$p=[\mathbf{v},0]$ について、単位四元数 q,q' による回転を引き続いて行う場合を考える。

$$q'(qpq^{-1})q'^{-1}=q'qpq^{-1}q'^{-1}=(q'q)p(q'q)^{-1}. \tag{74}$$

ここで、(57)、(64) を用いた。よって、以下の定理が得られた[21]。

定理 III 単位四元数 q による回転に引き続いて q' という回転を行うとき、その回転は $q'q$ という新たな単位四元数で表わされる。

5.4. 四元数と変換行列の関係

$\mathbf{v}=x\mathbf{e_x}+y\mathbf{e_y}+z\mathbf{e_z}$ として、(71) または (73) の各成分を書き下してみる。ただし、

$$q=[\mathbf{u}\sin\Omega,\cos\Omega]\equiv[q_1,q_2,q_3,q_4] \tag{75}$$

とする。これが単位四元数であるという条件から、

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2=1 \tag{76}$$

である。$\sin\Omega\mathbf{u}=q_1\mathbf{e_x}+q_2\mathbf{e_y}+q_3\mathbf{e_z}$ であることを使う。

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}'&=2(\sin\Omega\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}\ \sin\Omega\mathbf{u}+(2\cos^2\Omega-1)\mathbf{v}+2\cos\Omega\,(\sin\Omega\mathbf{u})\times\mathbf{v}\\
&=2(q_1x+q_2y+q_3z)(q_1\mathbf{e_x}+q_2\mathbf{e_y}+q_3\mathbf{e_z})+(q_4^2-q_1^2-q_2^2-q_3^2)(x\mathbf{e_x}+y\mathbf{e_y}+z\mathbf{e_z})\\
&\quad+2q_4\{(q_2z-q_3y)\mathbf{e_x}+(q_3x-q_1z)\mathbf{e_y}+(q_1y-q_2x)\mathbf{e_z}\}\\
&=(\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})\begin{pmatrix} q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2 & 2q_1q_2-2q_3q_4 & 2q_1q_3+2q_2q_4\\ 2q_1q_2+2q_3q_4 & -q_1^2+q_2^2-q_3^2+q_4^2 & 2q_2q_3-2q_1q_4\\ 2q_1q_3-2q_2q_4 & 2q_2q_3+2q_1q_4 & -q_1^2-q_2^2+q_3^2+q_4^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad (77)\\
&\equiv(\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})\,A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}. \quad (78)
\end{aligned}$$

ここで、式 (77) で得られた 3×3 変換行列を簡単のために A と表わした。式 (78) の意味は以下の通りである。基底ベクトル $(\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})$ を持つ座標系で、(x,y,z) という成分で表わされるベクトル $\mathbf{v}$ を、式 (75) で表される四元数によって回転し、$\mathbf{v}'$ というベクトルが得られたとき、同じ座標系におけるその成分は $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ で与えられる。ここで考えたのは、**ベクトルの変換 (回転)** であって**座標変換ではない**ことに注意。

次に座標変換を考える。すなわち、$(\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})$ という基底ベクトルそれぞれを、式 (75) で表される四元数によって回転し、新たな $(\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z})$ という基底ベクトルを定義したとき、$\mathbf{v}$ というベクトルの旧座標系における成分 (x,y,z) から新座標系における成分 (x',y',z') への変換

[21] オイラー角を用いて、3 つの回転を順次行う際の行列計算が非常に面倒くさかったことを思いだそう (43 式など)。四元数を用いると、回転はよりシンプルに記述できる。

を考える。その変換行列は $A^{-1} = {}^tA$ で与えられることは自明だろう。よって、以前に式 (32) で定義した変換行列と対比して書くと、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & 2q_1q_3 - 2q_2q_4 \\ 2q_1q_2 - 2q_3q_4 & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2q_2q_3 + 2q_1q_4 \\ 2q_1q_3 + 2q_2q_4 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{79}$$

