5. 四元数と人工衛星の姿勢

5.1. 四元数 *(quaternion)*

これまで見てきたように、オイラー角を用いて人工衛星の姿勢を記述することができる。また、オイラー角から得られる回転行列 (式 43) を用いれば、天球座標と衛星座標の変換が計算できる。

では、時々刻々と変化する人工衛星の姿勢を記述する「姿勢ファイル」にはオイラー角が時間の関数として書かれているか？、というとそうではない。多くの場合、姿勢ファイルには、時間の関数として、**四元数 (quaternion)** が書かれている。四元数を用いると、任意の座標変換を連続的に表現できる[14]、計算に三角関数が必要ない、9 つの要素を持つ変換行列と比較して、パラメーターが 4 つだけなので計算量が少くて済む、等のメリットがあるので、人工衛星の姿勢計算やコンピューターグラフィクスなどに広く用いられている。

5.2. 四元数の性質[15]

四元数は 19 世紀にハミルトンによって発見されたそうだ。数学的な側面はともかく、ここでは四元数の応用面について述べる。すぐ後に述べるように、**ノルム (norm) が 1 である単位四元数 (unit quarternion) は、3 次元直交座標系の間の直交変換を記述する。**

四元数は複素数の拡張として、以下のように定義される。

$$q \equiv \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z + w, \ \text{where} \ \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1. \tag{53}$$

ここで、x, y, z, w は実数である。また四元数を以下のようにも表す。

$$q = [\mathbf{v}, w] = [(x, y, z), w] = [x, y, z, w]. \tag{54}$$

$\mathbf{v}$ は、3 次元空間のベクトルを表す。$q = [\mathbf{v}, w], q' = [\mathbf{v}', w']$ とするとき、四元数同士の和、積は四元数であり、それは次のように定義される。

$$q + q' = [\mathbf{v}, w] + [\mathbf{v}', w'] \equiv [\mathbf{v} + \mathbf{v}', w + w']. \tag{55}$$

$$qq' = [\mathbf{v}, w][\mathbf{v}', w'] \equiv [\mathbf{v} \times \mathbf{v}' + w\mathbf{v}' + w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']. \tag{56}$$

積が可換でないことに注意 (異なる軸の周りの回転が可換でないことに対応している)。また、$q'' = [\mathbf{v}'', w'']$ としたとき、

$$(qq')q'' = q(q'q'') \tag{57}$$

が成立する[16]。

---

[14] たとえば、ZYZ で定義されるオイラー角を採用した場合、X 軸の周りの回転を記述するのはやっかいである。

[15] この節と次節では `ftp://ftp.cis.upenn.edu/pub/graphics/shoemake/quatut.ps.Z` を参考にしています。このメモの著者の Ken Shoemake は、コンピューターグラフィクスに quaternion を導入した人らしい。

[16] これはそんなに自明でないから、ぜひ自分で手を動かして確認しておこう。その証明には、スカラー三重積に関する法則 (27) と、ベクトル三重積に関する法則、$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$ を使う。(おそらく) 力学の教科書に書いてあるように、ベクトル三重積の展開式を以下のように覚えておく。(1) 展開式はカッコ内のベクトルの一次結合であって、(2) 各ベクトルの係数は他の 2 つ

定数や3次元ベクトルも、四元数表示することができる。sを実数の定数としたとき、その四元数表示は、$[0,0,0,s] = [\mathbf{0}, s]$。$\mathbf{v}$を3次元ベクトルとしたとき、その四元数表示は、$[\mathbf{v}, 0]$。定数や3次元ベクトルを四元数表示したとき、それらを含む四元数の積に関して、以下は自明である。

$$sq = [\mathbf{0}, s][\mathbf{v}, w] = [s\mathbf{v}, sw] = qs, \tag{58}$$

$$\mathbf{v}\mathbf{v}' = [\mathbf{v}, 0][\mathbf{v}', 0] = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}', -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']. \tag{59}$$

s, s'を四元数の定数、p, q, q'を任意の四元数としたとき、以下のように線型性が成立する。

$$p(sq + s'q') = spq + spq', \tag{60}$$

$$(sq + s'q')p = sqp + s'q'p. \tag{61}$$

四元数の共役 (conjugate) の定義と、その性質は以下の通りである。

$$q^* = [\mathbf{v}, w]^* \equiv [-\mathbf{v}, w]. \tag{62}$$

$$(q^*)^* = q, \tag{63}$$

$$\begin{aligned}(pq)^* = \{[\mathbf{v}, w][\mathbf{v}', w']\}^* &= [\mathbf{v} \times \mathbf{v}' + w\mathbf{v}' + w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}']^* \\ &= [\mathbf{v}' \times \mathbf{v} - w\mathbf{v}' - w'\mathbf{v}, ww' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'] \\ &= [-\mathbf{v}', w][-\mathbf{v}, w'] = q^* p^*,\end{aligned} \tag{64}$$

