第5回 ブラックホールについて

2021年8月2日　7:05

$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \xrightarrow{r\to\infty} 0$

$\frac{1}{2}v_{esc}^2 = \frac{GM}{r}$

$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

ブラックホールの基礎:

1. **ニュートン力学を用いて、質量 M、半径 r の星の表面からの脱出速度、v_{esc} を求めよ。仮に、v_{esc} を光速としたとき、その半径を求めよ。その値を、シュワルツシルド半径と比較せよ。**

$c = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$　$c^2 = \frac{2GM}{r}$　$\boxed{r = \frac{2GM}{c^2}}$　一致する!!

~80M☉くらい

2. **知られている「恒星質量ブラックホール」の最大の質量は? (See these article and paper by LIGO collaboration)**

GRS1915+105 ~14M☉
Cygx-1 ~15M☉
X線天体

3. **私たちの銀河中心 (Sgr A*)のブラックホールの質量は? (A latest result, Stellar Orbits around the black hole, Nobel Prize 2020!)**

→ 400万太陽質量

Active Galactic Nuclei (活動的銀河中心核)

4. **知られている最大のブラックホールの質量は？(AGN, クェーサー)?**

$\sim 10^{10} M_\odot$

5. **100-1000 Msolarの中間質量ブラックホール (intermediate mass black holes ; IMBHs)は存在するだろうか？存在するとしたら、その候補天体は？**

Ultraluminous X-ray Sources

A 400-solar-mass black hole in the galaxy M82

ブラックホールの「サイズ」を感じてみよう

1. **ブラックホールのシュワルツシルド半径を、天体までの距離で割って、見かけのサイズを見積もれ。銀河系内の恒星質量ブラックホールと、遠方の超巨大ブラックホールと、どちらのほうが分解しやすいか？**

$\boxed{\Delta\theta} = \frac{\text{実際の大きさ(いくらか)}}{\text{天体までの距離}}$

$\Delta\theta = \frac{R_s}{d} = \frac{2GM/c^2}{d} = \frac{3\,\mathrm{km}\,(M/M_\odot)}{(d/10\mathrm{kpc})\,10\mathrm{kpc}}$

$= \frac{30\,\mathrm{km}\,(M/10M_\odot)}{(d/10\mathrm{kpc})\cdot 10\mathrm{kpc}}$

$= \frac{30\times10^5\,[\mathrm{cm}]\,(M/10M_\odot)}{10\times10^3\times3\times10^{18}\,[\mathrm{cm}]\,(d/10\mathrm{kpc})}$

$= \frac{10^6}{10^{22}}\frac{(M/10M_\odot)}{(d/10\mathrm{kpc})} = 10^{-16}\,[\mathrm{rad}]\,\frac{(M/10M_\odot)}{(d/10\mathrm{kpc})}$

$= 10^{-16}\times 2\times10^5\,[\mathrm{arcsec}]\times\left(\frac{M/10M_\odot}{d/10\mathrm{kpc}}\right)$

$1^\circ = 60' = 3600''$
$\pi = 180^\circ$
$1\,\mathrm{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{(180\times3600)''}{\pi} = 2\times10^5\,[\mathrm{arcsec}]$

2. **基線長が10,000 km (=地球上で最長)の電波干渉計で1mmの波長で観測したとき、その位置分解能はどの程度になるか？**
$\Delta\theta$
基線長が10mの「X線干渉計」で波長1 Aで観測したとき、その位置分解能はどの程度になるか？
どちらのほうがより高い位置分解能か？ X線!!

度になるか？

基線長が10mの「X線干渉計」で波長1 Åで観測したとき、その位置分解能はどの程度になるか？

どちらのほうがより高い位置分解能か？ ← X線!!

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{D} = \frac{1\,mm}{10000\times10^3\,m} = \frac{10^{-3}\,m}{10^7\,m} = 10^{-10}\,[rad] = 2\times10^{-5}\,[arcsec]$$

口径 or 基線長

$$\simeq 20\,[\mu arcsec]$$

$$\Delta\theta = \frac{1Å}{10\,m} = \frac{10^{-10}\,m}{10\,m} = 10^{-11}\,[rad]$$

$$= 10^{-16}\times 2\times10^5\,[arcsec]\times\left(\frac{M/10M_\odot}{d/10\,kpc}\right)$$

$$= 2\times10^{-11}\,[arcsec]\left(\frac{M/10M_\odot}{d/10\,kpc}\right)$$

ほぼ実現不可能

Stellar mass BH

Sgr A $\begin{cases} d = 8\,kpc \\ M = 4\times10^6\,M_\odot \end{cases}$

$$\Delta\theta = 2\times10^{-11}\left(\frac{4\times10^6/10}{8/10}\right)[arcsec]$$

$$= 2\times10^{-11}\times\frac{4\times10^5}{8/10}$$

$$= 10^{-11}\times10^5\times10 = 10^{-5}\,[arcsec]$$

$$= 10\,[\mu arcsec]$$ ← 実現可能!!

