Astronomical Optics

Chapter 3 Fermat's Principle: An Introduction
p27 - 47

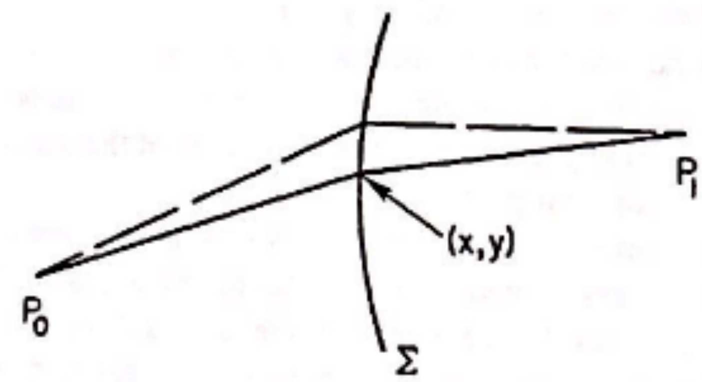
30 Nov 2017

TK

もくじ

3.1 Fermat's Principle in General

P0とP1を通る光線の行路を考える。
実線は実際の光路、破線は他の光路とする。



P0からP1に届くまでにかかる時間をτとすると
τが静止する条件は

$$\partial\tau/\partial x = \partial\tau/\partial y = 0 \qquad (3.1.1)$$

τは光路長(Optical Pass Length; OPL)を用いて表すと、
微小時間dtの間の光路長を用いて

真空中の光速	c
媒質中の光速	v
媒質の屈折率	n

$$d(OPL) = c\,dt = (c/v)v\,dt = n\,ds$$
$$OPL = c\int dt = \int n\,ds \qquad (3.1.2)$$

フェルマーの原理(Fermat's Principle)の一般形式

$$\delta\tau = 0 \quad \text{or} \quad \delta(OPL) = 0$$

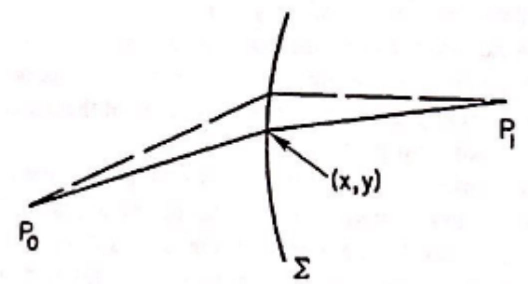
2次元面の場合

屈折率 $n = n(y,z)$ 、 $ds = \sqrt{dy^2 + dz^2}$ の場合を考える。

$y' = dy/dz$ とおくと、フェルマーの原理は

$$d(OPL) = n\,ds = 0 \longrightarrow \delta \int_{P_0}^{P_1} n(y,z)\sqrt{\left(1 + y'^2\right)}dz = 0$$

(3.1.3)



積分の中身$= F(y,y',z)$とおきかえる。

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} F(y,y',z)dz = \int_{P_0}^{P_1} \delta\, F(y,y',z)dz = 0 \quad (3.1.4)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\delta F &= \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dz}(\delta y)\\ \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right) &= \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dz}(\delta y) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\end{aligned}}$$

$\Leftrightarrow$

0 P_0, P_1におけるδyは0

$$\int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial F}{\partial y}\delta y\, dz + \cancel{\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right|_{P_0}^{P_1}} - \int_{P_0}^{P_1} \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\, dz = 0 \quad (3.1.5)$$

$$\Leftrightarrow \int_{P_0}^{P_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\, dz = 0$$

