2007-10-22 宇宙科学 II (海老沢) 第 2 回 講義ノート
http://plain.isas.jaxa.jp/~ebisawa/TEACHING/2007UnivTokyo.html に置いてあります。

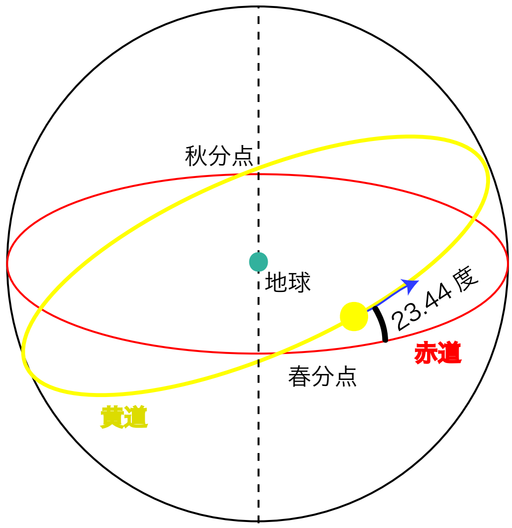
1. 天球座標、座標変換、人工衛星の姿勢

ここでは、線型代数の簡単な応用として、座標変換や人工衛星の姿勢について勉強してみよう。

1.1. 赤道座標、黄道座標

天文学では、天体の「見かけ」の位置を表すのに、仮想的な**天球**という概念を用いる。宇宙が球であり、その中心に私たちがいる (地球がある)、というイメージである。地球の自転軸を延ばしていって、天球とぶつかったところが、点の**北極**。地球の赤道を拡げていって、天球とぶつかったところが天の**赤道**。

地球の自転軸は、地球の公転面と垂直ではなく[1]23°.44 傾いている[2]。太陽が一年を通じて天球上で通る道を**黄道**と呼ぶが、黄道は天の赤道と 23°.44 傾いていることになる。太陽が天の赤道を南から北に横切る点が**春分点**、北から南に横切る点が**秋分点**。



地球上の経度 ($0° \sim 360°$)、緯度 ($-90° \sim +90°$) を定義し、それで地球上の位置を表すように、天球上で、赤経 ($0° \sim 360°$)、赤緯 ($-90° \sim +90°$) を定義し、それによって天体の位置を

[1] 地球自転軸は、25800 年の周期で**歳差運動**している (コマの首振り運動と同じ)。これによって、赤道座標系は時間とともずれていくので、いつの時点の地球自転軸に準じた赤道座標系かを明示する必要がある。現在普通に使われているのは 2000 年**分点**であり、これを J2000 で表す。私が大学院に入った 1986 年頃は 1950 年分点のほうが広く使われていて、これを、B1950 と表す。例として、ブラックホール天体、白鳥座 X-1 の赤経赤緯は、(299°.590, 35°.201) (J2000), (299°.120, 35°.065)(B1950) である。

[2] 41000 年の周期で、22°.2 から 24°.5 まで変化する。地球の回転を調べることが学問の一大分野になっていて、日本では国立天文台水沢でやっている。

表す。グリニッジ天文台 (経度=0°) が地球上の経度の基準点であるように、赤経の基準点は春分点である。このように、天の赤道面を基準にした座標系が**赤道座標**である[3]。同様に天の黄道面を基準にした座標系が**黄道座標**である。