Event Horizon Telescope

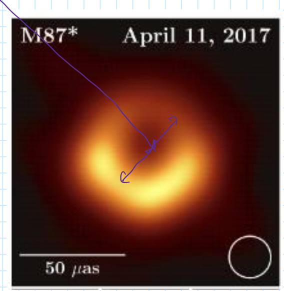
Event horizon telescope

HALCA - The first Space VLBI project

Micro-arcsecond X-ray Imaging Mission

3. 一般相対性理論によると、ブラックホールの周りの光子捕足半径("Photon-capture radius")は、$\sqrt{27}\,r_g$, である。ここで、 r_g は重力半径($=GM/c^2$)である。2020年 Event Horizon Telescopeは、ついにM87 (距離は16.8 Mpc) のブラックホールの周りの明るいリングを発見した。その直径は、 42 μas であった。この観測事実から、ブラックホールの質量を見積もれ。(see 2019ApJ...875L...1E)

$$r_g = \frac{GM}{c^2} \quad \left(シュワルツシルド半径 = \frac{2GM}{c^2}\right)$$



$$\Delta\theta = 42\,\mu as = \frac{2\sqrt{27}\,r_g}{d}$$

$$42\times10^{-6}\times\frac{1}{2\times10^5} = \frac{2\sqrt{27}\left(\frac{GM}{c^2}\right)}{16.8\,Mpc}$$

$$21\times10^{-11} = \frac{2\times5.2\times\left(\frac{2GM_\odot}{c^2}\right)\left(\frac{M}{2M_\odot}\right)}{16.8\times10^6\times3\times10^{18}\,[cm]}$$

3 km

$$= \frac{10.4\times3\times10^5\,[\cancel{cm}]\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{M_\odot}}{16.8\times3\times10^{24}\,[\cancel{cm}]}$$

$$\frac{M}{M_\odot} = \frac{21\times10^{-11}\times50\times10^{24}\times2}{31\times10^5}$$

$$= \frac{21}{31}\times\cancel{50\times2}\times10^{10}$$

$$= 6.8\times10^9$$

$M = 6.8\times10^9\,M_\odot$

4. とりあえず一般相対論は無視して、ブラックホールを、シュワルツシルド半径~~半径~~を持つ球と考えてみよう。その質量を体積で割って、ブラックホールの「密度」を見積もれ。 その密度は、ブラックホールの質量が大きい方が大きくなるか、小さくなるか？

[g/cm³]

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_S^3} = \frac{1}{4}\,\frac{M}{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3} \propto M^{-2}$$

$\boxed{M\uparrow\ \rho\downarrow}$

$$\rho = \frac{1}{4}\,\frac{(M/M_\odot)\,M_\odot}{\left(\frac{2GM_\odot}{c^2}\,\frac{M}{M_\odot}\right)^3} = \frac{1}{4}\,\frac{M_\odot}{(3\times10^5\,cm)^3}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}$$

3 km

$$= \frac{1}{4}\,\frac{2\times10^{33}\,[g]}{27\times10^{15}\,[cm^3]}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}$$

1 [g/cm³]

100

5. ブラックホールの密度は、水の密度よりも小さくなることがあるか？あるとしたら、どのような場合？

Yes

$$1 > 2\times10^{16}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}$$

$$= 2\times\frac{10^{33}}{10^{17}}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}[g/cm^3]$$

$$\doteqdot 2\times10^{16}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}[g/cm^3]$$

中性子星の内部の密度 ~10^{15} [g/cm³]

$$\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 > 2\times10^{16}$$

$$\frac{M}{M_\odot} > 1.4\times10^8$$

6. 質量Mのブラックホールのシュワルツシルド半径を光が横切る時間を見積もれ。

$$\Delta t = \frac{R_S}{c} = \frac{2GM/c^2}{c} = \frac{1}{c}\,3\,km\cdot\left(\frac{M}{M_\odot}\right)$$

$$= \frac{3\,km}{3\times10^5\,[km/s]}\left(\frac{M}{M_\odot}\right) = 10^{-5}\,[s]\left(\frac{M}{M_\odot}\right) = 10^{-4}\,[s]\left(\frac{M}{10M_\odot}\right) = 0.1\,msec\left(\frac{M}{\ldots}\right)$$

$\Delta t = \frac{[illegible]}{c} = \frac{[illegible]}{c} = \frac{1}{c}\, 3\,\mathrm{km} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)$

$= \frac{\cancel{3}\,\cancel{\mathrm{km}}}{\cancel{3}\times 10^5 [\cancel{\mathrm{km}}/s]}\left(\frac{M}{M_\odot}\right) = 10^{-5}[s]\left(\frac{M}{M_\odot}\right) = 10^{-4}[s]\left(\frac{M}{10M_\odot}\right) = 0.1\,\mathrm{msec}\left(\frac{M}{10M_\odot}\right)$

短かい（日常生活とか CCDカメラの exposure time）〜4秒とか

$\frac{M}{M_\odot} > 1.4\times 10^8$

$\boxed{M > 10^8 M_\odot}$

$\boxed{\text{潮せき力}}$

$M \uparrow$ 潮せき力 $\downarrow$ (tidal force)

7. **ブラックホール近傍、シュワルツシルド半径あたりで起きている現象のx線時間変化を調べたい。恒星質量ブラックホールと超巨大ブラックホール、どちらの時間変動を、より調べやすいか？**

$= 10^3[s]\left(\frac{M}{10^8 M_\odot}\right)$

日常生活の時間（CCDのexposure timeより長い）

こちらの方が調べやすい