

1 座標変換

天球上の位置を表すための座標系として、赤道座標系、黄道座標系、銀河座標系がある。それらの間の座標変換を考えてみよう。まず、赤道座標系で、Z 軸が天の北極、X 軸が春分点を向いている、XYZ 軸（基準軸）を考える。

1-1: 赤道座標系の基準軸を、黄道座標系の基準軸（=X 軸は春分点を、あらたな Z 軸が黄北極 (NEP) を指している）に変換するにはどうしたら良いか？ただし、赤道面に対する黄道面の傾きを 23.44 度とする。

1-2: 赤道座標系の基準軸を、銀河座標系の基準軸（=X 軸が銀河中心を指し、XY 平面が銀河面に対応している）に変換するにはどうしたら良いか？ただし、銀河中心の赤経、赤緯を $(\alpha, \delta) = (266.^\circ 41, -28.^\circ 94)$ 、赤道面に対する銀河面の傾きを $58.^\circ 60$ とする。

2 人工衛星の姿勢

人工衛星の姿勢を表すために、オイラー角が用いられる。これは、人工衛星の X 軸が春分点、Z 軸が天の北極を向いている状態を初期姿勢とし、Z 軸の周りに ϕ 、新たな Y 軸の周りに θ 、さらに新たな Z 軸の周りに ψ という連続した回転を行い、それによって得られた姿勢を (ϕ, θ, ψ) の組で表すものである。

2-1: +Z 軸が望遠鏡の向き、+Y 軸が太陽パネルの向きとしよう。 (ϕ, θ, ψ) のオイラー角で与えられる姿勢で観測するとき、望遠鏡が指している天体の赤経、赤緯は何か？

2-2: 焦点面検出器によって得られた画像を、通常通り、北を上向きにして表示しよう。その際、検出器の Y 軸 (DETY) の傾きを、北から反時計回りに測った角度を「ロール角」と定義する。ロール角と第 3 オイラー角 ψ の関係を示せ。

2-3: 太陽パネルは太陽を向いていなくてはいけなくて、+Y 軸は常に太陽方向を向いている必要があるが、+Y 軸のまわりの回転は自由である。これによって、観測できるターゲット (+Z 軸が指す方向) が季節によって変わる。ただし、黄北極 (NEP)、黄南極 (SEP) は、通年観測できることに注意しよう。NEP を観測する場合を考える。「春分」、「夏至」、「秋分」、「冬至」の際、NEP を観測するオイラー角をそれぞれ示せ。

3 人工衛星の軌道

3-1: ケプラーの第三法則を用いて、人工衛星の軌道長半径 (a) と周期 (P) の関係を、具体的な数値を入れて導け。

3-2: 人工衛星の軌道と、与えられた時刻 (エポック) における軌道上の位置は、6 つのパラメーターで記述できる (軌道六要素)。それらを説明せよ。

以下、各[番号]に入る数字または語句を答えよ。番号の後に複数の語句が示されているときは、正しいものを選択せよ。また、説明が求められているところでは、番号を記した後に説明を記述せよ。

4 ブラックホール

質量 M 、球対象で回転していない天体を考える。その周りの重力場はシュワルツシルドメトリックで表され、十分遠方の観測者が乗っている座標を r, ϕ, t とすると、

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\phi^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 \quad (1)$$

と書ける。 r_s が、質量 M の天体のシュワルツシルド半径であり、それは光速 c 、万有引力定数 G 、 M を用いて、 $r_s = [1]$ と書ける。太陽についてその値は[2] km、地球については、[3] mm である。

ブラックホール自身は光を出さないわけだが、仮にブラックホールとその周辺の降着円盤を「撮像」したら、降着円盤の中にぽっかりと穴が開いたような「ブラックホールシャドウ」が見えるだろう。ここでは単純に、シュワルツシルド半径をブラックホールシャドウの半径だと考えて、その見かけの広がりを見積もってみよう。私たちの銀河の中心までの距離は 8 kpc であり、そこには質量 370 万 $M_\odot$ のブラックホールが存在する。その見かけ上の広がり、約[4] 秒角である。波長 λ 、基線長 D を持つ電波干渉計において、その位置分解能をおおまかに λ/D で見積もることが出来る。波長 $\lambda = 1\text{cm}$ の電波で観測するとき、 $D = [5]$ km であれば、原理的にそのようなブラックホールを分解できることになる。実際、そのような電波干渉計が提案されており、より短い観測波長、より長い基線長を目指して開発が進められている。

ニュートン力学では、質量 M の天体の周りの安定円軌道について、その最小半径は存在しない。一方、一般相対性理論ではブラックホールの周りの質点の運動を解くと安定な円軌道の最小半径 (Innermost Stable Circular Orbit; ISCO) が、ブラックホールの角運動量 a ($0 \leq a \leq 1$) の関数として得られる。回転していないブラックホールの周辺、シュワルツシルド時空の場合 ($a = 0$)、 $R_{ISCO} = [6]$ である。ブラックホールの回転と円運動の方向が一致しているときは、 a とともに R_{ISCO} は減少し、角運動量最大 ($a = 1$) のとき、 $R_{ISCO} = [7]$ である。