$\Leftrightarrow$

任意のδyで
積分が0になる

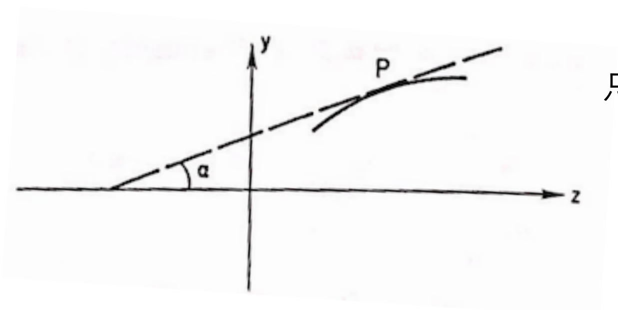
$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0} \quad (3.1.6)$$

フェルマーの原理成立に必要な等式

$F = n(y,z)\sqrt{(1+y'^2)}$であり、$y'$は$y$と陽でない、かつ$n$は$y'$と独立であるから、

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(1+y'^2)}\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{d}{dz}\left[\frac{ny'}{\sqrt{(1+y'^2)}}\right] = 0$$

$$\sqrt{(1+y'^2)}\frac{\partial n}{\partial y} - n\frac{d}{dz}\left[\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}\right] - \left[\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}\right]\frac{dn}{dz} = 0 \qquad (3.1.7)$$



点Pにおける傾きαを考える。

(3.1.8)

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dz} = y'$$

$$\cos\alpha = \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)}}$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}$$

$$\frac{d}{dz}\sin\alpha = \cos\alpha\frac{d\alpha}{dz}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sec\alpha\frac{\partial n}{\partial y} - n\cos\alpha\frac{d\alpha}{dz} - \sin\alpha\frac{\partial n}{\partial z} = 0 \qquad (3.1.9)$$

光路における曲率κを導入する。

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{ds} = \cos\alpha\frac{d\alpha}{dz}$$ より

$$\boxed{n\kappa = n\cos\alpha\frac{d\alpha}{dz} = \sec\alpha\frac{\partial n}{\partial y} - \sin\alpha\frac{\partial n}{\partial z}} \qquad (3.1.10)$$

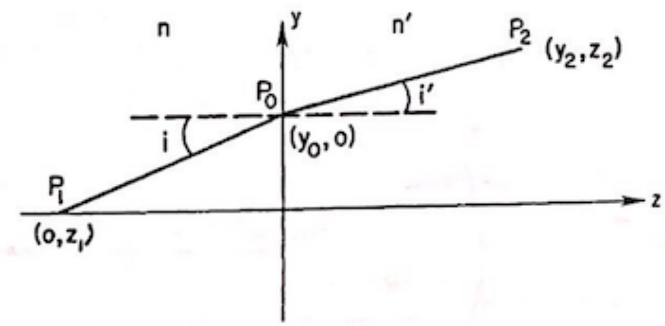
nが滑らかに変化するとき、光路の局所的な曲率を与える。
nが定数の場合、$\kappa = 0$ $\rightarrow$ 一様な媒質中の光は直進する。

3.2 Fermat's principle and refracting surfaces
3.2.a Laws of Refraction and Reflection

フェルマーの原理からのSnellの法則の導出

屈折率がnからn'に変化する面を考える。

フェルマーの原理から



$$\delta\left[n\int_{P_1}^{P_0} ds + n'\int_{P_0}^{P_2} ds\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta\left\{n\sqrt{(z_1^2+y_0^2)} + n'\sqrt{[z_2^2+(y_2-y_0)^2]}\right\} = 0$$

今、変数はy_0であるから、

$$\left\{n\frac{d}{dy_0}\sqrt{(z_1^2+y_0^2)} + n'\frac{d}{dy_0}\sqrt{[z_2^2+(y_2-y_0)^2]}\right\}\delta y_0 = 0$$