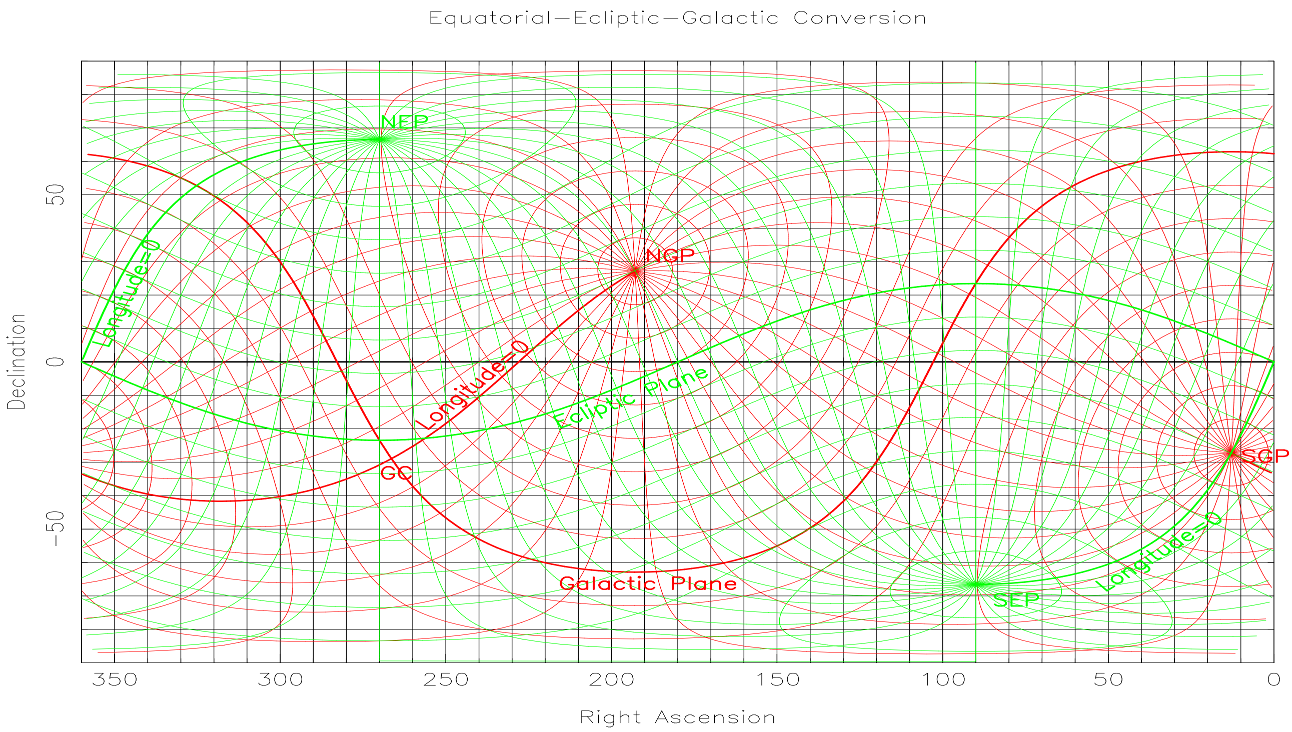
地球上と同様、天球上でも方角を東西南北で表わす。天の北極の方向が北、南極の方向が南、赤経が増える方向が東、減る方向が西。**地球上 (地球を外から見ている) と天球上 (天球を内から見ている) で東西の向きが逆になっている**ことに注意。つまり地図を拡げたとき、北が上向きなら東は右 (右向きに経度が増加する)。一方、「天球図」においては、北が上向きなら、東は左 (左向きに経度が増加する)。

1.2. 銀河座標

もう一つ良く使われるのが、我々の銀河系 (天の川) を基準に取った、**銀河座標**である。銀河中心の方向が**銀経**=0 度で (左向きに銀経が増加)、銀河面が**銀緯**=0 度に対応している。

1.3. 座標変換

任意の天体の位置を、赤道座標、黄道座標、銀河座標で表すことができる。以下の図は、これら 3 つの座標の間の変換を示したものである[4]。



---

3 天球の回転がまさに我々が日常使っている時刻と結びついているために、赤経を 0° から 360° で表す代わりに、0 時から 24 時で表すことがある。1 時間が 15° に対応する。通常通り、1 時間は 60 分、1 分は 60 秒。時、分、秒に対応する部分を hh, mm, ss.s としたとき、赤経を、hh:mm:ss.s と表記する。また、一般的に 1 度は 60 分角、1 分角は 60 秒角。これを、$1^\circ = 60', 1' = 60''$ と表記する。赤緯を分角、秒角で表わすことも多い。たとえば、ある天体の赤経、赤緯を $(281^{\circ}.00, -4^{\circ}.07)$ と書いても、$(18:44:0.0, -4^\circ 4' 12'')$ と書いてもよい。

4 この図を作った Fortran プログラムをホームページに上げておきますので、参考にしてください。

たとえば、以下の3つは天球上で同じ位置を表わす[5]。

(赤経、赤緯)=($281.^\circ000$, $-4.^\circ070$)
(銀経、銀緯)=($28.^\circ463$, $-0.^\circ204$)
(黄経、黄緯)=($281.^\circ608$, $18.^\circ927$)

どうやってこのような座標変換を計算するのだろうか[6]？今回はそれを考えてみよう。

1.4. 方向ベクトル

赤経と赤緯を通常、(α, δ)で表す。仮に天球の半径を1としたとき、長さが1で、(α,δ)の方向を表す**方向ベクトル**、$\mathbf{p}$を考えよう。春分点の方向をx軸、赤道面上、赤経90度をy軸、北極をz軸、とする右手系を考えよう。方向ベクトルのxyz座標は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{1}$$