無限遠から質量 m の物質が角運動量を受けて (渦を巻いて) 落ち込んでいき、降着円盤を作り、最終的に R_{ISCO} に達すると考える。簡単のためにニュートン力学で考えると、その場における全エネルギーを G, M, m, R_{ISCO} を用いて、 $E = [8]$ と書ける。よって、単位時間あたり $\dot{m}$ の質量の物質が落ちるとき、円盤の光度は、 $L_{disk} \approx [9]$ となる。 R_{ISCO} として、シュワルツシルドブラックホールの場合、極端なカーブラックホール ($a = 1$) の場合、それぞれについて[6]、[7]を代入し、

$$L_{disk} \approx [10] \dot{m} c^2 \text{ (Schwarzschild black hole)} \quad (2)$$

$$L_{disk} \approx [11] \dot{m} c^2 \text{ (Extreme Kerr black hole)} \quad (3)$$

が得られる。厳密に、一般相対論的な計算によると上記の係数 (エネルギー効率) はそれぞれ、 $1 - \sqrt{8/9} \approx 0.057$, $1 - \sqrt{1/3} \approx 0.42$ であるが、ニュートン近似でも大まかな値が見積もれることがわかる。

一方、熱核融合反応の時、水素が鉄に達するまでの平均で、エネルギー効率は 0.009 である。ブラックホールへ物質が落ち込む際の重力エネルギーの解放が非常に効率的であることを理解しよう。

5 エディントン限界光度と黒体輻射

κ_T をトムソン散乱による質量吸収係数 ($\sim 0.4 \text{ cm}^2/\text{g}$) とする。質量 M の天体が球対象で X 線放射をしているとき、そのエディントン限界光度 L_{Edd} を導出し、 c, G, M, κ_T で表せ^[1]。ただし、元素は水素のみを仮定する。具体的な数字を入れると、

$$L_{Edd} \approx [2] \left(\frac{M}{M_\odot} \right) [\text{erg/s}] \quad (4)$$

である。これから、質量 $1M_\odot$ 、半径 10km の中性子星がエディントン限界光度で黒体輻射をしているとき、その温度は^[3] 3keV となる。これは典型的な X 線バーストに対応する。また、質量 $1M_\odot$ 、半径 5000 km の白色矮星がエディントン限界光度で黒体輻射をしているとき、その温度は^[4] 4keV となる。ここで、ステファンボルツマン係数、 $\sigma \approx 1 \times 10^{24} \text{ erg/s/cm}^2/\text{keV}^4$ を用いよ。非常に低温のスペクトルを持つ Super-soft Source の起源は、そのような黒体輻射をしている白色矮星だと考えられている。

6 降着円盤

質量 M のブラックホールの周りの、光学的に厚い標準降着円盤を考える。物質は質量降着率 $\dot{M}$ でブラックホールに落ちていくとする。物質が dr 落ちる間に解放される重力エネルギーの半分が熱化され、ディスクの両面から黒体輻射で放出されると考えると、ディスクの温度の半径依存性は、 $G, M, \dot{M}, \sigma$ を用いて、

$$T(r) \approx [1] \quad (5)$$

と書ける。ただし、ここでは内縁の境界条件を無視して単純化している。これを、内縁半径を r_{in} 、温度を T_{in} として、

$$T(r) = T_{in}(r/r_{in})^{[2]} \quad (6)$$

と書く。ディスクの両面が黒体輻射をしていることを考慮し、 r_{in} から $r_{out} (\gg r_{in})$ まで積分し、ディスクの光度は、 σ, r_{in}, T_{in} を用いて、

$$L_{disk} \approx [3] \quad (7)$$

と表される。

降着円盤の内縁が、前節で述べた R_{ISCO} だとしよう。また、降着円盤はエディントン限界光度を仮定する。すると、降着円盤の内縁半径は質量 M だけの関数となり、シュワルツシルド時空（回転していないブラックホール）の場合は、

$$T_{in} \approx [4] \text{ keV} \left(\frac{M}{10M_\odot} \right)^{[5]} \quad (8)$$

となる。よって、最大光度 (エディントン限界) で光っている質量 $\sim 10M_\odot$ のブラックホールの周りの降着円盤は、^[4] 4keV の温度を持つので、X 線領域で観測されることがわかる。

ブラックホールの質量が大きいほど、降着円盤の温度が6(高く/低く)なることに注意。たとえば、太陽の 10^9 倍の質量を持つ巨大ブラックホールの降着円盤の温度は7 eV となり、これは8 (紫外線領域/ガンマ線領域) で観測される。

回転しているブラックホールの場合は、 R_{ISCO} が9 (大きく/小さく) なるので、同じ円盤光度に対して、 T_{in} の値は、10 (高く/低く) なる。実際、質量がわかっているブラックホールに対し、その円盤光度と T_{in} の測定から R_{ISCO} を見積もり、ブラックホールのスピンの制限を与える試みが行われている。

なお、厳密にはディスク放射スペクトルは黒体放射ではなく、その色温度と有効温度の違いを考慮する必要がある。ディスクの表層の高温電子によるコンプトン効果のために、ディスク放射の色温度は有効温度よりも11 (高く/低く) なっている。それに気づかずに、ディスク放射を黒体放射と思ってブラックホールの質量を見積もると、それは実際の質量よりも $(T_{col}/T_{eff})^2$ だけ12 (大きく/小さく) なってしまうので、注意が必要である。

理論的には、 T_{col}/T_{eff} の値はディスクの光度や半径に依らず、ほぼ ~ 1.7 で一定である。この値を用いて、ブラックホール連星について、X 線観測から見積もったブラックホール質量と、軌道運動の測定から求められた、より信頼できる質量との間に、良い一致が見られる。

以上