これが任意のδy_0で成り立つためには、{}=0。微分を計算すると

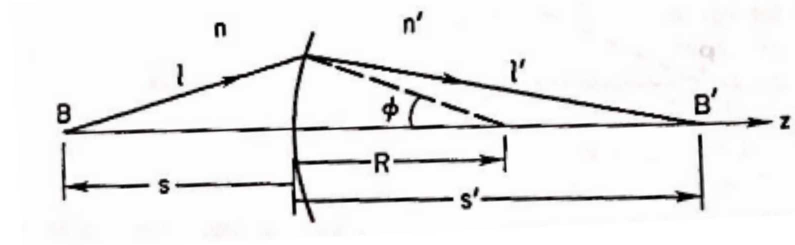
$$n\frac{y_0}{\sqrt{(z_1^2+y_0^2)}} - n'\frac{(y_2-y_0)}{\sqrt{[z_2^2+(y_2-y_0)^2]}} = 0 \qquad (3.2.2)$$

$$\Leftrightarrow \qquad n\sin i - n'\sin i' = 0$$ (Snellの屈折の法則)

3.2.b Spherical interface

フェルマーの原理からの屈折の近軸公式の導出

点Pを経由して点BからB’に至る距離Lの光線を考える。余弦定理から



$$l = -\sqrt{R^2 + (R-s)^2 - 2R(R-s)\cos\phi}$$

$$l' = -\sqrt{R^2 + (s'-R)^2 - 2R(s'-R)\cos\phi}$$

$L = -nl + n'l'$であり、フェルマーの原理から$dL/d\phi = 0$。

$$\frac{dL}{d\phi} = -\frac{nR(R-s)\sin\phi}{l} - \frac{n'R(s'-R)\sin\phi}{l'} = 0 \qquad (3.2.3)$$

近軸の極限では$l = s$かつ$l' = s'$。

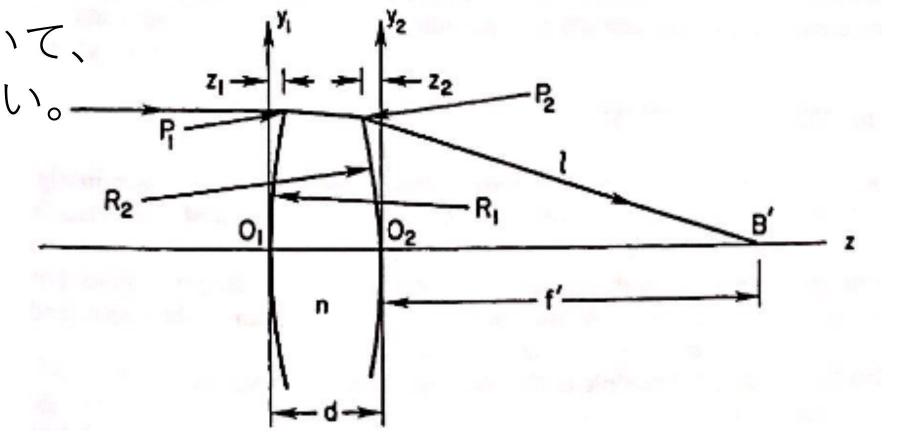
$$\Rightarrow \qquad \frac{n}{s} - \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{R} \qquad (2.2.5)$$

近軸公式

3.2.c Focal Length of Thin Lens

フェルマーの原理から薄レンズの焦点距離の導出

2つの対応する点同士を結ぶ全ての光線について、フェルマーの原理が成り立たなければならない。前の場合のBが十分遠い場合を考える。



z軸上を通る場合の光路長L_0は、

$$L_0 = [BO_1] + n[O_1O_2] + f'$$

また高さyを通る近軸の光線では、z_2<0として

$$L_p = [BO_1] + z_1 + n[P_1P_2] - z_2 + l$$

$L_0 = L_p$より$d = [O_1O_2]$、$d - z_1 + z_2 = [P_1P_2]$とおくと、

$$nd + f' = z_1 + n(d - z_1 + z_2) - z_2 + l \qquad (3.2.4)$$

$$\Leftrightarrow \quad l - f' = (n-1)(z_1 - z_2) \qquad (3.2.5)$$

薄レンズ近似の場合、$y_1 = y_2 = y$ であり、レンズの曲率半径R_1, R_2を用いると$z_1 = y^2/2R_1$、$z_2 = y^2/2R_2$。レンズの曲率半径R_1, R_2は次のように表される。

