2.　オイラー角と変換行列

2.1.　座標変換の計算

(3) と (20) を合わせると、

$$\mathbf{p}=(\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z})\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{31}$$

よって、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{32}$$

これが、二つの座標系における方向ベクトルの 3 成分、(x,y,z) と (x',y',z') との間の変換式である。

2.2.　オイラーの定理

今、共通の原点を持つ二つの直交座標系の間の座標変換 (点のまわりの回転変位) を考えているのだが、この場合に以下のオイラーの定理が成立する。

定理 I 点のまわりの回転変位は、その点を軸とする 1 つの軸のまわりの回転によって達っせられる。

これを、すでに学んだ直交行列の性質から簡単に証明することができる。回転変位を実現する回転軸に沿った方向ベクトルはその変換によって不変だから、そのベクトルの 3 成分を (x_0,y_0,z_0) と書けば、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

ここで変換行列を単純に A と書いた。これは、直交行列 A に対して、(x_0,y_0,z_0) が**固有ベクトル**であり、**固有値**が 1 であることを示している。単位行列 I を持ちいると、上式は、

$$(A-I)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

と書ける。つまり、行列 $A-I$ には逆行列が存在しない。その条件は、行列式が 0 であること、

$$|A-I|=0 \tag{35}$$

である。ところで、A の転置行列 ${}^tA$ は A の逆行列だから、

$$(A-I)\,{}^tA=I-{}^tA. \tag{36}$$

ここで両辺の行列式を取り、転置行列の行列式は元の行列式と等しいこと、回転行列の行列式は1であること (式30) を持ちいると、

$$|A-I|=|I-A|. \tag{37}$$

一般に、$n\times n$ 行列 B の行列式について、

$$|-B|=(-1)^n|B| \tag{38}$$

が成立する。今考えている3次元行列については、$|I-A|=-|A-I|$ である。よって、(37) は (35) を示していることがわかる。

2.3. オイラー角

変換行列は9つの要素を持つわけだが、独立な要素は3つである[8]。その3つを指定すれば、二つの座標系の間の変換を定義したことになる。

座標変換を表わす3つのパラメーターとして良く使われるものに**オイラー角**がある。オイラー角にもいろいろな定義があるが、ここでは日本の科学衛星の姿勢に使われている「zyz」オイラー角の定義を用いて議論を進める。

赤道座標の上で、1.4節で定義した、x,y,z 軸を考える (x 軸は春分点、z 軸は北極を向いている)。z 軸の周りに、$+z$ の向きを向いて時計周りに角度 ϕ 回転し、x 軸、y 軸の位置を変える。この新たな3軸を、便宜上 $x'y'z'$ としよう ($z=z'$ である)。次に、y' 軸の周りに、角度 θ 回転し、$x'z'$ 軸の位置を変え、$x''y''z''$ 軸を定義する ($y'=y''$ である)。最後に、z'' 軸の周りに ψ 回転し、最終的に、x''',y''',z''' 軸を定義することができる。xyz 軸による旧座標系と、$x'''y'''z'''$ 軸による新座標系の間の関係を与える (ϕ,θ,ψ) を、オイラー角と呼ぶ。

このように定義したオイラー角と、(11) または (20) で与えられる変換行列との関係を調べてみよう。まず、最初の z 軸のまわりの ϕ 回転で、新たな基底ベクトルと元の基底ベキトルの間の関係は以下のようになる。

$$(\mathbf{e_1'},\mathbf{e_2'},\mathbf{e_3'})=(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{39}$$

同様にして、y' 軸周りの θ 回転によって、

$$(\mathbf{e_1''},\mathbf{e_2''},\mathbf{e_3''})=(\mathbf{e_1'},\mathbf{e_2'},\mathbf{e_3'})\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}. \tag{40}$$

z'' 軸周りの ψ 回転によって、

$$(\mathbf{e_1'''},\mathbf{e_2'''},\mathbf{e_3'''})=(\mathbf{e_1''},\mathbf{e_2''},\mathbf{e_3''})\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{41}$$

---

[8] オイラーの定理より任意の直交変換は、回転軸の方向 (二つの要素で決まる) とそのまわりの回転角を与えれば実現できる。よって、必要なパラメーターは3つである。

以上、3式をまとめて、

$$(\mathbf{e_1'''},\mathbf{e_2'''},\mathbf{e_3'''})=(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \quad (42)$$

$$=(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})\begin{pmatrix}\cos\phi\cos\theta\cos\psi-\sin\phi\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi-\cos\phi\cos\theta\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\\ \sin\phi\cos\theta\cos\psi+\cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi-\sin\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta\end{pmatrix}. \quad (43)$$

これは回転行列だから、条件 (26) と (30) を満たしていることに注意しよう[9]。

3. 座標変換の具体例

3.1. 赤道座標と黄道座標への変換

春分点を指している x 軸の周りの回転を考えると速い。回転角 $\theta=23\overset{\circ}{.}43929$ である[10]。元の基底ベクトルを $\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z}$, 新たな基底ベクトルを $\mathbf{e_x'},\mathbf{e_y'},\mathbf{e_z'}$ とすると、

$$(\mathbf{e_x'},\mathbf{e_y'},\mathbf{e_z'})=(\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.91748 & -0.39778\\ 0 & 0.39778 & 0.91748\end{pmatrix}. \quad (44)$$

$$(\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z})=(\mathbf{e_x'},\mathbf{e_y'},\mathbf{e_z'})\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.91748 & 0.39778\\ 0 & -0.39778 & 0.91748\end{pmatrix}. \quad (45)$$

よって、赤道座標での方向ベクトルの3成分を (x,y,z), 黄道座標での成分を (x',y',z') としたとき、(32) より、

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.91748 & 0.39778\\ 0 & -0.39778 & 0.91748\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \quad (46)$$

が、赤道座標から黄道座標への変換を与える。3 ページの例を考えてみよう。赤経、赤緯が $(281\overset{\circ}{.}000,\ \ -4\overset{\circ}{.}070)$ のとき、(1) で与えられる、その方向ベクトルは、$(0.19033,\ -0.97915,\ -0.0709752)$ となる。(46) より、黄道座標における方向ベクトルは、$(0.19033,-0.92658,0.32437)$ となる。(5) と同様にして、

$$\tan^{-1}\left(\frac{-0.92658}{0.19033}\right)=-78\overset{\circ}{.}3923=281\overset{\circ}{.}608.$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{0.32437}{\sqrt{-0.92658^2+0.19033^2}}\right)=18\overset{\circ}{.}927.$$

9 手計算は面倒だが、"Mathematica" を使えば計算してくれる。しかし、ある程度は自分の手を動かすことを覚えておいたほうが良い。

10 正確な出典はわからなかったのだが、HEASARC の coco ではこの値を使っているので、ここではそれに倣うことにした。

このようにして、黄経、黄緯が得られた。