6.　特殊相対性理論

6.1.　ローレンツ変換[23]

これまでに、3 次元の直交変換が、天球座標の間の変換や人工衛星の姿勢に応用されることを学んだ。さらに 1 次元を加えて 4 次元時空を考えると、同様の直交変換が、特殊相対性理論にも使えることを見てみよう。

4 次元空間における直交変換を考える。あるベクトルを元の基底で表したときの成分が (x_1, x_2, x_3, x_4)、新しい基底ベクトルで表わしたときの成分を (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) とする。ベクトルの長さは不変なので、

$$s^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 \tag{83}$$

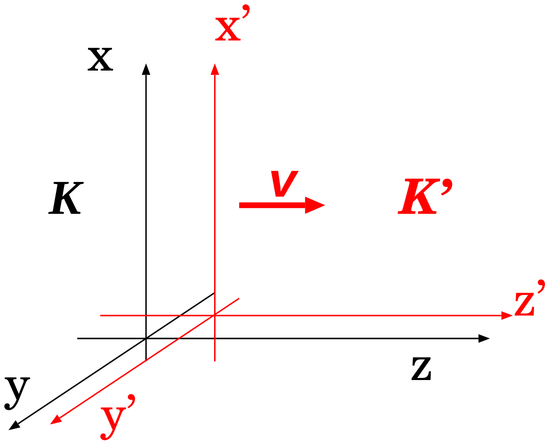
である。変換行列を $a_{ij}(i,j = 1,2,3,4)$ と書くと、3 次元のとき (26, 32) と全く同じように、

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij},\ a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \tag{84}$$

$$x'_i = a_{ij}\,x_j,\ \ x_i = a_{ji}\,x'_j \tag{85}$$

が成立する。ここで、1.6 節で述べたように、同じ添字については 1 から 4 までの和を取る。

(x, y, z) を空間座標成分、t を時間とする。ある事象をある座標系 K で表わした「世界点」の座標を (x, y, z, t) する。下図のように、時刻 $t = t' = 0$ で原点が K と一致し、K と相対的に速度 v で移動している座標系 K' を考え、その事象を K' で表わした座標を (x', y', z', t') とする。



c を光速として、$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$ としよう (x_4 が形式的に「虚時間」に対応していることに注意)。

このとき、式 (83) は、

$$s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 \tag{86}$$

となり、**これは相対的に等速運動をしている二つの座標系において、s^2 で定義される「世界間隔」が不変量である**ことを示している。式 (85) で表わされる (x, y, z, t) と (x', y', z', t') の間の変

[23] Jackson, “Classical Electrodynamics” の” 第 1 版” を参考にしています (日本語訳も出ています)。特殊相対論に関しては、第 2 版よりも第 1 版の記述のほうがシンプルでわかりやすいと感じました。

換が**ローレンツ変換**で、式 (83) で表わされるのが**ローレンツ不変量**である。一般に、式 (83) で示されるように「長さ」が不変で、式 (85) のローレンツ変換に従うベクトルを**四元ベクトル**と呼ぶ。

特に、時刻 $t = t' = 0$ で両系の原点を出発した光を考える。光の波面は球面上に拡がっていくわけだが、時刻 t,t' における波面上の座標はそれぞれの系で、$(x, y, z), (x', y', z')$ で、式 (86) は、

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, \tag{87}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \tag{88}$$

を意味している。つまり、 K 系と K' 系がどのような相対速度で動いていようとも、どちらの系から見ても、光速は c である、という**光速度一定の原理**が得られた。

具体的な例を見てみよう。下図のように、K 系の z 軸 (x_3 軸) のプラス方向に、K' 系が速度 v で動いている場合を考える。

この場合のローレンツ変換は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \tag{89}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\gamma\beta \\ 0 & 0 & i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}. \tag{90}$$

ここで、

$$\beta = \frac{v}{c},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{91}$$

c は光速である。この変換行列が、直交条件、(84) を満たしていること、転置行列が逆行列になっていること ($a_{ij}^{-1} = a_{ji}$) を確認しておこう。

式 (108),(90) より、

$$x'_3 = \gamma(x_3 + i\beta x_4), \tag{92}$$

$$x_3 = \gamma(x'_3 - i\beta x'_4) \tag{93}$$

である。K' 系の原点は $x'_3 = 0$、K 系の原点は $x_3 = 0$ であるが、これらを代入すると、

$$x_3 = v\,t, \tag{94}$$

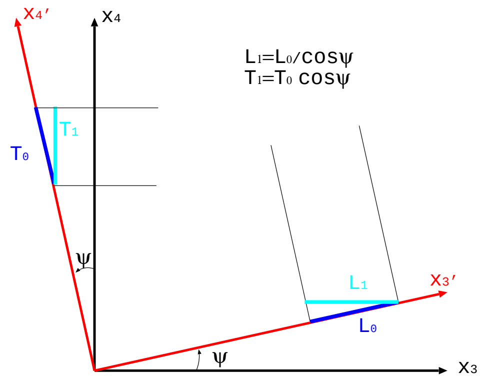
$$x'_3 = -v\,t' \tag{95}$$

が得られる。(94) は、K' 系の原点を K 系で表わしたときの関係式、(95) は、K 系の原点を K' 系で表わしたときの関係式で、どちらも自明である。

3 次元の直交変換は、座標系の間の空間回転を表わすのであった。同様に、4 次元の直交変換も、仮想的な回転で表すことができる。式、(108) を以下のように書こう。