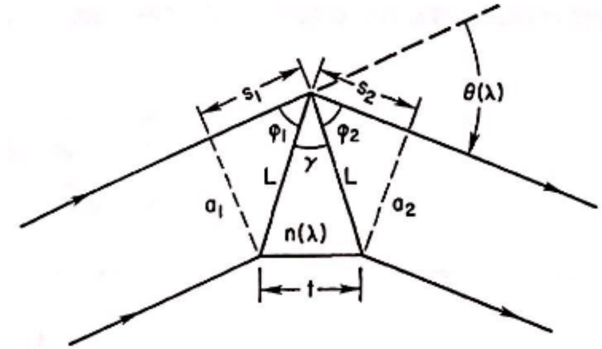
$$R_1^2 = y_1^2 + (R_1 - z_1)^2 = R_1^2 + y^2 - 2R_1 z_1$$

$$R_2^2 = y_2^2 + (-R_2 - z_2)^2 = R_2^2 + y^2 - 2R_2 z_2$$

$l^2 = y^2 + f'^2 = f'^2(1 + y^2/f'^2)$
平方根＋$y^2/f'^2 \ll 1$より$\Rightarrow \quad l - f' = y^2/2f'$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \qquad (2.4.4)$$

3.2.d Dispersing Prism



ガラスのプリズムを考える。

$n = n(\lambda)$であるから、分散はθもλの関数。

プリズムを縦に分割する軸に対して対称であるから

$s_1 = s_2 = s$、 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$、 $a_1 = a_2 = a$

フェルマーの原理より、(グレーティング上部の光線) = (グレーティング下部の光線)

$$\Leftrightarrow \quad 2L\cos\varphi = nt \qquad (3.2.6)$$

θのλ依存性は $t\dfrac{dn}{d\lambda} = -2L\sin\varphi\dfrac{d\varphi}{d\lambda} = -2L\sin\varphi\dfrac{d\varphi}{d\theta}\dfrac{d\theta}{d\lambda}$ (3.2.7)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = \left(\frac{t}{a}\right)\frac{dn}{d\lambda} \qquad (3.2.8)$$

$L\sin\varphi = a$

$\theta = \pi - \gamma - 2\varphi$

$\dfrac{d\varphi}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{1}{2}$

ほとんどの光学ガラスの屈折率は、A, Bを定数として $n(\lambda) = A + (B/\lambda^2)$ (3.2.9)
で表せる。

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\left(\frac{2t}{a}\right)\left(\frac{B}{\lambda^3}\right)$$ *角度分散(angular dispersion)* (3.2.10)

→ 微分が負 →θとλは逆相関

3.3 Wave interpretation of Fermat’s principle

フェルマーの原理の物理解釈として波動としての光を考える。

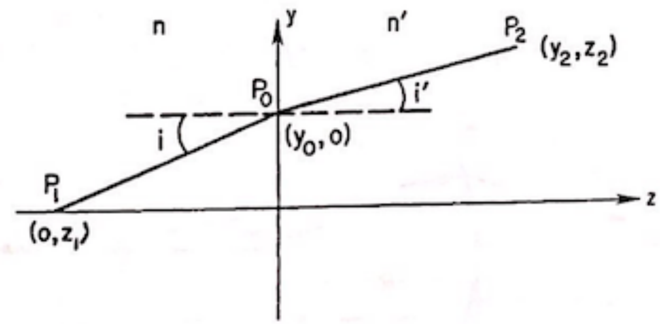
右図で、$n=1$、$n'=\sqrt{5/2}$だった場合、
P_2 = (2, 2), P_1 = (0,-1), P_0 = (1,0) [m]の光路を考える。