$$(p + q)^* = p^* + q^*. \tag{65}$$

ノルムの定義と性質は以下の通りである。

$$N(q) \equiv qq^* = q^* q = w^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = w^2 + x^2 + y^2 + z^2, \tag{66}$$

$$N(qq') = (qq')^*(qq') = q'^* q^* q q' = N(q) q'^* q' = N(q) N(q^*), \tag{67}$$

$$N(q^*) = N(q). \tag{68}$$

特に、ノルムが1である四元数を単位四元数 (unit quaternion) と呼ぶ。qの逆四元数を

$$q^{-1} = q^*/N(q) \tag{69}$$

で定義する。qが単位四元数であるとき、

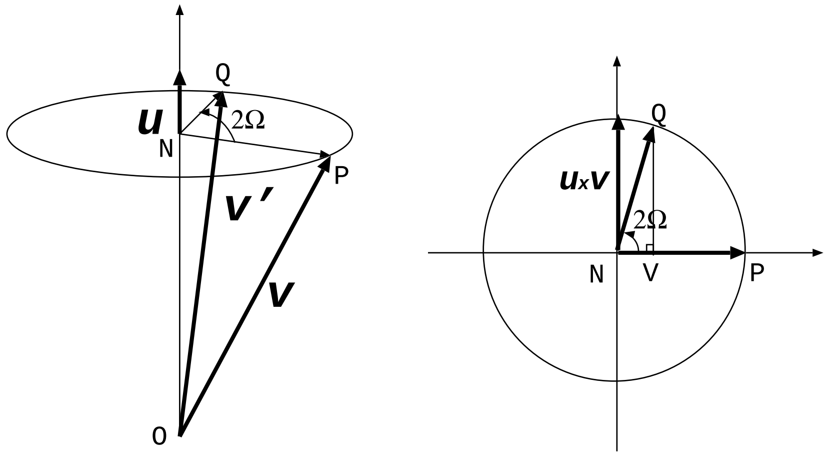
$$q^{-1} = q^* \tag{70}$$

である。

のベクトルの内積であり、(3) その符号は三重積の中央のベクトルに対しては正、端のベクトルに対しては負である。

5.3.　四元数と回転[17]

定理 II $\mathbf{u}$ を単位ベクトルとするとき、ノルムが *1* である単位四元数、$q=[\mathbf{u}\sin\Omega,\cos\Omega]$ と、任意のベクトル $\mathbf{v}$ を空間成分とする四元数、$p=[\mathbf{v},0]$ を考える。$p'=qpq^{-1}=[\mathbf{v}',0]$ としたとき、$\mathbf{v}'$ は、$\mathbf{v}$ を $\mathbf{u}$ の周りに角度 2Ω 回転したものである。



まず、幾何学的に考えよう。上図がここで考えている状況を図示したものである。$\mathbf{v}=\overrightarrow{OP}$ を $\mathbf{u}$ の周りに 2Ω 回転したものが、$\mathbf{v}'=\overrightarrow{OQ}$ である。ここで、$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NV}+\overrightarrow{VQ}$ であることに注目する。また、$\overrightarrow{ON}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}$、$\overrightarrow{NV}=\cos2\Omega\,(\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u})$、$\overrightarrow{VQ}=\sin2\Omega\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ である。よって、

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'&=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}+\cos2\Omega\,(\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u})+\sin2\Omega\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}\\&=(1-\cos2\Omega)\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}+\cos2\Omega\,\mathbf{v}+\sin2\Omega\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}.\end{aligned}\tag{71}$$

一方、四元数の計算より、

$$\begin{aligned}p'&=qpq^{-1}=[\mathbf{u}\sin\Omega,\cos\Omega][\mathbf{v},0][-\mathbf{u}\sin\Omega,\cos\Omega]\\&=[\mathbf{u}\sin\Omega,\cos\Omega][-\sin\Omega(\mathbf{v}\times\mathbf{u})+\cos\Omega\,\mathbf{v},\sin\Omega\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}]\\&=[-\sin^2\Omega\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{u})+\sin\Omega\cos\Omega\mathbf{u}\times\mathbf{v}-\sin\Omega\cos\Omega(\mathbf{v}\times\mathbf{u})+\cos^2\Omega\mathbf{v}+\sin^2\Omega(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u},0].\end{aligned}\tag{72}$$

空間ベクトル部を取りだして、ベクトル三重積を展開して変形すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'&=-\sin^2\Omega\mathbf{v}+\sin^2\Omega(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}+2\sin\Omega\cos\Omega\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\cos^2\Omega\mathbf{v}+\sin^2\Omega(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}\\&=2\sin^2\Omega(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}+(\cos^2\Omega-\sin^2\Omega)\mathbf{v}+2\sin\Omega\cos\Omega\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}\\&=(1-\cos2\Omega)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}+\cos2\Omega\,\mathbf{v}+\sin2\Omega\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}\end{aligned}\tag{73}$$

となり、式 (71) と式 (73) は完全に一致する。よって、定理 II が示された。

[17] この節の議論は、有名な教科書、”Classical Mechanics” H. Goldstein に倣いました。