$x^2+y^2+z^2=1$になることを、当たり前だけど念のために確認しておこう。ここで定義したx,y,z軸の基底ベクトルを、それぞれ$\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z}$とすると、

$$\mathbf{p} = x\mathbf{e_x} + y\mathbf{e_y} + z\mathbf{e_z} = (\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

である。

黄道座標系に基づいた、x'軸,y'軸,z'軸と、それぞれの基底ベクトル、$\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z}$を考えよう。$x'$軸は春分点を向いていて、$x'y'$軸面が黄道面に一致している。同様に、銀河座標系に基づいた、x''軸,y''軸,z''軸と、基底ベクトル$\mathbf{e''_x},\mathbf{e''_y},\mathbf{e''_z}$を考える。$x''$軸は銀河中心を向いていて、$x''y''$平面は銀河面と一致している。

式(2)で定義した方向ベクトル$\mathbf{p}$を、黄道座標系でも銀河座標系でも表わすことができる。

$$\mathbf{p} = (\mathbf{e_x},\mathbf{e_y},\mathbf{e_z}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{e'_x},\mathbf{e'_y},\mathbf{e'_z}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\mathbf{e''_x},\mathbf{e''_y},\mathbf{e''_z}) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}. \tag{3}$$

式(1)と同じ関係が、黄道座標と(x',y',z')の間に、銀河座標と(x'',y'',z'')の間に、成立する。たとえば、ベクトル$\mathbf{p}$の銀河座標を(l,b)とすると、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b\,\cos l \\ \cos b\,\sin l \\ \sin b \end{pmatrix}. \tag{4}$$

[5] ほぼ銀河面上(銀緯が小さいことからわかりますね？)、銀河中心から$28.^\circ5$離れて、X線を強く放射している領域で、「僕の好きな空」です。日本やアメリカの人工衛星でX線観測、チリやハワイの望遠鏡で赤外線観測をしました。

[6] たとえば、`http://heasarc.gsfc.nasa.gov/cgi-bin/Tools/convcoord/convcoord.pl`などで、座標変換のサービスを提供している。

これを逆に解いて、

$$\begin{pmatrix} l \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan^{-1}(y''/x'') \\ \tan^{-1}\left(z''/\sqrt{x''^2+y''^2}\right) \end{pmatrix} \tag{5}$$

によって、銀河座標 (l,b) を求めることができる。

以上まとめると、ある天体の赤経、赤緯 (α,δ) を銀経、銀緯 (l,b) に変換するには、式 (1) によって赤道座標系での方向ベクトルの 3 成分 (x,y,z) を求め、それを式 (3) によって銀河座標系の 3 成分 (x'',y'',z'') に変換し、さらに式 (5) を用いればよい。

1.5. 直交変換と変換行列

基底ベクトル $(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})$ で表される**直交座標系**と $(\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_3},\mathbf{e'_3})$ で表される**直交座標系**の間の**直交変換**を考える (添字 1,2,3 が上で書いた xyz に対応)。これらは、それぞれ互いに垂直な単位ベクトルの組だから、

$$\mathbf{e_1}^2=\mathbf{e_2}^2=\mathbf{e_3}^2=1, \mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_2}=\mathbf{e_2}\cdot\mathbf{e_3}=\mathbf{e_3}\cdot\mathbf{e_1}=0 \tag{6}$$

$$\mathbf{e'_1}^2=\mathbf{e'_2}^2=\mathbf{e'_3}^2=1, \mathbf{e'_1}\cdot\mathbf{e'_2}=\mathbf{e'_2}\cdot\mathbf{e'_3}=\mathbf{e'_3}\cdot\mathbf{e'_1}=0 \tag{7}$$

片方の系のベクトルはもう片方の系のベクトルを使って表わすことができる。

$$\mathbf{e'_1}=a_{11}\mathbf{e_1}+a_{12}\mathbf{e_2}+a_{13}\mathbf{e_3}, \tag{8}$$

$$\mathbf{e'_2}=a_{21}\mathbf{e_1}+a_{22}\mathbf{e_2}+a_{23}\mathbf{e_3}, \tag{9}$$

$$\mathbf{e'_3}=a_{31}\mathbf{e_1}+a_{32}\mathbf{e_2}+a_{33}\mathbf{e_3}. \tag{10}$$

行列表示すると、

$$(\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_2},\mathbf{e'_3})=(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

(7) の条件より、この**変換行列**の各要素の間に、

$$a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1, a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1, a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1, \tag{12}$$

$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0, a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0, a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13}=0 \tag{13}$$