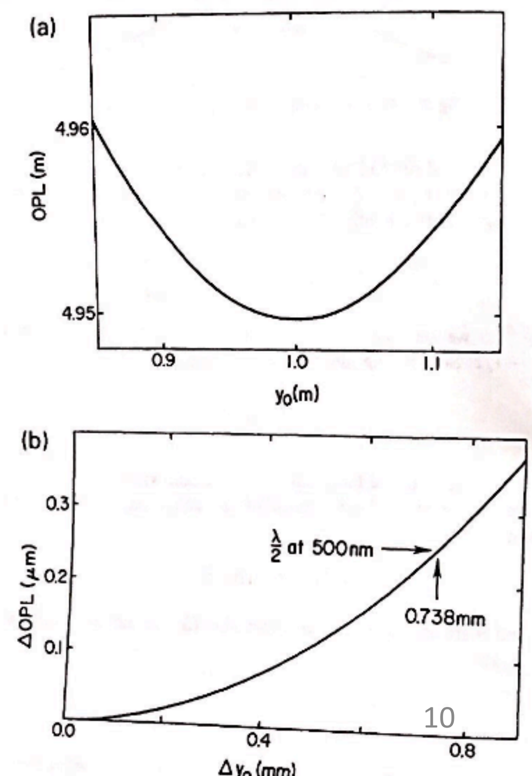
$$OPL = n\sqrt{(z_1^2+y_0^2)} + n'\sqrt{[z_2^2+(y_2-y_0)^2]}$$

最短経路で進む始めの波に対し、
半周期遅れで進む(干渉で打ち消しあう)波は、
λ=500nmのときΔ(OPL)=250nm、Δy_0=1475λ (0.738mm)

