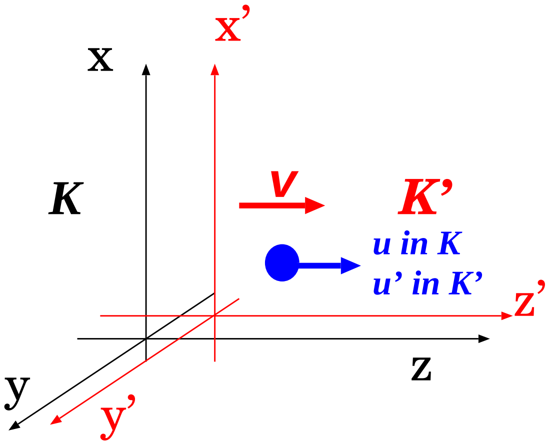
6.4. 速度の変換則

先に考えた K 系で運動する物体を K' 系で見たときの速度を考えよう。K 系における物体の速度、K' 系における物体の速度、K 系と K' 系の相対速度を区別する必要があることに注意。

先と同じく、K' 系は K 系の $+z$ 軸方向に、K に対して速度 v で動いているとする $\left(\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}\right)$。物体の運動も、$K$ 系から見て $+z$ 軸方向とし、その速度を u とする $(u_x = u_y = 0, u_z = u)$。K' 系から見た物体の速度を u' とする。また、$1/\sqrt{1-(u/c)^2} = \gamma_u, 1/\sqrt{1-(u'/c)^2} = \gamma_{u'}$ とする。



ローレンツ変換の式 (89) と、四元速度の定義 (106) から、

$$\begin{pmatrix} \gamma_{u'}u'_x \\ \gamma_{u'}u'_y \\ \gamma_{u'}u'_z \\ \gamma_{u'}ic \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_u u \\ \gamma_u ic \end{pmatrix}. \tag{108}$$

これから、

$$u'_x = u'_y = 0 \tag{109}$$

$$\gamma_{u'}\, u'_z = \gamma\gamma_u(u-v) \tag{110}$$

$$\gamma_{u'} = \gamma\gamma_u\left(1 - \frac{v}{c^2}u\right). \tag{111}$$

(110) と (111) から、

$$u'_z = \frac{u-v}{1-v\,u/c^2}. \tag{112}$$

x', y' 方向の速度成分がないことがわかったので、単純に、$u'_z = u'$ と書くことにする。上式を解釈してみよう。まず、$u=0$ のとき、$u=-v$ であるが、K 系に静止しているものを K' 系から見たら、$-z'$ 方向に速さ v で遠ざかることは自明である。

日常生活においては、物体の移動速度は光速に比べてはるかに小さいので、$vu/c^2 = 0$ と

近似してよい。すると上式は $u' = u - v$ と言う、見慣れた式になる[27]。

$u = c$ のときには、v の値には関わらず、$u' = c$ になる。これは光速度不変の原理に他ならない。$u = -0.9c,\ v = 0.9c$ としてみよう。非相対論的に考えると、K' 系から見て、物体は $u - v = -1.8c$ で遠ざかっていくことになるが、そんなことは実際にはありえない。式 (112 は、$-0.9945c$ を与える。物体の運動の速度が光速を越えることはありえないのだ。

6.5. 四元運動量

四元速度に質量 m を書けたものを**四元運動量**と呼ぶ。すなわち、

$$m\gamma(v_x, v_y, v_z, ic) \tag{113}$$

$$\equiv (p_x, p_y, p_z, iE/c). \tag{114}$$

ここで、相対論的には運動量は

$$p = m\gamma v \tag{115}$$

で、エネルギーは、

$$E = m\gamma c^2 \tag{116}$$

で表されることを用いた。$v/c \ll 1$ のとき、$\gamma \approx 1 - \frac{1}{2}(v/c)^2$ を用いて、(116) は、

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{117}$$

と近似できる。最初の項が静止エネルギー、二番目の項が、ニュートン力学における通常の運動エネルギーである。

(107) より、四元運動量の長さの二乗は $-m^2c^2$ だから、良く知られたエネルギーと運動量の間の関係式、

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \tag{118}$$

が得られる。

特に、光子など質量がゼロである素粒子の場合は、

$$E = p\,c. \tag{119}$$

光の波長を λ, 振動数を ν とするとき、h をプランク定数として、光子のエネルギーは $E = h\nu$, 運動量は $p = h/\lambda = h\nu/c$ で表わされることを思いだそう。あたりまえだが、光子について、(118) が成立している。

6.6. ドップラー効果と光行差 *(aberration)*

電磁波の伝播を考えるとき、電磁波の波数ベクトルを $\mathbf{k}$ ($|\mathbf{k}| = \omega/c$)、角振動数を ω として、

$$(\mathbf{k}, i\omega/c) \tag{120}$$

---

[27] 地上でボールを時速 $u = 100$km で投げる。同じ方向に時速 $v = 80$km で進む列車から見ると、その速さは $u - v$=100 ー 80=20km である。ここで、厳密に式 (112) を使うと、20.0000004km になる。