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \tag{96}$$

$\cos\psi = \gamma \geq 1$ からわかるように、ここで導入した角度 ψ は仮想的なものであるが、ローレンツ変換を仮想的な座標軸の回転と考えても、以下で示すように、正しい結果が得られる。



K' 系で、x'_3 軸に沿った、長さ L_0 の棒を考えよう。K 系から見ると、この棒は $+z$ 方向に、速度 v で走っていることになる。K でこの棒の長さを測るときには、当然同時刻で測るから、それは、x_3 軸に沿った長さ L_1 になる。図から、

$$L_1 = L_0/\cos\psi \tag{97}$$

だから、

$$L_1 = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1-(v/c)^2} \leq L_0. \tag{98}$$

よって、**走っている棒は短く見える (ローレンツ収縮)**。次に、K' 系に固定した点における経過時間 T_0 を考える。これを K 系で測った時間 T_1 は、x_4 軸に沿って、

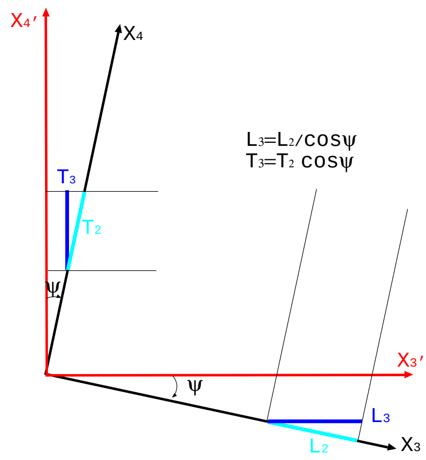
$$T_1 = T_0\cos\psi = T_0\,\gamma = \frac{T_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \geq T_0 \tag{99}$$

となる。つまり、**動いている時計はゆっくり進む**[24]。では、K' 系から K 系を見たときはどうなるのであろうか？特殊相対性原理によって、互いに等速運動をしている系から、すべての物理法則は、全く同じに見えなくてはいけない。

上図からわかるように、K 系の x_3 軸に沿った棒の長さ L_2 を K' 系で測定したときの長さ L_3 は、

$$L_3 = L_2/\cos\psi = L_2/\gamma = L_2\sqrt{1-(v/c)^2} \leq L_2 \tag{100}$$

[24] この現象は、例えば素粒子加速器実験では日々観測されている。素粒子固有の寿命 T_0 がごく短くても、それを光速近くまで加速すると、我々が観測する寿命 T_1 は十分長くなるので、そのビームを観測することができる。



となる。また、K 系に固定された点が T_2 の時間経過するとき、K' 系における時間 T_3 は、

$$T_3 = T_2 \cos\psi = T_2\,\gamma = T_2/\sqrt{1-(v/c)^2} \geq T_2 \tag{101}$$

である。式 (98) と (100)、(99) と (101) をそれぞれ比較することにより、K から K' を見ても K' から K を見ても、まったく同じように見えることがわかる。

6.2. 固有時間

式 (86) で示されるように、(x, y, z, ict) の長さはローレンツ不変量であるから、微少なベクトル $(dx, dy, dz, ic\,dt)$ の長さもローレンツ不変である。すなわち、

$$-c^2 d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \tag{102}$$

$$-c^2 d\tau'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 \tag{103}$$

と書いたとき、$d\tau = d\tau'$ である[25]。$d\tau$ は、K 系で静止している $(dx = dy = dz = 0)$ 観測者の測る時間、$d\tau'$ は K' 系で静止している $(dx' = dy' = dz' = 0)$ 観測者の測る時間である。つまり、物体とともに動く時計で測った時間は不変量であり[26]、この τ を**固有時間**と呼ぶ。

式 (102) を、

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{104}$$

と書くと、これはまさに式 (99) と同値で、動いている時計はゆっくり進むことを示している。

6.3. 四元速度

すでに見たように、時空点の座標 (x, y, z, ict) やその微少変化量 $(dx, dy, dz, ic\,dt)$ は四元ベクトルの一つである。これを不変量 $d\tau$ で割った

$$\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, ic\frac{dt}{d\tau}\right) \tag{105}$$

も **四元ベクトル**であり、これを**四元速度**と呼ぶ。これを式 (104) を使って、

---

25 自明ではあるが、式 (108) について、これが成立することを確認しておこう。

26 だから、例えば 1 秒の絶対的な長さというものを定義することができる。

$$\gamma(v_x, v_y, v_z, ic) \tag{106}$$

と書ける。

四元速度の長さがローレンツ不変量であることを確認しておこう。

$$\gamma^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - c^2) = \frac{v^2 - c^2}{1 - (v/c)^2} = -c^2. \tag{107}$$