もし、p_0 = (1.2, 0)とした時、P_1, P_2は
解ではなくなるり、光路長における
半波長の変化はΔy_0=2.8λに対応する。

フェルマーの原理
→最も光が通りやすい経路を与える。





3.4 Fermat's Principle and reflecting surface
3.4.a Concave mirror, one conjugate at infinity

凹面鏡における無限遠からの光について、

フェルマーの原理から光路長について必要な条件は、任意のyについて

$$2f = l + (f - \Delta)$$

が成立すること。一方図から

$$l^2 = y^2 + (f - \Delta)^2 \qquad (3.4.1)$$

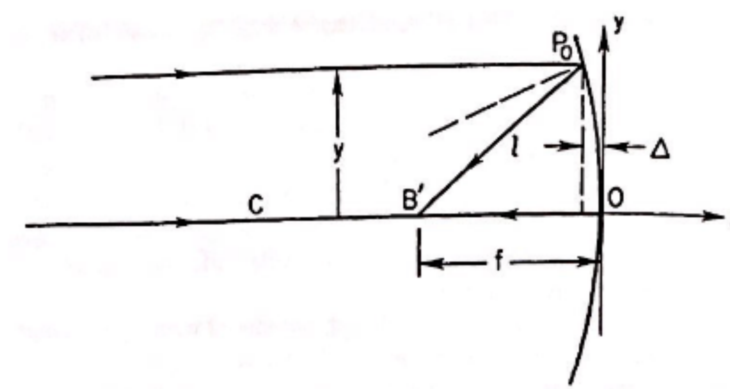
lについて解くと$y^2 = -4f\Delta$であり、Δをzとして表すと、

$$y^2 = -4fz \qquad (3.4.2)$$

となり、頂点(0,0)の放物線になる。

焦点距離fを頂点における曲率半径Rとして表すと、以下が得られる。

$$y^2 = 2Rz \qquad (3.4.3)$$

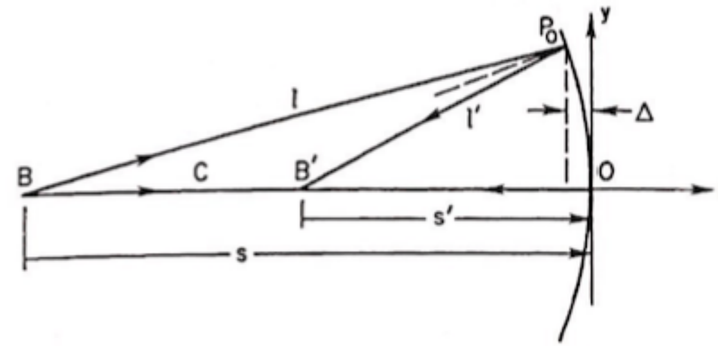


図においてRとzは負値

3.4.b concave mirror, Both Conjugates finite

凹面鏡において、B、B'から出る光線について、
フェルマーの原理より以下が成り立つ。

$$l + l' = -(s + s')$$



2つの三角形から

$$l^2 = y^2 + (-s - \Delta)^2$$
$$l'^2 = y^2 + (-s' - \Delta)^2$$

lとl'についてとき、Δ= $-z$とすると

$$y^2 - 4z\frac{ss'}{s+s'} + 4z^2\frac{ss'}{(s+s')^2} = 0 \qquad (3.4.4)$$ →楕円の式

$2a = s + s'$、$b^2 = ss'$ととおけば、以下の式になる。

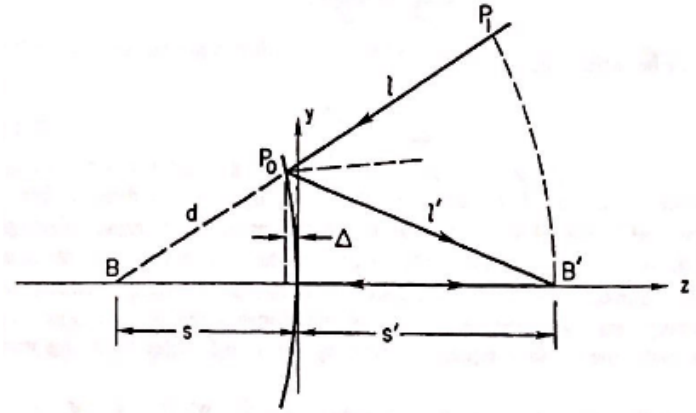
$$\frac{(z-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$s = \infty$では、$s' = -f$を焦点とする放物面。

3.4.c convex mirror, Both Conjugates finite

凸面鏡において仮想的な物体BからB'に像ができる場合を考える。
フェルマーの原理より

$$l + l' = 2s'$$



幾何配置から

$$d^2 = y^2 + (-s - \Delta)^2$$
$$l + d = s' - s$$
$$l'^2 = y^2 + (s' + \Delta)^2$$

l、l'、dを消去し、$\Delta = -z$を入れると以下を得る。

$$y^2 - 4z\frac{ss'}{s+s'} + 4z^2\frac{ss'}{(s+s')^2} = 0 \quad (3.4.6)$$

→sとs'が逆符号であり双曲線の式

$2a = s + s'$、$b^2 = -ss'$ととおけば、以下の式になる。

$$\frac{(z-a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$s = \infty$では、$s' = -f$を焦点とする放物面。

3.5 Conic sections

これまで出た曲線は全て2次曲線=円錐の切断面(conic section)

頂点($y = 0$)の曲率半径をRとおくと、

$$y^2 - 4z\frac{ss'}{s+s'} + 4z^2\frac{ss'}{(s+s')^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{ss'}{s+s'} = \frac{R}{2} \qquad (3.5.1)$$

a、bを楕円の半径として、離心率$e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$より、

$$1 - e^2 = \frac{4ss'}{(s+s')^2} \quad \Leftrightarrow \quad e^2 = \frac{(s-s')^2}{(s+s')^2} \qquad (3.5.2)$$

$$\Rightarrow \ y^2 - 2Rz + (1 - e^2)z^2 = 0 \qquad (3.5.3)$$

$K = -e^2$はconic constantと呼ばれる。

oblate ellipsoid:	$e^2 < 0$	$K > 0$
sphere:	$e = 0$	$K = 0$
prolate ellipsoid:	$0 < e < 1$	$-1 < K < 0$
paraboloid:	$e = 1$	$K = -1$
hyperboloid:	$e > 1$	$K < -1$