が成立する。また、(8)、(9)、(10) と、$\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$ の内積を取ることにより、以下がわかる。

$$\mathbf{e'_1}\cdot\mathbf{e_1}=a_{11},\ \mathbf{e'_1}\cdot\mathbf{e_2}=a_{12},\ \mathbf{e'_1}\cdot\mathbf{e_3}=a_{13}, \tag{14}$$

$$\mathbf{e'_2}\cdot\mathbf{e_1}=a_{21},\ \mathbf{e'_2}\cdot\mathbf{e_2}=a_{22},\ \mathbf{e'_2}\cdot\mathbf{e_3}=a_{23}, \tag{15}$$

$$\mathbf{e'_3}\cdot\mathbf{e_1}=a_{31},\ \mathbf{e'_3}\cdot\mathbf{e_2}=a_{32},\ \mathbf{e'_3}\cdot\mathbf{e_3}=a_{33}. \tag{16}$$

つまり、式 (11) で定義される**変換行列**の 9 つの**変換係数**は旧座標系の 3 軸と新座標系の 3 軸の間のなす 9 つの角度の余弦に対応している。これを、「$\mathbf{e_1e_2e_3}$ で表わされる系における $\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_2},\mathbf{e'_3}$ の**方向余弦**は、それぞれ $(a_{11},a_{12},a_{13}),(a_{21},a_{22},a_{23}),(a_{31},a_{32},a_{33})$ である」、という言いかたをす

る。同様に、式 (14),(15),(16) を縦に眺めると、「$\mathbf{e'_1 e'_2 e'_3}$ で表わされる系における $\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,$\mathbf{e_3}$ の**方向余弦**は、それぞれ $(a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ である」ことがわかる。

よって、式 (8),(9),(10) の逆変換は、

$$\mathbf{e_1} = a_{11}\mathbf{e'_1} + a_{21}\mathbf{e'_2} + a_{31}\mathbf{e'_3}, \tag{17}$$

$$\mathbf{e_2} = a_{12}\mathbf{e'_1} + a_{22}\mathbf{e'_2} + a_{32}\mathbf{e'_3}, \tag{18}$$

$$\mathbf{e_3} = a_{13}\mathbf{e'_1} + a_{23}\mathbf{e'_2} + a_{33}\mathbf{e'_3} \tag{19}$$

となる。

行列表示すると、

$$(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) = (\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

(6) の条件より、(12), (13) に対応する式は、

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \tag{21}$$

、

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0. \tag{22}$$

式 (11) と式 (20) を比較すると、**変換行列**の行と列を入れかえた**転置行列**が**逆行列**になっていることがわかる。

1.6. 直交変換の簡単な記法

以上の諸式を、簡単に表す記法がある。まず、添字、1,2,3 を i, j, k などの文字で表す。**Kronecker** のデルタを導入する。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{23}$$

さらに、「同じ添字が対になって一つの項に現われるときには、常にその添字について 1 から 3 までの和[7]をとる (Σ 記号を省略する)」という総和の規約を導入する。

基底ベクトルの直交条件、(6),(7) は以下のように書ける。

$$\mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_j} = \delta_{ij}, \mathbf{e'_i} \cdot \mathbf{e'_j} = \delta_{ij}. \tag{24}$$

二つの座標系の基底ベクトルと、変換行列との関係は以下のようになる。

$$\mathbf{e'_i} \cdot \mathbf{e_j} = a_{ij},\ \mathbf{e'_i} = a_{ij}\mathbf{e_j},\ \mathbf{e_i} = a_{ji}\mathbf{e'_j}. \tag{25}$$

座標軸の直交関係を表わす (12),(13),(21),(22) は、

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}. \tag{26}$$

[7] 空間の 3 次元に加えて、時間の 1 次元が入ると 1 から 4 まで (あるいは 0 から 3 まで) の和になる。

1.7.　スカラー三重積

一般的に、ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の**スカラー三重積**は、

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \tag{27}$$

で定義される。$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ がこの順に右手系をなすとき、スカラー三重積は、この 3 つのベクトルが作る平行六面体の体積を表わす。 スカラー三重積を $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の直角成分を用いて書くと、

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A_x B_y C_z + A_y B_z C_x + A_z B_x C_y - A_x B_z C_y - A_y B_x C_z - A_z B_y C_x \tag{28}$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix}. \tag{29}$$

上記で定義した直交座標系の基底ベクトル $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ または $\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3}$ のスカラー三重積は、当然 1 である。よって、直交変換の変換行列の行列式の値は 1 である。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1 \tag{30}$$