は四元ベクトルである。その長さは、

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}-\omega^2/c^2=0 \tag{121}$$

となり、ローレンツ不変量であることがわかる。また、四元ベクトル、

$$(x,y,z,,ict) \tag{122}$$

との内積をとると、

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t \tag{123}$$

は、電磁波の位相を与え、これもローレンツ不変量である。

K 系と、その z 方向に速度 v で走る K' 系の間のローレンツ変換の式 (89) と、四元速度の定義 (106) から、

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \\ \omega' i/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ \omega i/c \end{pmatrix}. \tag{124}$$

波数の定義から $|\mathbf{k}|=\omega/c$、$|\mathbf{k}'|=\omega'/c$ で、ベクトル $\mathbf{k}$ が yz 平面にあり、電磁波が進む向きと z 軸、z' 軸のなす角を θ,θ' とすると、$k_y=(\omega/c)\sin\theta$、$k'_y=(\omega'/c)\sin\theta'$ $k_z=(\omega/c)\cos\theta$、$k'_z=(\omega'/c)\cos\theta'$ である。よって、(124) を書きくだすと、

$$\omega'\ \sin\theta'=\omega\ \sin\theta \tag{125}$$

$$\omega'\ \cos\theta'=\omega\,\gamma(\cos\theta-\beta) \tag{126}$$

$$\omega'=\omega\,\gamma\,(1-\beta\cos\theta)=\frac{\omega}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) \tag{127}$$

となる。式 (125) と (126) の比を取ると、

$$\tan\theta'=\frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)}=\frac{\sqrt{1-(v/c)^2}\sin\theta}{\cos\theta-v/c} \tag{128}$$

が得られる。

式 (127) は、**光のドップラー効果**に他ならない。$v\ll c$ のとき、'$(v/c)^2$ の項を無視すれば、これは

$$\omega'=\omega\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) \tag{129}$$

となり、音波の場合と同じように、非相対論的なドップラー効果を表す。$(v/c)^2$ の項を無視できないとき、式 (127) で、$\theta=0$、光源が視線方向と垂直に運動しているときにも波長が変化することに注意。これを**横ドップラー効果**と呼ぶ。

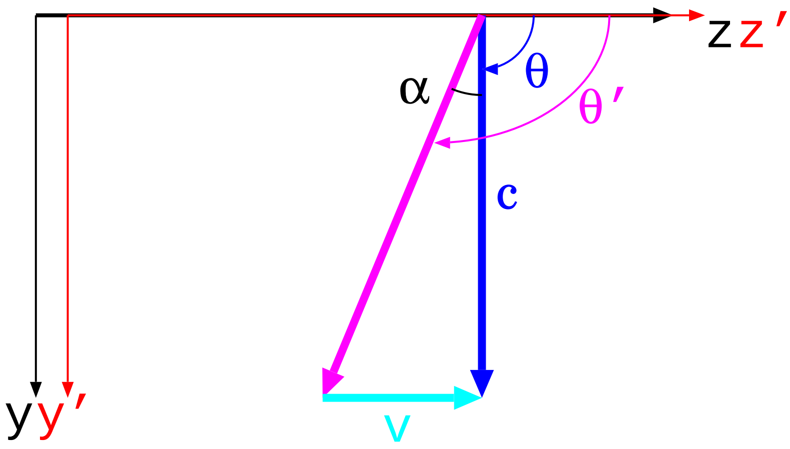
式 (128) は、地球の公転運動によって、星からの光の到来方向が変化する光行差 (aberration) を説明する。地球の公転速度は、$v\approx 30$ km/s, $v/c\approx 10^{-4}$ である。地球の公転面と垂直方向から星の光がやってくるとき、$\theta=90^\circ$ でなので、

$$\tan\theta' = -\frac{c}{v}\sqrt{1-(v/c)^2} \tag{130}$$

である。

$\tan(\theta-\pi/2) = -1/\tan\theta$ を使って、$\theta-\pi/2=\alpha$ とすると (下図参照)

$$\tan\alpha = \frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{131}$$



非相対論的には、単純にベクトルの大きさから、

$$\tan\alpha = \frac{v}{c} \tag{132}$$

が得られるが、これは式 (131) で、$(v/c)^2$ の項を無視した場合と一致する。

$v/c \approx 10^{-4}$ は、角度では $\sim 20''$ に対応する。地球の公転のために、季節 (地球の公転運動の方向の違い) によって、星の見かけの位置は最大 $\pm 20''$ 変化する[28]。$(v/c)^2 \approx 10^{-8}$ は、角度では ~ 2 marcsec (ミリ秒角) に対応していて、それほど高分解能の観測は電波干渉計によって可能であるが、それ以外のほとんどの天文観測においては装置の位置分解能以下なので、無視しても構わない。

[28] 光行差と年周視差を混同しないこと。後者は、地球の公転半径が、星の距離に比べ無視できないときに効いてきて、その大きさは星までの距離に依存する。