拡大率　$m = -s'/s$　を用いて　$K = -e^2$　は以下のように書ける。

$$e^2 = \frac{(s-s')^2}{(s+s')^2} \longrightarrow K = -\frac{(m+1)^2}{(m-1)^2} \qquad (3.5.4)$$

$r^2 = x^2 + y^2$　として、曲面に拡張する。

$$y^2 - 2Rz + 4(1-e^2)z^2 = 0 \longrightarrow r^2 - 2Rz + 4(1+K)z^2 = 0 \qquad (3.5.5)$$

鏡面各点における曲率半径　R_{lc}　を導出する。

$z' = dz/dr$、$z'' = d^2z/dr^2$　とおくと、

$$R_{lc} = \frac{(1+z'^2)^{3/2}}{z''}$$
$$= r(1-K\frac{r^2}{R^2})^{3/2}$$
$$= R(1-K\frac{\varepsilon^2}{16F^2})^{3/2}$$

ここで$F = |f|/D$ (F値)、$r = \varepsilon D/2$　として、$0 < \varepsilon < 1$である。
$K = 0$ (球面)のとき、 $R_{lc} = R$
$r \to 0$ (頂点の近く)のとき、 $R_{lc} \to R$であり、近軸近似の時には曲面形状は頂点と等しい。
ただし一般的な鏡面はフェルマーの原理に完全には従わない。→収差の原因

3.6 Fermat’s Principle and the Atmosphere
3.6.a Atmospheric refraction

屈折率$n = n(z)$、 z 軸が鉛直方向の平行大気を仮定する

$$n\kappa = n\cos\alpha\frac{d\alpha}{dz} = \sec\alpha\frac{\partial n}{\partial y} - \sin\alpha\frac{\partial n}{\partial z} \longrightarrow nK = n\cos\alpha\frac{d\alpha}{dz} = -\sin\alpha\frac{dn}{dz} \qquad (3.6.1)$$

大気の屈折率変化は上部で$n = 1$、地表で$n = 1.00029$程度のため、
α が90°近くでなければ光路はほとんど変化しない。
αをほぼ定数、α_0を大気上部からの入射角(天頂角; zenith angle)として

$$\delta\alpha = -\tan\alpha_0\,\delta n = -(n-1)\tan\alpha_0$$

天体からくる光であれば、$\delta n = (n-1) > 0$であり$\delta\alpha < 0$
→天頂角は常に実際の光路に比べて小さくなる
nは波長の関数であり、 $\sigma = 1/\lambda$ [A^{-1}]、 p_s=1.01325x10^5 [Pa]、
T_s =288.15 [K]のとき

$$(n_s - 1)\times 10^6 = 64.328 + \frac{29498.1\times 10^{-6}}{146\times 10^{-6} - \sigma^2} + \frac{255.4\times 10^{-6}}{41\times 10^{-6} - \sigma^2}$$

$$n - 1 = \frac{pT_s}{p_s T}(n_s - 1)$$

Index of Refraction of Atmosphere[a]

λ (nm)	$n-1$	R_0 (arc-sec)
320	3.049E-4	62.86
400	2.982	61.48
550	2.929	60.38
700	2.907	59.93
1000	2.890	59.58

[a] Values of n from Allen (1973). Index given at $T = 0$°C, pressure = 760 mm Hg, water vapor pressure = 4 mm Hg.

$$R_0 = \frac{n_0^2 - 1}{2n_0^2}$$

R_0(constant of refraction)を(実際の天頂からの距離)ー(見た目の天頂からの距離)とすると表のような関係式になる。

3.6.b Atmospheric turbulence

光がほぼ鉛直方向から来ると仮定して、鉛直からの角度をα ($\alpha \ll 1$)とする。
2次元面のフェルマーの原理(3.1.10)より

$$\underbrace{n\cos\alpha}_{\sim 1}\frac{d\alpha}{dz} = \underbrace{\sec\alpha}_{\sim 1}\frac{\partial n}{\partial y} - \underbrace{\sin\alpha}_{\sim 0}\frac{\partial n}{\partial z} \longrightarrow n\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial y} \qquad (3.6.4)$$

