから、$dr_{shell} = d\phi = 0$ で、$ds^2 = -c^2 dt_{shell}^2$ である。十分遠方の観測者がこれを見たとき $dr = 0$ だから、(135) と合わせて、

$$c^2 dt_{shell}^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right)dt^2 - r^2 d\phi^2 \tag{139}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} c^2\left(\frac{dt_{shell}}{dt}\right)^2 &= c^2\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) - r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \\ &= c^2\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) - v^2. \end{aligned} \tag{140}$$

ここで、v は、地表の自転速度、または GPS 衛星の公転の速度である。(140) を、地表と GPS 衛星について比を取って、

$$\left(\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{satellite}}\right) - (v_{satellite}/c)^2}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r_{earth}}\right) - (v_{earth}/c)^2}. \tag{141}$$

$r_{satellite}, r_{earth}$ は地球のシュバルツシルト半径に比べてはるかに大きいから、いくつか近似が可能である。

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx \frac{\left(1-\frac{2GM/c^2}{r_{satellite}}-(v_{satellite}/c)^2\right)^{1/2}}{\left(1-\frac{2GM/c^2}{r_{earth}}-(v_{earth}/c)^2\right)^{1/2}} \tag{142}$$

$$\approx \left(1-\frac{GM/c^2}{r_{satellite}}-(v_{satellite}/c)^2/2\right)\left(1+\frac{GM/c^2}{r_{earth}}+(v_{earth}/c)^2/2\right)$$

$$\approx 1-\frac{GM/c^2}{r_{satellite}}-(v_{satellite}/c)^2/2+\frac{GM/c^2}{r_{earth}}+(v_{earth}/c)^2/2. \tag{143}$$

まず、$v^2_{satellite}, v^2_{earth}$ の項を除いて考えよう (これらの効果はマイナーであることがわかっている)。この式からただちにわかるように、$(GM/c^2)/r_{earth}$ と $(GM/c^2)/r_{satellite}$ はどちらも非常に小さな数であるが、その違いが無視できない、ということが本質的である。

GPS 衛星の周期が 12 時間ということから、$r_{satellite}$ と $v_{satellite}$ を求めよう。円運動の公式から[36]、

$$\frac{v^2_{satellite}}{r_{sattelite}} = \frac{GM}{r^2_{satellite}}, \tag{144}$$

$$P_{satellite} = \frac{2\,\pi\, r_{satellite}}{v_{satellite}}. \tag{145}$$

これを変形して、

$$r_{satellite} = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}, \tag{146}$$

$$v_{satellite} = \left(\frac{2\pi GM}{P}\right)^{1/3}. \tag{147}$$

数値を代入して、$r_{satellite} = 2.66 \times 10^7$m (2 万 6600km)、$v_{satellite} = 3.87 \times 10^3$ m/s.

$GM/c^2 = 4.4 \times 10^{-3}$m、$r_{earth} = 6.37 \times 10^6$m だから、(143) に代入して、$v_{satellite}$、$v_{earth}$ の項を無視すると、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx 1 - 1.65 \times 10^{-10} + 6.91 \times 10^{-10} \approx 1 + 5.26 \times 10^{-10}. \tag{148}$$

v_{earth} として赤道上の値を使うと、$v_{earth} = 4 \times 10^7$ m/86400=463 m/s。(143) に $v_{satellite}$、v_{earth} の項も入れて、

$$\frac{dt_{satellite}}{dt_{earth}} \approx 1 + 5.26 \times 10^{-10} - 8.32 \times 10^{-11} + 0.12 \times 10^{-11} \approx 1 + 4.44 \times 10^{-10}. \tag{149}$$

これだけの割合で、地表の時間よりも、人工衛星上の時間のほうが速く進むことがわかる。一日 (86400 秒) で、このずれは、38 マイクロ秒になる。その間に、光は 11km も進む! これを補正しないと、GPS は全く使いものにならない。

[36] この計算には一般相対論を使っていないが、それで精度は十分である。