8 頁で述べたオイラーの定理を思いだそう。$(a_{11}, a_{12},,, a_{33})$ の 9 つの成分を持つ変換行列が与えられたとき、それに対応する回転軸と回転角はどうやって求めたら良いだろうか？まず、(79) によって、$(a_{11},, a_{33})$ から、対応する四元数 $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ を求める。15 頁の定理 II によって、$q = [q_1, q_2, q_3, q_4] = [\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega]$ と書いたとき、その座標変換はベクトル $\mathbf{u}$ のまわりの角度 2Ω の回転に対応している。

5.5. 座標変換への応用

赤道座標から銀河座標への変換行列の式 (50) と式 (79) を比較してみよう。これ q_1, q_2, q_3, q_4 について解くことができて、

$$q_1 = 0.4832,\ q_2 = -0.1963,\ q_3 = -0.6992,\ q_4 = 0.4889 \tag{80}$$

が得られる。12 頁の例にあるように、赤道座標における方向ベクトル $(0.19033, -0.97915, -0.0709752)$ を空間成分に持つ四元数 $p = (0.19033, -0.97915, -0.0709752, 0)$ を考える。上記の q を使い、定義に従って四元数の積を計算すると、

$$q^{-1}pq = (0.879122, 0.476581, -0.00355986, 0) \tag{81}$$

が得られる。この空間成分が銀河座標における方向ベクトルに対応している。式 (50) を使った行列計算でも、四元数を使った計算でも同じ結果が得られるというわけだ。

また、定理 II より、$q = [\mathbf{u} \sin \Omega, \cos \Omega]$ として、この q パラメーターは、単位ベクトル $\mathbf{u} = (0.5539, -0.2250, -0.8016)$ の周りの $2\Omega = 2 \times 60.^\circ 73$ の回転に対応していることがわかる。3.2 節では、赤道座標から銀河座標への変換を 3 つのオイラー角 (各座標軸の周りの回転) で表わしたが、これは上記で示される、一回の回転と等価である (定理 I 参照)。

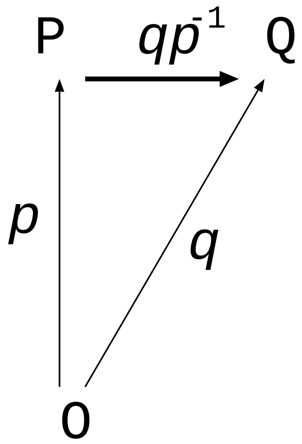
5.6. 人工衛星の姿勢への応用

四元数の具体的な応用例として、人工衛星の姿勢の平均や補完を考えよう。現実的に、二つ (あるいはそれ以上) の人工衛星の姿勢の平均や、離れた時間の間の姿勢の補完が必要になることがある。例えば、二つの姿勢計があり、その測定が少々違う場合、その平均をもっともらしい姿勢として採用することがある[22]。また、姿勢ファイルにはとびとびの時刻 (たとえば 4

[22] 私が「あすか」衛星の Slew(大きな姿勢移動) 中のデータを解析したとき、ジャイロを前方から積分して決めた姿勢と、後方から積分した姿勢の平均を使うと、もっとも正確な姿勢が得られることがわかりました。

秒ごと) における姿勢が書かれているので、その間の時刻における姿勢は、二つの姿勢の補完で決める必要がある。

元の姿勢 (通常、Z 軸が天の北極、X 軸が春分点の状態) を O、四元数 p で表わされる姿勢を P、四元数 q で表わされる姿勢を Q とする。下図からわかるように、姿勢 P から Q への変換は、新たな四元数 qp^{-1} で表されるはずである。



qp^{-1} がわかれば、それを $[\mathbf{u}\sin\Omega, \cos\Omega]$ と分解し、回転軸 $\mathbf{u}$ と回転角 2Ω がわかる。たとえば、その回転角のちょうど半分回転したのが、P と Q の平均の姿勢になる。P から Q に姿勢が移動しているとき、その間の姿勢を計算するには、回転角を経過時刻に合わせて補間してやれば良い。具体的には、姿勢 P を持つ時刻を t_0、姿勢 Q を持つ時刻を t_1 とすると、その間の時刻 t における姿勢は、四元数 $[\mathbf{u}\sin\Omega(t), \cos\Omega(t)]$ で与えられ、

$$\Omega(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \tag{82}$$

である。