$n = 1 + \delta n$ (δnは屈折率の局所平均)
として1次の摂動のみを考えると

$$\longrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial(\delta n)}{\partial y} \qquad (3.6.5)$$

大気の上部の境界を$z = 0$として、 $z = s$までで光が曲がる角度は

$$\alpha_y(s) = \int_0^s \left[\frac{\partial(\delta n)}{\partial y}\right]_z dz \qquad (3.6.6)$$

と書き表せ、以下の特徴を持つ。

- α_yおよびα_xは時間の関数
- $\langle \delta n \rangle = 0$
- $\langle \alpha_x^2 \rangle \neq 0$であり、平均の周辺をランダムに変動する。

またこの効果によりシーイング(seeing)が引き起こされ、典型的には a few-arcsec程度で星の像が揺らぐ。

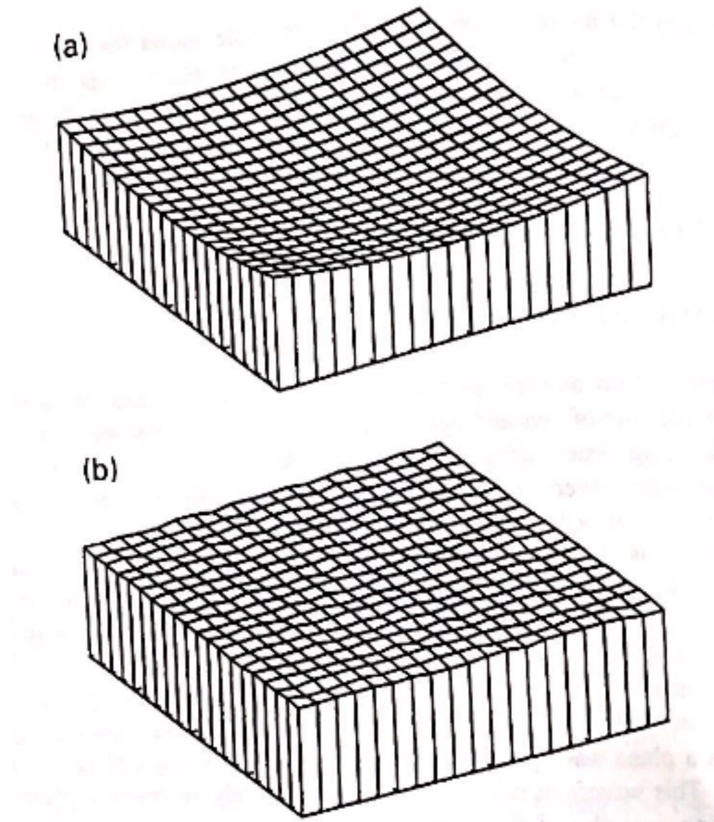
3.7 Concluding remarks
3.7.a Rays and wavefronts

理想光学系における光線や光路長を求めるとき

- フェルマーの原理を考える
- 光源からの光路長の一致する面(波面)を導出

波面の特徴

- 一様な媒質中では点源から出た光の波面は球面
- 光線は波面に対して常に垂直



フェルマーの原理が口径の中で成り立たない点を持つ場合、結像する元となる波面は球面ではなくなり、収差が発生する。

3.7.b How perfect is "perfect"?

フェルマーの原理→あくまで幾何光学

実際には光は波動の性質を持ち、光路差(optical path difference; OPD)が1波長より小さい構造は分解できない。OPDをΔとして、 $\Delta \approx \lambda$とすると、角度分解できる最小の大きさは

$$\theta_{min} \approx \lambda / D \qquad (3.7.1)$$